

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

دنباله سوپول در محاسبات مونت کارلو

از

طاهره افتخاری

استاد راهنما

دکتر بهروز فتحی

مرداد ۱۳۸۹



دانشگاه گیلان

فرم ت. ۷

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی صور تجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد

با تأییدات الهی و با استعانت از حضرت ولی عصر "عج"، دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد
خواهر/برادر طاهره افتخاری در رشته: ریاضی گرایش: کاربردی
تحت عنوان: دنباله سوپول در محاسبات مونت کارلو

به ارزش ۶ واحد، رأس ساعت ۱۲:۳۰ روز: دوشنبه مورخ: ۸۹/۰۵/۱۸
در محل: سالن سمینار دانشکده: علوم پایه

دانشگاه گیلان تشکیل گردید. هیأت داوران به شرح زیر که قبلاً پایان نامه ایشان را مطالعه نموده اند، پس از استماع
دفاعیات و پرسشهای لازم در زمینه علمی و تحقیقاتی ایشان، نتیجه را به شرح زیر اعلام می دارند:

پایان نامه نامبرده با نمره و با امتیاز عالی، بسیار خوب، خوب، قابل قبول مورد تأیید قرار گرفت.

پایان نامه در وضع فعلی با تصحیحات جزئی مورد قبول است و نامبرده نمره نوبت دوم، و امتیاز عالی، بسیار
خوب، خوب، قابل قبول دریافت نمود.

پایان نامه و پروژه به شکل فعلی، مورد تأیید قرار نگرفت و پیشنهاد بند که...

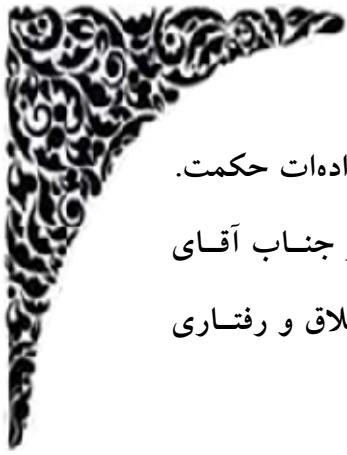
امضا	تخصص	مرتبه دانشگاهی	اعضاء هیأت داوران
			استاد(ان) راهنما:
	امار(الگوریتم های نصادفی)	دانشیار	۱- دکتر بهروز فتحی واجارگاه استاد(ان) مشاور:
			استادان یا محققان مدعو:
	نظریه احتمال	استادیار	۱- دکتر حسین صمیمی حق گذار
	ریاضی کاربردی	استادیار	۲- دکتر محمد رضا یاقوتی
نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی:			
سه نسخه اصل از صور تجلسه توسط نماینده تحصیلات تکمیلی تنظیم و به مدیر گروه تسلیم می شود. یک نسخه در گروه آموزشی، یک نسخه در آموزش دانشکده و یک نسخه در اداره فارغ التحصیلان دانشگاه نگهداری خواهد شد.			



تقدیم به پدر و مادر مهربانم

که یاریگر من در این راه، وجود پر مهرشان بود.

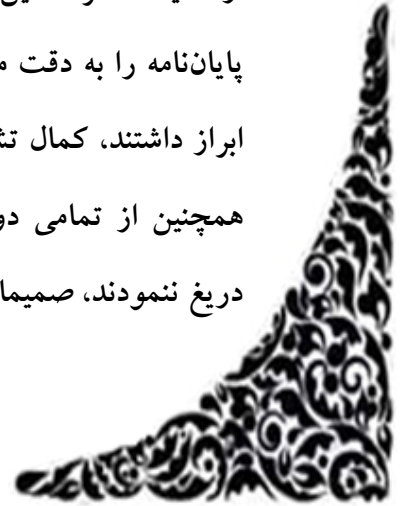




الهی به داده‌ات و نداده‌ات شکر، که در داده‌ات نعمت است و در نداده‌ات حکمت. مراتب تشکر و قدردانی خود را از همه اساتیدم به ویژه استاد عزیز جناب آقای دکتر بهروز فتحی که با راهنمایی‌های مفید و سودمندشان توأم با اخلاق و رفتاری نیکو، مرا در پیمودن این مسیر، بی‌منت یاری کردند، اعلام می‌دارم.

از آقایان دکتر حسین صمیمی حق‌گذار و دکتر محمدرضا یاقوتی که پیش‌نویس پایان‌نامه را به دقت مطالعه نمودند و نظرات ارزشمندی جهت تصحیح و بهبود آن ابراز داشتند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

همچنین از تمامی دوستانم که در آماده‌سازی این پایان‌نامه کمک خود را از من دریغ ننمودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.



دنباله سوپول در محاسبات مونت کارلو

طاهره افتخاری

در این پایان نامه به مطالعه و بررسی دنباله شبه تصادفی سوپول پرداخته و با ارتقاء آن تحت عنوان مولد شبه تصادفی اصلاح شده از آن برای تولید اعداد تصادفی در محاسبات مونت کارلو استفاده می‌کنیم. نهایتاً کارایی آن را با دنباله اسکرمبل (بی نظم شده) شده هالتون که یکی دیگر از دنباله های مشهور شبه تصادفی بهبود یافته است، جهت به دست آوردن جواب معادلات انتگرال خطی مقایسه می‌کنیم.

کلید واژه: شبه مونت کارلو، مولدهای شبه تصادفی، دنباله سوپول، اعداد جهت، معادلات انتگرال

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
ح	فهرست جدول ها
د	فهرست شکل ها
ر	چکیده فارسی
ز	چکیده انگلیسی
۱	مقدمه

فصل اول: مفاهیم پایه‌ای احتمال و فرآیند

۳	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ مفاهیم پایه‌ای احتمال
۴	۱-۲-۱ اصول احتمال
۴	۲-۲-۱ متغیر تصادفی
۵	۳-۲-۱ توابع چگالی احتمال گسسته و پیوسته
۷	۴-۲-۱ استقلال متغیرهای تصادفی
۷	۵-۲-۱ امید ریاضی و واریانس
۹	۶-۲-۱ متغیرهای تصادفی یکنواخت و نرمال
۱۱	۷-۲-۱ تابع احتمال توأم
۱۱	۸-۲-۱ توزیع حاشیه‌ای
۱۲	۹-۲-۱ تابع مولد گشتاور
۱۲	۱۰-۲-۱ تابع مولد احتمال
۱۳	۱۱-۲-۱ قانون ضعیف اعداد بزرگ
۱۴	۳-۱ همگرایی متغیرهای تصادفی
۱۴	۱-۳-۱ همگرایی تقریباً حتمی <i>a. S.</i>

۱۴ ۲-۳-۱ همگرایی در احتمال
۱۵ ۳-۳-۱ همگرایی در میانگین مرتبه I
۱۵ ۴-۳-۱ همگرایی در توزیع
۱۶ ۴-۱ مفاهیم پایه‌ای فرآیندهای تصادفی
۱۶ ۱-۴-۱ فرآیندهای مارکف
۱۸ ۵-۱ برآورد
۱۸ ۱-۵-۱ آماره (برآوردیاب)
۱۹ ۲-۵-۱ برآوردیاب مونت کارلو
۲۰ ۳-۵-۱ خواص برآوردیاب مونت کارلو
۲۱ ۶-۱ یای مانع جمع

فصل دوم: شبیه سازی

۲۳ ۱-۲ مقدمه
۲۳ ۲-۲ تولید اعداد تصادفی
۲۵ ۱-۲-۲ کاربرد اعداد تصادفی در تقریب عدد π
۲۶ ۳-۲ روش‌های شبیه سازی
۲۶ ۱-۳-۲ روش تبدیل وارون
۳۲ ۲-۳-۲ روش پذیرش و عدم پذیرش
۳۴ ۳-۲ شبیه سازی توزیع نرمال
۳۴ ۱-۳-۲ شبیه سازی توزیع نرمال استاندارد
۳۵ ۱-۳-۲ تولید متغیر تصادفی نرمال استاندارد با استفاده از روش پذیرش و عدم پذیرش
۳۷ ۲-۱-۳-۲ تولید متغیر تصادفی نرمال استاندارد با استفاده از روش Box-Muller
۳۹ ۴-۲ آزمون نیکویی برازش

۴۰ ۵-۲ روش‌های برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری

۴۱ ۱-۵-۲ روش گشتاوری (MME)

۴۲ ۲-۵-۲ روش ماکزیمم درست‌نمایی (MLE)

فصل سوم: مولدهای شبه تصادفی

۴۶ ۱-۳ مقدمه

۴۷ ۲-۳ مفهوم دیسکرپشنی

۴۹ ۱-۲-۳ دنباله سوپول

۵۱ ۲-۲-۳ دنباله سوپول آنتونوف-سالیو

۵۴ ۳-۲-۳ ایجاد چند جمله‌ای‌های اولیه

۵۵ ۴-۲-۳ روش انتخاب $m_{k,j}$ های اولیه

۵۸ ۵-۲-۳ مقایسه زمان‌های تولید دنباله سوپول و سوپول آنتونوف-سالیو

۶۱ ۳-۳ شبکه‌های دیجیتال و دنباله‌ها

۶۴ ۳-۳-۱ تصاویر دو بعدی

۶۶ ۲-۳-۳ خاصیت A

۶۷ ۳-۳-۳ کاهش فضای جستجو

۶۹ ۴-۳-۳ تعریف معیار جستجو

۷۱ ۵-۳-۳ انتخاب اعداد جهت جدید

۷۳ ۴-۳ اسکرمبل کردن دنباله سوپول

فصل چهارم: مولدهای شبه تصادفی و محاسبات مونت کارلو

۷۷ ۱-۴ مقدمه

۷۸ ۲-۴ ایده کلی روش مونت کارلو

۸۱ ۳-۴ انتگرالگیری به روش مونت کارلو

۸۶ ۴-۴ روش مونت کارلو برای معادلات انتگرال خطی نوع اول و دوم
۸۶ ۴-۴-۱ تبدیلات انتگرال و معادلات انتگرال نوع اول
۸۹ ۴-۴-۱-۱ الگوریتم برآورد ضرب داخلی $\langle h, K^n \psi \rangle$
۸۹ ۴-۴-۲ معادلات انتگرال نوع دوم
۹۱ ۴-۴-۲-۱ الگوریتم برآورد ضرب داخلی $\langle h, \sum_{m=0}^n K^m f \rangle$
۹۲ ۴-۵ نتایج عددی حل معادلات انتگرال خطی نوع دوم
۱۰۳ ۴-۶ نتیجه گیری
۱۰۳ ۴-۷ پیشنهاد برای ادامه کار
۱۰۵ منابع و ماخذ
۱۰۷ واژه نامه
۱۱۰ برنامه های کامپیوتری

فهرست جدول‌ها

۵	جدول (۱-۱). احتمال π پرتاب یک سکه همگن
۲۶	جدول (۱-۲). مقدارهای تخمینی عدد π
۲۸	جدول (۲-۲). تولید اعداد تصادفی با استفاده از (۱۰-۲)
۲۹	جدول (۳-۲). تولید اعداد تصادفی با استفاده از (۱۴-۲)
۵۱	جدول (۱-۳). کد گری برای $1 \leq n \leq 7$
۵۷	جدول (۲-۳). هشت نقطه اول از دنباله سوپول
۵۹	جدول (۳-۳). زمان‌های تولید دنباله اصلی سوپول و دنباله سوپول آنتونوف-سالیو
۶۱	جدول (۴-۳). سه بعد اول از دنباله هالتون برای $1 \leq n \leq 8$
۶۶	جدول (۵-۳). مقادیر $t(j, d; 12)$ برای نقاط سوپول با استفاده از اعداد جهت [11]
۶۹	جدول (۶-۳). فراوانی $t(j, 18; 12)$ برای نقاط سوپول از [11]
۷۰	جدول (۷-۳). فراوانی $T(18; m)$ برای نقاط سوپول از [11]
۷۲	جدول (۸-۳). مقادیر $t(j, d; 12)$ برای نقاط سوپول به دست آمده از $D^{(6)}(d; 1, 31)$
۷۳	جدول (۹-۳). ابعادی که مقادیر، اولین بار در آنها ظاهر می‌شوند
۸۵	جدول (۱-۴). محاسبه انتگرال به روش مونت کارلوی استاندارد (MC) و (QMC)
۹۳	جدول (۲-۴). جواب‌های تخمینی برای مثال (۲-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰
۹۳	جدول (۳-۴). خطاهای مطلق برای مثال (۲-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰
۹۴	جدول (۴-۴). جواب‌های تخمینی برای مثال (۳-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰
۹۵	جدول (۵-۴). خطاهای مطلق برای مثال (۳-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰
۹۶	جدول (۶-۴). جواب‌های تخمینی برای مثال (۴-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰
۹۶	جدول (۷-۴). خطاهای مطلق برای مثال (۴-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰
۹۸	جدول (۸-۴). جواب‌های تخمینی برای مثال (۵-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰ برای چگالی یکنواخت
۹۸	جدول (۹-۴). خطاهای مطلق برای مثال (۵-۴) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰ برای چگالی یکنواخت

- جدول (۴-۱۰). جواب های تخمینی برای مثال (۴-۵) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰ برای چگالی غیریکنواخت ۹۹
- جدول (۴-۱۱). خطاهای مطلق برای مثال (۴-۵) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰ برای چگالی غیر یکنواخت ۹۹
- جدول (۴-۱۲). جوابهای تخمینی برای مثال (۴-۶) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰ برای چگالی غیریکنواخت ۱۰۱
- جدول (۴-۱۳). خطاهای مطلق برای مثال (۴-۶) در نقاط ۵۰۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰۰ برای چگالی غیر یکنواخت ۱۰۱
- جدول (۴-۱۴). نتایج عددی برای مثال (۴-۲) در نقطه ۲۰۰۰۰۰ ۱۰۲
- جدول (۴-۱۵). نتایج عددی برای مثال (۴-۳) در نقطه ۲۰۰۰۰۰ ۱۰۳
- جدول (۴-۱۶). نتایج عددی برای مثال (۴-۴) در نقطه ۲۰۰۰۰۰ ۱۰۳
- جدول (۴-۱۷). نتایج عددی برای مثال (۴-۵) در نقطه ۲۰۰۰۰۰ با چگالی یکنواخت ۱۰۳


فهرست شکل ها

۳		شکل (۱-۱).....
۶		شکل (۲-۱).....
۸		شکل (۳-۱).....
۳۰		شکل (۱-۲). نمودار هیستوگرام برای توزیع نمایی با پارامتر ۵.....
۳۳		شکل (۲-۲). روش عدم پذیرش برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی f است.....
۵۴		شکل (۱-۳). تصویر دوبعدی از ۴۰۹۶ نقطه سوبول.....
۵۵		شکل (۲-۳). ۴۰۹۶ نقطه از دنباله سوبول، $m_{k,j}$ های اولیه در شکل سمت راست از مقاله براتلی و فاکس اخذ شده اند و در شکل سمت چپ مقدار یک دارند.....
۵۸		شکل (۳-۳). تصویرهای دوبعدی از دنباله‌ی سوبول در ابعاد مختلف.....
۵۹		شکل (۴-۳). منحنی زمان تولید دنباله سوبول و دنباله سوبول آنتونوف-سالیو.....
۶۵		شکل (۵-۳). ۴۰۹۶ نقطه از دنباله سوبول با اعداد جهت [11](t=2).....
۷۴		شکل (۶-۳). شکل راست ۴۰۹۶ نقطه اسکرمبل شده سوبول، شکل چپ ۴۰۹۶ نقطه دنباله سوبول اصلی اصلی با تمامی اعداد جهت اولیه یک.....
۷۵		شکل (۷-۳). : شکل راست ۴۰۹۶ نقطه اسکرمبل شده دنباله سوبول، شکل چپ ۴۰۹۶ نقطه از دنباله سوبول اصلی و اعداد جهت اولیه از مقاله براتلی و فاکس انتخاب شدند.....
۷۸		شکل (۱-۴).....
۸۰		شکل (۲-۴).....
۸۶		شکل (۳-۴). مقایسه روش MC و QMC
۹۴		شکل (۴-۴). شکل (۳-۴). نتایج عددی برای مثال (۲-۴) در ۲۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی.....

- شکل (۴-۵). نتایج عددی برای مثال (۴-۳) در ۲۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی ۹۵
- شکل (۴-۶). نتایج عددی برای مثال (۴-۴) در ۲۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی ۹۷
- شکل (۴-۷). نتایج عددی برای مثال (۴-۵) در ۲۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی یکنواخت ۹۹
- شکل (۴-۸). نتایج عددی برای مثال (۴-۵) در ۲۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی غیریکنواخت ۱۰۰
- شکل (۴-۹). نتایج عددی برای مثال (۴-۶) در ۲۰۰۰۰۰ نقطه تصادفی برای چگالی غیریکنواخت ۱۰۲

مقدمه

روش های مونت کارلو به روش هایی اطلاق می شود که براساس دنباله ای از اعداد تصادفی به بررسی مسائل می پردازد و متکی بر نمونه برداری مکرر به منظور دستیابی به نتایج محاسباتی هستند. رایج ترین استفاده از این روش ها در محاسبه انتگرال های چند بعدی یا انتگرال هایی با شرایط مرزی پیچیده است. در واقع در حل مسائل محاسباتی به دنبال الگوریتمی هستیم که در آن با کمترین هزینه محاسباتی زمان محاسبه را کاهش و سرعت همگرایی را افزایش دهیم. بنابراین، به کارگیری اعداد تصادفی کارا و موثر در محاسبات مونت کارلو باعث کارایی و اهمیت بیشتر الگوریتم مورد نظر می شود. از آنجا که تهیه اعداد حقیقی بسیار دشوار است به ندرت از آنها در کاربردهای روزانه استفاده می شود افزون بر این چون این اعداد قابل دوباره تولید شدن نیستند، آزمایش و اشکال زدایی برنامه ها بسیار دشوار است و از این رو در برنامه های شبیه سازی کامپیوتری و محاسبات از اعداد شبه تصادفی که براساس یک سری محاسبات ریاضی به دست می آیند به جای اعداد تصادفی حقیقی بهره می بریم و برای تولید آنها از مولدهایی استفاده می کنیم که اصطلاحاً به آنها دنباله های شبه تصادفی گوئیم. تولید اعداد شبه تصادفی با سرعت و کیفیت بالا همچنین صرف هزینه کمتر اهمیت بسزایی دارد. در این پایان نامه در فصل اول به بیان برخی مفاهیم که در فصول بعدی از آنها استفاده می کنیم، پرداخته ایم. مطالب فصل دوم در زمینه شبیه سازی متغیرهای تصادفی بر پایه توزیع یکنواخت است. در فصل سوم به مطالعه و بهبود دنباله شبه تصادفی سوبول که یکی از مهمترین دنباله های شبه تصادفی است می پردازیم و در فصل چهارم از دنباله شبه تصادفی سوبول بهبود یافته در حل مسائل مربوط به انتگرال ها و به خصوص معادلات انتگرال خطی نوع دوم استفاده می شود و آن را با دنباله هالتون اسکرمبل شده و تابع کتابخانه ای Rand مقایسه کرده، به این نتیجه می رسیم که سرعت همگرایی این دنباله نسبت به سایر مولدهای ذکر شده بیشتر است.



فصل اول
مفاهیم پایه ای
آمار و احتمال

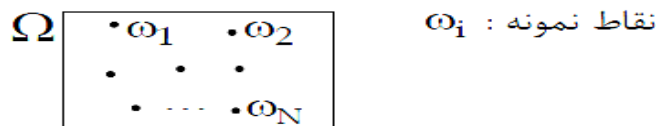
۱-۱ مقدمه

فرآیندهای تصادفی مجموعه مهمی از مباحث آماری است که نه تنها جای خود را در علوم پایه باز کرده است بلکه کاربردهای فراوانی در زمینه های مختلف علمی و صنعتی برای آنها وجود دارد. اکثر پدیده های طبیعت تحت فعل و انفعالات احتمالی قرار دارند و این زمینه را برای استفاده از الگوهای فرآیندهای تصادفی در مطالعه ی آنها فراهم می سازد.

کلمه ی احتمال ابتدا در قرن چهارم قبل از میلاد در نوشته های فیلسوف یونانی ((ارسطو)) به کار رفته است ولی محققاً او را نمی توان پایه گذار این علم دانست. پایه و اساس نظریه احتمال در واقع در قرن هفدهم آغاز گردید و این زمانی است که سؤالاتی توسط قمارباز مشهور فرانسوی به نام شوالیه دومر^۱ پیش آمد او با دو تن از ریاضیدانان مشهور فرانسوی آن روز پاسکال^۲ و فرما^۳ آشنا بود و سؤالات خود را با آنان در میان گذاشت. این موضوع مکاتبات مشهوری بین دو ریاضیدان را موجب گردید که مربوط به کاربرد درست ریاضیات در محاسبه فراوانی های نسبی وقایع بود و آغازگر علم احتمال به صورتی که اکنون می شناسیم، می باشد. سرانجام کولموگوروف^۴ ریاضی دان مشهور و معاصر روسی با وضع اصول سه گانه خود به احتمالات جنبه ای کاملاً ریاضی بخشید و آغازگر پیشرفت های شایان توجهی شد که از آن به بعد حاصل گردید و علم نظریه احتمال را به نظام گسترده کنونی تبدیل کرد. هم اکنون نظریه احتمال را می توان یکی از پایه های پیشرفت بسیاری از علوم امروزی از قبیل آمار، زمین شناسی، مکانیک، فیزیک، زیست شناسی، علوم انسانی و اقتصادی دانست.

۲-۱ مفاهیم پایه ای احتمال

تعریف (۱-۱): آزمایش تصادفی، آزمایشی است که برآمد آن از قبل معلوم نیست. مجموعه تمام برآمدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گوئیم و با Ω نشان می دهیم.



شکل (۱-۱)

به عنوان مثال، اگر سکه ای را آنقدر پرتاب کنیم تا اولین شیر بیاید، فضای نمونه ای آن به صورت زیر است

^۱ Chevalie De Mere

^۲ Pascal

^۳ Fermat

^۴ Kolmogrov

$$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \dots\}$$

۱-۲-۱ اصول احتمال

تعریف (۱-۲): دسته خاصی از زیر مجموعه های Ω که آن را با F نشان می دهیم، یک σ -میدان گوییم هر گاه

$$(۱) \phi \in F$$

$$(۲) \text{ اگر } A \in F \text{، آنگاه } A' \in F$$

$$(۳) \text{ اگر } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F \text{ آنگاه } \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$$

$A \in F$ یک پیشامد است اگر و تنها اگر $A \in F$.

تعریف (۱-۳): تابع احتمال $p: F \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع زیر مجموعه ای نامنفی از F به \mathbb{R} می باشد که برای هر پیشامد A از

فضای نمونه ای Ω به صورت $p(A)$ نمایش داده می شود و در سه اصل موضوع زیر صدق می کند

$$(۱) \text{ برای هر } A \in F, p(A) \geq 0$$

$$(۲) p(\Omega) = 1$$

$$(۳) \text{ اگر } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ دنباله ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه } p(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A_i)$$

صورت سه تایی (Ω, F, p) را فضای احتمال گویند و به (Ω, F) فضای اندازه پذیر گفته می شود.

۱-۲-۲ متغیر تصادفی

تعریف (۱-۴): متغیر تصادفی کمیته ای است که در رابطه با یک آزمایش تصادفی اندازه گیری می شود. اگر (Ω, F, p) یک

فضای احتمال و نتیجه آزمایش متناظر با نقطه ای $w \in \Omega$ باشد، یک روند اندازه گیری انجام می شود تا عدد $X(w)$ که در آن

X تابعی از فضای نمونه Ω بر اعداد حقیقی (اعداد حقیقی گسترش یافته) است، به دست آید. در واقع در به دست آوردن یک

متغیر تصادفی X که روی یک فضای احتمال تعریف شده است، می خواهیم احتمال اینکه مقدار X به B (مجموعه ای از

اعداد حقیقی است) متعلق باشد یعنی $p\{w: X(w) \in B\}$ را به دست آوریم و برای اینکه این مقدار معنی دار باشد باید

$\{w: X(w) \in B\}$ یک پیشامد باشد. متغیر تصادفی X هر تابع اندازه پذیر از F به فضای اندازه پذیر $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

است. $B(\mathbb{R})$ کوچکترین σ -میدان حاصل از زیر مجموعه های \mathbb{R} است.

با تعریف متغیر تصادفی می توان احتمال را از پیشامدها به \mathbb{R} منتقل نمود. این تعریف امکان بررسی و مزایای فراوانی را با توجه به خواص مفیدی که در \mathbb{R} با توجه به دو عمل جمع و ضرب وجود دارد، برقرار می کند و طیف وسیعی از پیشامدها را مطرح می سازد.

متغیر تصادفی X گسسته است اگر برد آن شمارا باشد، در غیر این صورت متغیر تصادفی را پیوسته گویند. یک متغیر تصادفی گسسته، هر یک از مقادیر خود را با احتمالی معین اختیار می کند. به طور مثال اگر یک سکه همگن ۴ بار پرتاب شود عناصر فضای نمونه و مقادیر متناظر \mathcal{X} از متغیر تصادفی X را که نشان دهنده ی تعداد کل شیرهاست، می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\Omega = \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

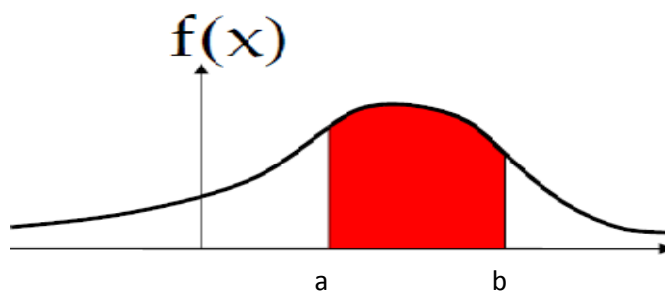
جدول (۱-۱). احتمال ۴ پرتاب یک سکه همگن

۱-۲-۳ نواع چگالی احتمال گسسته و پیوسته

تعریف (۱-۵): اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هر مقدار x در برد X با $f(x) = p(X = x)$ داده می شود، تابع چگالی احتمال گسسته X نامیده می شود.

تعریف (۱-۶): تابعی با مقادیر $f(x)$ ، که روی مجموعه ی تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X خوانده می شود اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b با $a \leq b$

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



شکل (۲-۱)

تابع احتمال $f(x)$ دارای دو خاصیت زیر است

$$(۱) \text{ برای هر } x \in \Omega, f(x) \geq 0.$$

(۲) اگر X پیوسته باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ و اگر X گسسته باشد، $\sum_x f(x) = 1$ که به صورت واحد با $\int dF(x) = 1$ نشان

می‌دهیم، که در آن F تابع توزیع X می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(x) = p(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

تابع توزیع دارای خواص زیر است

$$(۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

$$(۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

(۳) F از راست پیوسته است،

(۴) F تابعی غیر نزولی بر حسب x است.

قضیه (۱-۱): اگر $f(x)$ تابع چگالی و $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X باشد آنگاه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{dF}{dx} & \text{اگر مشتق موجود باشد} \\ c & \text{اگر مشتق موجود نباشد} \end{cases}$$

که $c \geq 0$ ، غالباً c را صفر می‌گیرند.

و اگر X گسسته باشد آنگاه

$$p(X = x) = F(x) - F(x^-)$$

۴-۲-۱ استقلال متغیرهای تصادفی