بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

عنوان:

تعیین گراف‌های فرینه چند نوع اندیس رندیک در بعضی گراف‌های خاص

استاد راهنما:

دکتر مهدی سهرابی حقیقت

استاد مشاور:

دکتر علیمحمد نظری

توسط:

سیروان ویسی‌پور

زمستان ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی یک نوع از اندیس‌های توپولوژیکی به‌نام اندیس رندیک وانواع دیگر آن اعم از اندیس رندیک عمومی، اندیس رندیک مرتبه صفر و اندیس رندیک عمومی مرتبه صفر می‌پردازیم. سپس برای حالت‌های خاصی از آن،کران‌های بالا و پایین را محاسبه می‌کنیم. این حالت‌ها شامل $(n,m)-$گراف‌ها، گراف‌هایی از مرتبه‌ی n و مینیمم درجه‌ی k، گراف‌های دوردار (حداکثر سه دور) و... می‌باشد که در این پایان‌نامه به بررسی آنها می‌پردازیم. در انتها نیز اندیس رندیک عمومی مرتبه صفر را برای گراف‌های دو دوری و سه دوری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی : اندیس رندیک، اندیس رندیک عمومی، اندیس مرتبه صفر رندیک، اندیس مرتبه صفر رندیک عمومی، گراف‌های دودوری، گراف سه‌دوری، گراف‌های فرینه، مقادیر اکسترمم و کران‌های بالا و پایین.

پیشگفتار

در سالهای اخیر شاخه مشترکی میان ریاضیات و شیمی مورد توجه محققان قرار گرفت که معمولا بر گرفته از سوالاتی در زمینه گراف های شیمیایی[1] می باشد. این موضوع از نگاه ریاضیات شاخه مشترکی میان تحقیق در عملیات[2] و نظریه گراف[3] است که آن را اندیس های توپولوژیکی[4] نامیده اند.

اندیس های توپولوژیکی دارای انواع مختلفی هستند که هر کدام مربوط به واکنش های شیمیایی مهم در یک ماده خاص می باشند. از مهمترین اندیس های توپولوژیکی می توان به اندیس سیمونز[5]، اندیس شولدز[6]، اندیس PI، اندیس زاگرب[7]، اندیس زگد[8]، اندیس رندیک[9] و... اشاره کرد که هر کدام از آنها زمانی که به تاریخچه معرفی آنها نگاه می کنیم مربوط به واکنش شیمیایی خاصی می باشد.

اندیس رندیک یکی از اندیس‌های مشهور می‌باشد که در سال‌های اخیر به این اندیس توجه شده است. از جمله محاسبات ویژه‌ای که روی این اندیس انجام گرفته یافتن کران‌های بالا و پایین برای این اندیس است. در این عملیات برخی از گراف‌های خاص را در نظر گرفته و اکسترمم‌های آنها را محاسبه کرده‌اند. از دیگر محاسبات مهم که در مورد این اندیس انجام شده است، محاسبه انواع اندیس رندیک بر روی گراف‌های دارای دور است. در این نوع عملیات گراف‌های تک دوری[10] ، دو دوری[11] و سه دوری[12] را در نظر گرفته و گراف‌های فرینه را با

[1] *Chemical graph*
[2] *Operation research*
[3] *Graph theory*
[4] *Topological indices*
[5] *Simonse index*
[6] *Shultz index*
[7] *Zagreb index*
[8] *Szeged index*
[9] *Randic index*
[10] *Unicyclic graphs*
[11] *Bicyclic graphs*
[12] *Tricyclic graphs*

توجه به مقدار این اندیس در این نوع گراف‌ها محاسبه کرده‌اند.

ساختار این پایان نامه به شرح زیر است:

فصل اول به بیان تعاریف اولیه و مقدمات کلی می‌پردازد.

فصل دوم به بررسی مقادیر اندیس رندیک و اندیس رندیک عمومی در چند نوع از گراف‌های خاص می‌پردازد. در این فصل همچنین مقادیر اکسترمم برای این اندیس‌ها در این گراف‌های خاص محاسبه می‌گردد.

فصل سوم با مطرح کردن اندیس مرتبه صفر رندیک عمومی و تعریف یک نوع گراف ویژه، به محاسبه مقدار این اندیس در این نوع گراف می‌پردازد. همچنین همانند فصل دوم در این خانواده از گراف‌ها مقادیر اکسترمم اندیس رندیک عمومی مرتبه صفر را محاسبه می‌کنیم.

فصل چهارم که آخرین فصل این پایان نامه است یک عملیات مهم روی گراف‌های دارای دور، یعنی محاسبه مقدار اندیس رندیک عمومی مرتبه صفر را بیان می‌کند و برای گراف های سه دوری یک روابطی جدید را برای محاسبه مقدار این اندیس ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ معرفی چند نماد در گراف‌ها

در ابتدا چند نماد مهم در گراف‌ها را که در ادامه به آنها نیاز داریم، ارائه می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $G(V,E)$ یک گراف با مجموعه رئوس[1] V و مجموعه یال‌های[2] E باشد، آنگاه:

$|V|$: مرتبه[3] G

$|E|$: اندازه[4] G

$N_G(u)$: مجموعه رئوس در همسایگی[5] رأس u

$d(u) = |N_G(u)|$: درجه[6] رأس u

$\delta(G)$: مینیمم درجه[7] G

$\Delta(G)$: ماکزیمم درجه[8] G

$\frac{2|E|}{|V|}$: میانگین درجه[9] G

---

[1] *Vertexs*

[2] *Edges*

[3] *Order*

[4] *Size*

[5] *Adjacent*

[6] *Degree*

[7] *Minimum degree*

[8] *Maximum degree*

[9] *Average degree*

U_n: مجموعه همه گراف‌های تک دوری از مرتبه n.

$U(n,k)$: مجموعه همه گراف‌های تک دوری از مرتبه n که طول آنها برابر k می‌باشد.

$G-v$: گراف G با حذف رأس v و یال‌های متصل به آن

$G+uv$: گراف G با اضافه کردن یال uv در حالی که $u,v \in V(G)$

n_i: تعداد رئوس از درجهٔ i در گراف G

x_{ij}: تعداد یال‌هایی که رأس‌های از درجهٔ i را به رأس‌هایی از درجهٔ j وصل می‌کنند.

۲.۱ تعاریف اوّلیه

تعریف : زوج مرتب $G=(V,E)$ را که V مجموعه‌ای نا تهی و متناهی و E زیر مجموعه‌ای از تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی مجموعه V است را گراف [1] می‌نامیم. گراف $G=(V,E)$ را به اختصار با G نشان می‌دهیم.

گراف متناهی : اگر مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف متناهی باشند گراف متناهی[2] است. در این پایان نامه تنها گراف‌های متناهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و بنابراین اصطلاح « گراف » همیشه به معنای « گراف متناهی » است.

طوقه : یالی با دو انتهای یکسان را طوقه[3] می‌گویند.

گراف ساده : اگر گراف G دارای طوقه نبوده و هیچ دوتایی از پیوندهایش به یک زوج رأس متصل نباشند، آن‌را یک گراف ساده[4] گوییم.

یال آویزان : یالی با یک رأس از درجه یک را یال آویزان[5] می‌نامند.

گراف کامل : گراف ساده‌ای که در آن هر جفت از رأس‌های متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند، گراف کامل[6] می‌نامند و آنرا با نماد K_i نشان می‌دهند. مثلا گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهند.

---

[1] Graph
[2] *Finite graph*
[3] *Loop*
[4] *Simple graph*
[5] *pendant edge*
[6] *Complete graph*

مسیر : یک مسیر[1] یک گراف غیر تهی $P(V,E)$ با رئوس $V=\{x_0,x_1,...,x_k\}$ و یال‌های $E=\{x_0x_1,x_1x_2,...,x_{k-1}x_k\}$ است که x_iها همگی متمایزند. رأس‌های x_0,x_k رأس‌های انتهایی و رأس‌های $x_1,x_2,...,x_{k-1}$ رأس‌های میانی هستند.

طول مسیر : تعداد یال‌های موجود در یک مسیر را طول مسیر می‌گویند.

دور: اگر $P=x_0x_1...x_{k-1}$ یک مسیر و $k\geq 3$ ، گراف $C=P+x_{k-1}x_0$ یک دور[2] نامیده می‌شود.

برگ[3] : رأسی که درجه‌ی آن یک است برگ نامیده می‌شود.

گراف ستاره : گراف متشکل از یک رأس به عنوان مرکز که با $n-1$ برگ مجاور است، ستاره[4] نامیده می‌شود و با نماد S_n نمایش داده می‌شود.

مولفه‌ی [5] همبندی : هر گراف ناهمبند را می‌توان به صورت اجتماع گراف‌های همبند در نظر گرفت. به هر یک از این گراف‌های همبند یک مولفه‌ی همبندی می‌گوییم. واضح است، گراف G همبند است اگر و تنها اگر یک مولفه‌ی همبندی داشته باشد.

گراف همبند : گراف G همبند است اگر G دارای دقیقاً یک مؤلفه باشد، در غیر این صورت G ناهمبند است.

گراف منتظم : گراف G ، $K-$منتظم است اگر به ازای هر $u\in V(G)$ ، $d(u)=k$ ، و گراف منتظم[6] گرافی است که به ازای یک k، $k-$منتظم باشد.

گراف دو بخشی : گراف G یک گراف دو بخشی[7] است اگر مجموعهٔ رأس های آن را بتوان به دو زیر مجموعهٔ X,Y به طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. چنین افراز (X,Y) را دوبخشی کردن گراف نامیده می‌شود.

گراف کامل دو بخشی : گراف G دو بخشی کامل[8] است، اگر یک دو بخشی ساده با افراز

$Path$[1]

$Cycle$[2]

Leaf[3]

$Star$[4]

Component[5]

$Regular\ graph$[6]

$Bipartite\ graph$[7]

$Complete\ bipartite\ graph$[8]

(X,Y) باشد که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل باشد. اگر $|Y|=n$ و $|X|=m$ ، آنگاه G، با نماد $K_{m,n}$ نمایش داده می‌شود.

وزن یک یال : اگر در گراف G دو رأس u,v با یال uv به هم متصل باشند آنگاه $[d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}}$ را وزن[1] یال uv نامیده می‌شود.

گراف تک دوری : گراف همبند با n رأس و n یال را گراف تک دوری[2] یا (n,n)—گراف می‌نامیم و با نماد $G(n,n)$ نشان داده می‌شود.

گراف دو دوری: گراف همبند با n رأس و $n+1$ یال را گراف دو دوری[3] یا $(n,n+1)$—گراف می‌نامیم و با نماد $G(n,n+1)$ داده می‌شود.

گراف سه دوری: گراف همبند با n رأس و $n+2$ یال را گراف سه دوری[4] یا $(n,n+2)$—گراف نامیده و با نماد $G(n,n+2)$ نشان داده می‌شود.

۳.۱ معرفی انواع اندیس رندیک

تعریف: یک عدد که می‌تواند بعضی از خصوصیات گراف مربوط به یک مولکول را توصیف کند، یک اندیس توپولوژیکی نامیده می‌شود. مهمترین خاصیت اندیس‌های توپولوژیکی این است که اگر برای دو گراف یکریخت یک اندیس توپولوژیکی را محاسبه کنیم، برای هر دو گراف مقدار یکسانی به دست می‌آید.

در حقیقت در بعضی شاخه‌ها از شیمی محاسباتی، اندیس‌های توپولوژیکی می‌توانند ماهیت ساختاری کاملی را از ترکیبات شیمیایی دارا باشند. توجه بیش از حد به موضوع اندیس‌های توپولوژیکی عمدتاً به‌خاطر کاربرد آنها در علم شیمی است. به این ترتیب که برای بعضی مواد بسیاری از خواص شیمیایی را بدون هیچ آزمایشی می‌توان از طریق این اندیس‌های توپولوژیکی حدس زد. یکی از مهمترین اندیس‌های توپولوژیکی اندیس رندیک است. این اندیس درسال

[1] $Weight$

[2] $Unicyclic\ graph$

[3] $Bicyclic\ graph$

[4] $Tricyclic\ graph$

۱۹۷۵ توسط میلان رندیک[1] با $[d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}}$ $\sum_{uv\in E(G)}$ $[d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}}$) را وزن یال uv برای همه یال های گراف G می‌نامند.)درگراف G تعریف شد و آن را با نماد $R(G)$ نشان داد [14].
اندیس رندیک اندازه انشعاب‌ها و شاخه‌های اسکلت کربن است و رابطه نزدیکی با خیلی از خواص شیمیایی دارد. بدین ترتیب که اگر آلکان‌های ایزومر[2] را با توجه به کاهش $R(G)$ مرتب کنیم، در واقع این نشان دهنده یک ترتیب از آلکان‌های ایزومر است که با توجه به افزایش انشعاب‌ها آنها مرتب شده‌اند.

تعریف: اگر عدد حقیقی α را با $-\frac{1}{2}$ مربوط به رابطه اندیس رندیک عوض کنیم، عدد به دست آمده را اندیس رندیک عمومی[3] نامیده و با نماد $R_\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم

$$R_\alpha(G) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha$$

جایگزین کردن α همانند یک پارامتر تنظیم‌پذیر می‌تواند نقش ایفا کند به طوری که این انتخاب α می‌تواند همبستگی R_α و بعضی از کلاس‌های ترکیبات ارگانیک[4] را بهینه کند[4].
در مقایسه با سایر اندیس‌های توپولوژیکی که توسط آمیدون [5] و آنیک[6] تعریف شده است [6]، اندیس رندیک می‌تواند دقیق‌تر نقاط جوش آلکان‌ها را پیش‌بینی کند.

تعریف: یکی دیگر از شاخه‌های اندیس رندیک $R^0(G)$ می‌باشد که توسط کایر [7] و هال [8] به صورت زیر تعریف شد [10] و آن را اندیس رندیک مرتبه صفر[9] می‌نامند.

$$R^0(G) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^{-\frac{1}{2}}$$

---

[1] Milan Randic
[2] *Isomeric Alkanes*
[3] *General Randic index*
[4] *Organic compounds*
[5] *Amidon*
[6] Anik
[7] *Kier*
[8] *Hall*
[9] *Zeroth − order Randic index*

تعریف: آخرین نوع از اندیس رندیک را لی[1] و ژنگ[2] به صورت زیر تعریف کردند [16] و با نماد $R^0_\alpha(G)$ نمایش دادند

$$R^0_\alpha(G) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^\alpha,$$

که در آن α همانند اندیس رندیک عمومی یک عدد حقیقی است. همچنین $R^0_\alpha(G)$ اندیس مرتبه صفر رندیک عمومی نامیده می‌شود[3].

۴.۱ محاسبه‌ی انواع اندیس رندیک برای گراف‌های مسیر، دور و ستاره

در این قسمت انواع اندیس رندیک (اندیس رندیک، اندیس رندیک عمومی، اندیس مرتبه صفر رندیک و اندیس مرتبه صفر رندیک عمومی) را برای مسیر P_n، دور C_n و ستاره‌ای مانند S_n محاسبه‌می‌کنیم. هدف از انجام این محاسبات روشن شدن مفهوم انواع اندیس رندیک است و همچنین طریقه‌ی محاسبه‌ی آنها با دیدن این چند حالت مشخص می‌شود.

محاسبه‌ی انواع اندیس رندیک برای مسیری به طول n مانند P_n

$$R(P_n) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}} = (n-3)\frac{1}{\sqrt{2.2}} + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{n-3}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{n-3}{2} + \sqrt{2}.$$

---

[1] Li

[2] $Zheng$

[3] $Zeroth - order\ general\ Randic\ index$

$$R_\alpha(P_n) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha = (n-3)4^\alpha + 2.2^\alpha$$

$$= (n-3)4^\alpha + 2^{\alpha+1}.$$

$$R^0(P_n) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^{-\frac{1}{2}} = (n-2)\tfrac{1}{\sqrt{2}} + 2.\tfrac{1}{\sqrt{1}}$$

$$= \tfrac{(n-2)\sqrt{2}}{2} + 2.$$

$$R^0_\alpha(P_n) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^\alpha = (n-2)2^\alpha + 2.1^\alpha$$

$$= (n-2)2^\alpha + 2.$$

محاسبه‌ی انواع اندیس رندیک برای دوری به طول n مانند C_n

$$R(C_n) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}} = (n-1)\tfrac{1}{\sqrt{2.2}}$$

$$= \tfrac{n-1}{2}.$$

$$R_\alpha(C_n) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha$$

$$= (n-1)4^\alpha.$$

$$R^0(C_n) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^{-\frac{1}{2}} = n\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \tfrac{n\sqrt{2}}{2}.$$

$$R^0_\alpha(C_n) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^\alpha$$

$$= n2^\alpha.$$

محاسبه‌ی انواع اندیس رندیک برای ستاره‌ای با n رأس مانند S_n

$$R(S_n) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}} = (n-1)\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{n-1}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1}.$$

$$R_\alpha(S_n) = \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha$$

$$= (n-1)(n-1)^\alpha = (n-1)^{\alpha+1}.$$

$$R^0(S_n) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^{-\frac{1}{2}} = (n-1)\frac{1}{\sqrt{1}} + 1.\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$= n-1+\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}.$$

$$R^0_\alpha(S_n) = \sum_{u\in V(G)} [d(u)]^\alpha = (n-1).1^\alpha + 1.(n-1)^\alpha$$

$$= (n-1)+(n-1)^\alpha.$$

فصل ۲

محاسبه اکسترمم‌های اندیس رندیک و اندیس رندیک عمومی برای گراف‌های خاص

۱.۲ مقدمه

در این فصل با یادآوری کردن اندیس رندیک و اندیس رندیک عمومی، به مطالعه آنها روی تعدادی گراف خاص می‌پردازیم. ابتدا مقادیر اکسترمم اندیس رندیک عمومی را برای گرافی مانند $G = (V, E)$ از مرتبه n که دارای خواصی دیگر است را به دست می‌آوریم. سپس در ادامه دو حدس مهم در مورد مقدار کران‌های اندیس رندیک در دو گراف خاص را بیان می‌کنیم. یکی از آن دو به بیان کران پایین این اندیس روی گراف‌هایی مانند G که بدون مثلث (دوری از مرتبه سه) هستند و دارای چند خواص دیگر می‌باشند، می‌پردازد و حدس دوم نیز کران پایینی برای گراف‌هایی مانند $G = (V, E)$ که از مرتبه n و کمترین درجهٔ k هستند و خواص دیگری را نیز دارا می‌باشند، معرفی می‌کند.

۲.۲ محاسبه اکسترمم‌های مقادیر اندیس رندیک عمومی در خانواده‌ای خاص از گراف‌ها

در ابتدا به عنوان یادآوری، تعاریف اندیس رندیک و اندیس رندیک عمومی را بیان می‌کنیم.

تعریف : گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که V مجموعه رئوس و E مجموعه یال‌های گراف G است. اگر فرض کنیم $d(u)$ نشان دهنده درجه رأس u در گراف G می‌باشد، آنگاه مقدار اندیس رندیک برای گراف G عبارتست از

$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d(u)d(v)]^{-\frac{1}{2}}.$$

تعریف : اگر در تعریف اندیس رندیک برای گراف G، $-\frac{1}{2}$ را با عددی مانند α (α عددی حقیقی) عوض کنیم آنگاه مقدار اندیس رندیک عمومی برای گراف G عبارتست از

$$R_\alpha(G) = \sum_{uv \in V(G)} [d(u)d(v)]^{\alpha}.$$

تذکر : همانطور که اشاره شد $R(G)$ و $R_\alpha(G)$ را می‌توان به یک اندیس مولکولی برای یک آلکان ویژه نسبت داد. اگر در $R_\alpha(G)$ مقدار α را مثبت در نظر بگیریم آنگاه آن را به هیچ مولکولی نمی‌توان نسبت داد، بنابراین چون $\alpha > 0$ هیچ کاربرد شناخته شده‌ای ندارد، توجه چندانی به این حالت نشده است، به همین دلیل ما نیز در این قسمت به بررسی کران‌های پایین برای اندیس رندیک عمومی با$0 \leq \alpha$ می‌پردازیم. با توجه به تعاریف و نمادهایی که در فصل اوّل به آنها اشاره شد، به بیان چهار قضیه اصلی این قسمت می‌پردازیم که کران‌های بالا و پایین را برای $\alpha > 0$ بررسی می‌کند.

قضیه ۱.۲.۲ فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک گراف از مرتبه‌ی n، با اندازه m و میانگین درجه d است و $\alpha \in [-\frac{1}{2},0)$، آنگاه

$$R_\alpha(G) \leq md^{2\alpha},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G منتظم باشد.

برهان : به آسانی می‌توان مشاهده کرد که اگرگراف G منتظم باشد، تساوی برقرار است. زیرا در این حالت چون میانگین درجه‌ی آن d می‌باشد، درجه‌ی همه‌ی رئوس آن d می‌باشد. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} R_\alpha(G) &= \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha \\ &= \sum_{uv\in E(G)} [d.d]^\alpha \\ &= \sum_{uv\in E(G)} d^{2\alpha} \\ &= md^{2\alpha}. \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم که گراف G منتظم نباشد. در این قسمت از نامساوی کوشی—شواتز و نامساوی ینسن و تقعر تابع $f(x)=x^{1+2\alpha}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا تعریف نامساوی کوشی—شواتز را بیان و سپس به ادامه اثبات می‌پردازیم.

نامساوی کشی—شوارتز [1] : اگر $a_1,a_2,...,a_n$ و $b_1,b_2,...,b_n$ اعداد حقیقی و دلخواه باشند، آن‌گاه

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a_k=\lambda b_k$ به ازای هر $k=1,2,...,n$ برقرار باشد.

حال با استفاده از نامساوی کوشی—شواتز و نامساوی ینسن و تقعر تابع $f(x)=x^{1+2\alpha}$ داریم

[1] Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} R_\alpha(G) &= \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha \\ &\le \sum_{uv\in E(G)} [d(u)^{2\alpha} d(v)^{2\alpha}]/2 \\ &= \sum_{v\in V(G)} d(v)^{1+2\alpha}/2 \\ &\le nd^{1+2\alpha}/2 = md^{2\alpha}. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲.۲ فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک گراف از مرتبه‌ی n، و مینیمم درجه δ و $\alpha \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$، آنگاه

$$R_\alpha(G) \le n\delta^{1+2\alpha}/2,$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G منتظم باشد.

برهان : به آسانی می‌توان مشاهده کرد که اگرگراف G منتظم باشد، تساوی برقرار است. زیرا در این حالت چون مینیمم درجه‌ی آن δ می‌باشد، درجه‌ی همه‌ی رئوس آن δ می‌باشد. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} R_\alpha(G) &= \sum_{uv\in E(G)} [d(u)d(v)]^\alpha \\ &= \sum_{uv\in E(G)} [\delta.\delta]^\alpha \\ &= \frac{n\delta}{2}(\delta^{2\alpha}) \\ &= n\delta^{1+2\alpha}. \end{aligned}$$