
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

دنباله سوبول در محاسبات مونت کارلو

از

طاهره افتخاری

استاد راهنما

دکتر بهروز فتحی

مرداد ۱۳۸۹

فرم ت.ت ۷

شماره:
تاریخ:

دانشگاه گیلان

باسمه تعالی
صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد

با تأییدات الهی و با استعانت از حضرت ولی عصر "عج"، دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد
خواهر/برادر **طاهره افتخاری** در رشته: **ریاضی** گرایش : **کاربردی**
تحت عنوان : **دنباله سوبول در محاسبات مونت کارلو**

به ارزش ۶ واحد، رأس ساعت : **۱۲:۳۰** روز : **دوشنبه** مورخ: **۸۹/۰۵/۱۸**
در محل : **سالن سمینار** دانشکده: **علوم پایه**

دانشگاه گیلان تشکیل گردید. هیأت داوران به شرح زیر که قبلاً پایان نامه ایشان را مطالعه نموده اند، پس از استماع دفاعیات و پرسشهای لازم در زمینه علمی و تحقیقاتی ایشان، نتیجه را به شرح زیر اعلام می دارند:

☐ پایان نامه نامبرده با نمره و با امتیاز عالی☐، بسیار خوب☐، خوب☐، قابل قبول☐ مورد تأیید قرار گرفت.

☑ پایان نامه در وضع فعلی با تصحیحات جزیی مورد قبول است و نامبرده نمره نوزده ۱۹/– و امتیاز عالی☑، بسیار خوب☐، خوب☐، قابل قبول☐ دریافت نمود.

☐ پایان نامه و پروژه به شکل فعلی، مورد تأیید قرار نگرفت و پیشنهاد شد که...

اعضاء هیأت داوران	مرتبه دانشگاهی	تخصص	امضا
استاد(ان) راهنما:			
۱- دکتر بهروز فتحی واجارگاه	دانشیار	آمار(الگوریتم های تصادفی)	
استاد(ان)مشاور:			
استادان یا محققان مدعو:			
۱ - دکترحسین صمیمی حق گذار	استادیار	نظریه احتمال	
۲- دکتر محمد رضا یاقوتی	استادیار	ریاضی کاربردی	

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی:

- سه نسخه اصل از صورتجلسه توسط نماینده تحصیلات تکمیلی تنظیم و به مدیر گروه تسلیم می شود.
- یک نسخه در گروه آموزشی، یک نسخه در آموزش دانشکده و یک نسخه در اداره فارغ التحصیلان دانشگاه نگهداری خواهد شد.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

که یاریگر من در این راه، وجود پر مهرشان بود.

الهی به داده‌ات و نداده‌ات شکر، که در داده‌ات نعمت است و در نداده‌ات حکمت.
مراتب تشکر و قدردانی خود را از همه اساتیدم به ویژه استاد عزیـز جنـاب آقـای دکتر بهروز فتحی که با راهنمایی‌های مفید و سودمندشان توأم با اخلاق و رفتـاری نیکو، مرا در پیمودن این مسیر، بی‌منت یاری کردند، اعلام می‌دارم.
از آقایان دکتر حسین صمیمی حق‌گذار و دکتر محمدرضا یاقوتی کـه پـیش‌نـویس پایان‌نامه را به دقت مطالعه نمودند و نظرات ارزشمندی جهت تصحیح و بهبـود آن ابراز داشتند، کمال تشکر و امتنان را دارم.
همچنین از تمامی دوستانم که در آماده‌سازی این پایان‌نامه کمک خود را از من دریغ ننمودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

دنباله سوبول در محاسبات مونت کارلو

طاهره افتخاری

در این پایان نامه به مطالعه و بررسی دنباله شبه تصادفی سوبول پرداخته و با ارتقاء آن تحت عنوان مولد شبه تصادفی اصلاح شده از آن برای تولید اعداد تصادفی در محاسبات مونت کارلو استفاده می‌کنیم. نهایتاً کارایی آن را با دنباله اسکرمبل(بی نظم شده) شده هالتون که یکی دیگر از دنباله های مشهور شبه تصادفی بهبود یافته است، جهت به دست آوردن جواب معادلات انتگرال خطی مقایسه می‌کنیم.

کلید واژه: شبه مونت کارلو، مولدهای شبه تصادفی، دنباله سوبول، اعداد جهت، معادلات انتگرال

فهرست مطالب

فصل دوم: شبیه سازی

فصل سوم: مولدهای شبه تصادفی

فصل چهارم: مولدهای شبه تصادفی و محاسبات مونت کارلو

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل ها

مقدمه

روش های مونت کارلو به روش هایی اطلاق می شود که براساس دنباله‌ای از اعداد تصادفی به بررسی مسائل می‌پردازد و متکی بر نمونه برداری مکرر به منظور دستیابی به نتایج محاسباتی هستند. رایج ترین استفاده از این روش ها در محاسبه انتگرال های چند بعدی یا انتگرال هایی با شرایط مرزی پیچیده است. در واقع در حل مسائل محاسباتی به دنبال الگوریتمی هستیم که در آن با کمترین هزینه محاسباتی زمان محاسبه را کاهش و سرعت همگرایی را افزایش دهیم. بنابراین، به کارگیری اعداد تصادفی کارا و موثر در محاسبات مونت کارلو باعث کارایی و اهمیت بیشتر الگوریتم مورد نظر می‌شود. از آنجا که تهیه اعداد حقیقی بسیار دشوار است به ندرت از آنها در کاربردهای روزانه استفاده می شود افزون بر این چون این اعداد قابل دوباره تولید شدن نیستند، آزمایش و اشکال زدایی برنامه ها بسیار دشوار است و از این رو در برنامه های شبیه سازی کامپیوتری و محاسبات از اعداد شبه تصادفی که براساس یک سری محاسبات ریاضی به دست می‌آیند به جای اعداد تصادفی حقیقی بهره می بریم و برای تولید آنها از مولدهایی استفاده می کنیم که اصطلاحاً به آنها دنباله های شبه تصادفی گوییم. تولید اعداد شبه تصادفی با سرعت و کیفیت بالا همچنین صرف هزینه کمتر اهمیت بسزایی دارد. در این پایان نامه در فصل اول به بیان برخی مفاهیم که در فصول بعدی از آنها استفاده می‌کنیم، پرداخته ایم. مطالب فصل دوم در زمینه شبیه سازی متغیرهای تصادفی بر پایه توزیع یکنواخت است. در فصل سوم به مطالعه و بهبود دنباله شبه تصادفی سوبول که یکی از مهمترین دنباله های شبه تصادفی است می‌پردازیم و در فصل چهارم از دنباله شبه تصادفی سوبول بهبود یافته در حل مسائل مربوط به انتگرال ها و به خصوص معادلات انتگرال خطی نوع دوم استفاده می‌شود و آن را با دنباله هالتون اسکرمبل شده و تابع کتابخانه‌ای Rand مقایسه کرده، به این نتیجه می‌رسیم که سرعت همگرایی این دنباله نسبت به سایر مولدهای ذکر شده بیشتر است.

فصل اول
مفاهیم پایه ای
آمار و احتمال

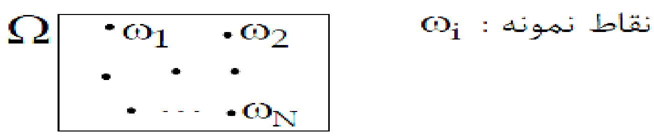
۱–۱مقدمه

فرآیندهای تصادفی مجموعه مهمی از مباحث آماری است که نه تنها جای خود را در علوم پایه باز کرده است بلکه کاربردهای فراوانی در زمینه های مختلف علمی و صنعتی برای آنها وجود دارد. اکثر پدیده های طبیعت تحت فعل و انفعالات احتمالی قرار دارند و این زمینه را برای استفاده از الگوهای فرآیندهای تصادفی در مطالعه ی آنها فراهم می‌سازد.

کلمه ی احتمال ابتدا در قرن چهارم قبل از میلاد در نوشته های فیلسوف یونانی ((ارسطو)) به کار رفته است ولی محققاً او را نمی‌توان پایه گذار این علم دانست. پایه و اساس نظریه احتمال در واقع در قرن هفدهم آغاز گردید و این زمانی است که سؤالاتی توسط قمارباز مشهور فرانسوی به نام شوالیه دومر[۱] پیش آمد او با دو تن از ریاضیدانان مشهور فرانسوی آن روز پاسکال[۲] و فرما[۳] آشنا بود و سؤالات خود را با آنان در میان گذاشت. این موضوع مکاتبات مشهوری بین دو ریاضیدان را موجب گردید که مربوط به کاربرد درست ریاضیات در محاسبه فراوانی های نسبی وقایع بود و آغازگر علم احتمال به صورتی که اکنون می‌شناسیم، می‌باشد. سرانجام کولموگوروف[۴] ریاضی دان مشهور و معاصر روسی با وضع اصول سه گانه خود به احتمالات جنبه ای کاملاً ریاضی بخشید و آغازگر پیشرفت های شایان توجهی شد که از آن به بعد حاصل گردید و علم نظریه احتمال را به نظام گسترده کنونی تبدیل کرد. هم اکنون نظریه احتمال را می توان یکی از پایه های پیشرفت بسیاری از علوم امروزی از قبیل آمار، زمین شناسی، مکانیک، فیزیک، زیست شناسی، علوم انسانی و اقتصادی دانست.

۱–۲ مفاهیم پایه‌ای احتمال

تعریف (۱-۱): آزمایش تصادفی، آزمایشی است که برآمد آن از قبل معلوم نیست. مجموعه تمام برآمدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گوییم و با Ω نشان می‌دهیم.



شکل (۱-۱)

به عنوان مثال، اگر سکه ای را آنقدر پرتاب کنیم تا اولین شیر بیاید، فضای نمونه ای آن به صورت زیر است

۱Chevalie De Mere
۲Pascal
۳ Fermat
۴ Kolmogrov

$$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \dots\}$$

۱–۲–۱ اصول احتمال

تعریف (۱–۲): دسته خاصی از زیر مجموعه های Ω که آن را با F نشان می‌دهیم، یک σ- میدان گوییم هر گاه

۱) $\phi \in F$،

۲) اگر $A \in F$، آنگاه $A' \in F$ ،

۳) اگر $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$.

A یک پیشامد است اگر وتنها اگر $A \in F$.

تعریف (۱–۳): تابع احتمال $p: F \to \mathbb{R}$، یک تابع زیر مجموعه‌ای نامنفی از F به $\mathbb{R}$ می‌باشد که برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ای Ω به صورت $p(\mathrm{A})$ نمایش داده می‌شود و در سه اصل موضوع زیر صدق می‌کند

۱)برای هر $A \in F$، $p(A) \geq 0$،

۲) $p(\Omega) = 1$،

۳) اگر $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه $p(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(A_i)$ در این صورت سه تایی (Ω, F, p) را فضای احتمال گویند و به (Ω, F) فضای اندازه پذیر گفته می‌شود.

۱–۲–۲ متغیر تصادفی

تعریف (۱–٤): متغیر تصادفی کمیتی است که در رابطه با یک آزمایش تصادفی اندازه گیری می‌شود. اگر (Ω, F, p) یک فضای احتمال و نتیجه آزمایش متناظر با نقطه‌ی $w \in \Omega$ باشد، یک روند اندازه‌گیری انجام می‌شود تا عدد $X(w)$ که در آن X تابعی از فضای نمونه Ω بر اعداد حقیقی (اعداد حقیقی گسترش یافته) است، به دست آید. در واقع در به دست آوردن یک متغیر تصادفی X که روی یک فضای احتمال تعریف شده است، می‌خواهیم احتمال اینکه مقدار X به B (B مجموعه ای از اعداد حقیقی است) متعلق باشد یعنی $p\{w: X(w) \in B\}$ را به دست آوریم و برای اینکه این مقدار معنی دار باشد باید $\{w: X(w) \in B\}$ یک پیشامد باشد. متغیر تصادفی X هر تابع اندازه پذیر از F به فضای اندازه پذیر $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ است. $B(\mathbb{R})$ کوچکترین σ- میدان حاصل از زیر مجموعه های $\mathbb{R}$ است.

با تعریف متغیر تصادفی می‌توان احتمال را از پیشامدها را به $\mathbb{R}$ منتقل نمود. این تعریف امکان بررسی و مزایای فراوانی را با توجه به خواص مفیدی که در $\mathbb{R}$ با توجه به دو عمل جمع و ضرب وجود دارد، برقرار می‌کند و طیف وسیعی از پیشامدها را مطرح می‌سازد.

متغیر تصادفی X گسسته است اگر برد آن شمارا باشد، در غیر این صورت متغیر تصادفی را پیوسته گویند. یک متغیر تصادفی گسسته، هر یک از مقادیر خود را با احتمالی معین اختیار می‌کند. به طور مثال اگر یک سکه همگن ٤ بار پرتاب شود عناصر فضای نمونه و مقادیر متناظر x از متغیر تصادفی X را که نشان دهنده ی تعداد کل شیرهاست، می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\Omega=\{HHHH,\ HHHT,\ HHTH,\ HTHH,\ THHH,\ HHTT,HTHT,HTTH,THHT,THTH,TTHH,HTTT,THTT,TTHT,TTTH,TTTT\ \}$$

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

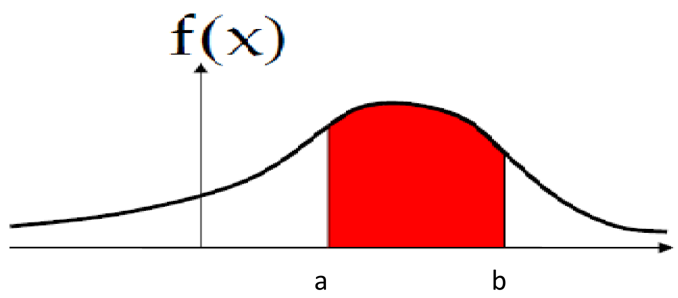
جدول (۱–۱). احتمال ٤ پرتاب یک سکه همگن

۱–۲–۳ توابع چگالی احتمال گسسته و پیوسته

تعریف (۱–۵): اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هر مقدار x در برد X با $f(x)=p(X=x)$ داده می‌شود، تابع چگالی احتمال گسسته X نامیده می‌شود.

تعریف (۱–٦): تابعی با مقادیر $f(x)$، که روی مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X خوانده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b با $a \le b$

$$p(a \le X \le b)=\int_a^b f(x)\,dx$$



شکل (۱-۲)

تابع احتمال $f(x)$دارای دو خاصیت زیر است

۱)برای هر $x \in \Omega$، $f(x) \geq 0$.

۲)اگر X پیوسته باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ و اگر X گسسته باشد، $\sum_{x} f(x) = 1$ که به صورت واحد با $\int dF(x) = 1$ نشان می‌دهیم، که در آن F تابع توزیع X می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(x) = p(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

تابع توزیع دارای خواص زیر است

۱) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ،

۲) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ،

۳) F از راست پیوسته است،

٤) F تابعی غیر نزولی بر حسب x است.

قضیه (۱-۱): اگر $f(x)$ تابع چگالی و $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X باشد آنگاه

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} & \text{اگر مشتق موجود باشد} \\ c & \text{اگر مشتق موجود نباشد} \end{cases}$$

که $c \geq 0$، غالباً c را صفر می گیرند.

و اگر X گسسته باشد آنگاه

$$p(X = x) = F(x) - F(x^{-})$$

۱-۲-۴ استقلال متغیرهای تصادفی