بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

رادیکال مشبکه های مانده و BL - جبرها

استاد راهنما:

دکتر آرشام برومندسعید

استاد مشاور :

دکتر لیدا ترک زاده

مالف :

ندا محتشم نیا

شهریور1389

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

گروه ریاضی

دانشکده ریاضی ورایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: ندا محتشم نیا

استاد راهنما: دکتر آرشام برومند سعید

استاد مشاور: دکتر لیدا ترک زاده

داور۱: دکتر اسفندیار اسلامی

داور ۲: دکتر عباس حسنخانی

معاونت پژوهشی وتحصیلات تکمیلی دانشکده: سید ناصر حسینی

تقدیم به:

پدر و مادرم که با تمام وجودمرا یاری کردند

و

همه کسانی که

دوستشان دارم

تقدیر و تشکر:

سپاس خدای را که در گذر از تمام مراحل و مشکلات زندگی یار و یاور ماست وبهترین هدایتگر اوست. در اینجا قبل از هر کس از استاد دلسوز، سخت کوش و پرتلاشم جناب آقای دکتر آرشام برومند سعید که افتخار شاگردی ایشان را دارم و طی انجام این مجموعه با راهنمایی های روشن گرانانه خود مدد رسان اینجانب در حل بسیاری از مشکلات بوده اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین بر خود لازم می دانم از کمک ها و زحمات دکتر لیدا ترک زاده که مشاوره این تحقیق را به عهده گرفته اند و از هیچ گونه کمکی به این جانب دریغ نورزیده اند تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، از قطب جبر خطی، بهینه سازی به واسطه کمک مالی تقدیر و تشکر می کنم.

.

چکیده:

در این پایان نامه به معرفی عناصر چگال و رادیکال مشبکه مانده و مرکز بولی مشبکه مانده و مشبکه مانده ساده،موضعی ، نیم موضعی و شبه موضعی می پردازیم و با استفاده از قضایا رابطه بین آنها را بررسی می کنیم. فیلترهای اولیه و شبه اولیه را در مشبکه مانده تعریف می کنیم و ثابت می کنیم هر فیلتر اولیه از مشبکه مانده شبه اولیه است. از طرفی رادیکال روی یک BL ـ جبر و رادیکال روی یک فیلتر در BL ـ جبر را معرفی کرده و با استفاده از قضایا به بررسی خواص آنها می پردازیم و ثابت می کنیم برای هر فیلتر سرهF از BL ـ جبرA ,

$$Rad(F) = \{a \in A : \neg(a^n) \to a \in F, for\ all\ n \in IN^*\}$$

ثابت می کنیم که هر BL ـ جبر دارای مرکز بولی افزایشی است و بعلاوه مشبکه مانده گلیونکو را تعریف کرده و ثابت می کنیم هر مشبکه مانده گلیونکو که در شرط:

$$(\neg a \to \neg b) \to \neg b = (\neg b \to \neg a) \to \neg a$$

صدق می کند دارای مرکز بولی افزایشی است و از طرفی ثابت می کنیم هر BL ـ جبر یک مشبکه مانده گلیونکو است اما عکس آن همواره برقرار نیست. در انتها BL ـ جبرخاصی را معرفی کرده و خواص آن را بررسی می کنیم .

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

In this dissertation we introduce the dense elements and the radical of a residuated lattice. *R*esiduated lattice with lifting Boolean center, simple, local, semilocal and quasi-local residuated lattices are introduced. We also consider some relations between these definitions by theorems and lemmas. We define quasi-primary filters and primary filters of a residuated lattice and we state and prove that any primary filter of a residuated lattice is quasi-primary. In addition, we introduce the radical of a BL - algebra and the radical of a filter in BL - algebras and prove some theorems which determine the relationships between these notions and prove that for every proper filter F of BL - algebra A, we have :

$$Rad(F) = \{a \in A | \neg(a^n) \to a \in F, for\ all\ n \in IN\},$$

We show that BL-algebras have lifting Boolean center; moreover, Glivenko residuated lattices which fulfill the equation:

$$(\neg a \to \neg b) \to \neg b = (\neg a \to \neg b) \to \neg b,$$

Have lifting Boolean center. We show every BL - algebra is Glivenko residuated lattice but the converse of this notation is not correct. Fainally, we introduce and study a special kind of BL - algebra.

Shahid Bahonar University of Kerman

Faculty of Mathematics and Computer

Department of Mathematics

Radical of Residuated Lattices and BL - algebras

Supervisor:

Dr Arsham Borumand Saeid

Advisor:

Dr Lida Torkzade

Prepared by:

Neda Mohtasham nia

A Thesis Submitted as a Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Mathematics (M.Sc)

August 2010

فصل اول

پیش نیازها و مقدمات

فصل اول تحت عنوان پیش نیازها و مقدمات امده است و به بیان تعریف ها و خواص موجود در مشبکه مانده و BL ـ جبرها می پردازیم و از آنها برای معرفی تعریف های مجموعه های مختلف مشبکه مانده وBL ـ جبر، تعریف عنصر منظم، مرکز بولی و طیف های توپولوژیکی استفاده می کنیم.

۱-۱:مشبکه مانده

تعریف ۱-۱-۱[۱۸] : یک مجموعه غیر تهی با دو عمل دوتایی ∨و∧ را یک مشبکه گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(A_1) $x \vee y = y \vee x$,
$x \wedge y = y \wedge x$,
(A_2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
(A_3) $x \vee x = x$,
$x \wedge x = x$,
(A_4) $x = x \vee (x \wedge y)$,
$x = x \wedge (x \vee y)$.

تعریف ۱-۱-۲[۱۸] : یک دستگاه جبری $(A,\vee,\wedge,0,1)$ از نوع$(2,2,0,0)$ را یک مشبکه کراندارگوئیم هرگاه:

(۱)$(A,\vee$ و $\wedge)$ یک مشبکه باشد ،

(۲) برای هر $x \in A$، $x \wedge 0 = 0\ ,\ x \vee 1 = 1$.

تعریف ۱-۱-۳[۲۳]: به دستگاه جبری $(A,\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,0,1)$ از نوع $(2,2,2,2,0,0)$ مشبکه مانده گوییم هر گاه ≤ یک ترتیب روی A باشد و شرایط زیر روی A برقرار باشند:

(LR_1) $(A,\vee,\wedge,0,1)$ مشبکه کراندار باشد،

(LR_2) $(A,\odot,1)$ تکگون جا بجایی باشد،

(LR_3) $\odot, \rightarrow$ جفت الحاقی باشند،یعنی:

$$(\forall\, a,b,c \in A) \quad c \leq a \rightarrow b \;\text{ اگر تنها و اگر }\; a\odot c \leq b$$

مثال ۱–۱–۳: اگر $A = \{0, a, b, c, 1\}$ و $0 < a, b < c < 1$ باشند.

$(A,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ یک مشبکه مانده است که عملگرهای $\odot,\rightarrow$ روی A به صورت زیر تعریف می شوند:

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	B
c	0	a	b	c	C
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

گزاره ۱–۱–۴[۲۳] : اگر A مشبکه مانده باشد، آنگاه برای هر $a \in A$، داریم:

(1) $\neg a = a \rightarrow 0$،

(2) $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b)\wedge(b \rightarrow a)$،

(3) $a^n = \underbrace{a\odot \ldots . \odot a}_{n \text{ تا}}$ که $n \in IN^*$, $a^0 = 1$،

(4)اگر $a \in A$ را در نظر بگیریم مرتبه a که با$ord(a)$ نشان می دهیم، کوچکترین عدد طبیعی $n \in IN^*$، است که $a^n = 0$. اگر برای عنصر$a \in A$، چنین عدد طبیعی وجود نداشته باشد،آنگاه $ord(a) = \infty$.

لم۱-۱-۵[۲۴] : اگر A مشبکه مانده باشد و $a, b, c, d \in A$، آنگاه عبارت های زیر همواره برقرار است :

(1) $a \leq b$ اگروتنهااگر $a \to b = 1$ ،

(2) $a \leq \neg\neg a$،

(3) $\neg\neg\neg a = a$ ،

(4) $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$ ،

(5) اگر $a \leq b$, $c \leq d$ آنگاه $a \odot c \leq b \odot d$،

(6) $a \leq b$ ایجاب می کند $c \to a \leq c \to b$ و $b \to c \leq a \to c$ ،

(7) $a \odot b \leq a \wedge b$ ، $a \odot 0 = 0$, $0 \to a = 1$ ،

(8) $a \odot (b \vee c) = (a \odot b) \vee (a \odot c)$, $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$ ،

(9) $a \to b \leq (c \to a) \to (c \to b)$ ،

(10) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

تعریف ۱-۱-۶[۲۳] : به عنصر a از مشبکه مانده A منظم گوییم، هر گاه $\neg\neg a = a$.

مجموعه همه عناصر منظم مشبکه مانده A را با $Reg(A)$ نمایش می دهیم،

$Reg(A) = \{a \in A | \neg\neg a = a\}$.

تعریف ۱-۱-۷[۲۳] : به مشبکه مانده A برگشت پذیر گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in A$ ، $\neg\neg a = a$ یعنی $Reg(A) = A$.

۱-۲ : BL ـ جبرها و MV ـ جبرها

تعریف ۱-۲-۱[۲۳] : مشبکه مانده A که در معادله پیش خطی زیر صدق کند را MTL ـ جبر گوییم.

$$(MTL) \quad (\forall a, b \in A)\ (a \to b) \vee (b \to a) = 1\,.$$

تعریف ۱-۲-۲[۲۳] : مشبکه MTL ـ جبر را IMTL ـ جبر گوییم، هرگاه برگشت پذیر باشد.

تعریف ۱-۲-۳[۲۱] : به مشبکه MTL، A، BL ـ جبر گوییم، اگر در معادله تقسیم پذیری زیر صدق کند:

$$(BL) \quad (\forall a, b \in A)\ a \wedge b = a \odot (a \to b)\,.$$

مثال ۱-۲-۴ : فرض کنید $A = \{0, a, b, 1\}$ باشد اعمال $\odot$ و $\to$ را روی A به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\longrightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	1	1

آنگاه واضح است که $(A, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ یک BL ـ جبر است .

مثال ۱-۲-۵ : در مثال ۱-۱-۳ ، A یک مشبکه مانده است که BL ـ جبر نیست.

لم۱-۲-۶[۱۸و۱۱و۱۳] : فرض کنید A یک BL ـ جبر دلخواه باشد . روابط زیر برای تمام $x,y,z \in A$های برقرار است:

(1) $x\odot(x \to y) \le y$ ،

(2) $x \le y \to (x\odot y)$ ،

(3) $x \to y = 1$ اگروتنهااگر $x \le y$ ،

(4) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$،

(5) اگر $x \le y$ ، آنگاه داریم $z \to x \le z \to y, y \to z \le x \to z$،

(6) $y \le (y \to x) \to x$،

(7) $y \to x \le (z \to y) \to (z \to x)$،

(8) $x \to y \le (y \to z) \to (x \to z)$ ،

(9) $x \vee y = [\,(x \to y) \to y\,] \wedge [\,(y \to x) \to x\,]$ ،

(10) $x\odot y \le x \wedge y \le x$ و y ، $x\odot 0 = 0$ ، $x \vee 1 = 1$ ، $0 \vee x = x$،

$x \wedge 1 = x$ و $x \wedge 0 = 0$ ،

(11) $x \le y$ ایجاب می کند که $x\odot z \le y\odot z$،

(12) $1 \to x = x$ ، $x \to x = 1$, $x \to 1 = 1$،

(13) $x\odot \neg x = 0$،

(14) $x\odot y = 0$ اگر و فقط اگر $x \le \neg y$،

(15) $x \vee y = 1$ ایجاب می کند که $x\odot y = x \wedge y$ ،

(16) $x \to (y \to z) = (x\odot y) \to z$ ،

(17) $(x \to y) \to (x \to z) = (x \wedge y) \to z$،

(18) $x \to (y \to z) \geq (x \to y) \to (x \to z)$،

(19) $x \leq y$ ایجاب می کند که $\neg y \leq \neg x$،

(20) $\big((x \to y) \to y\big) \to y = x \to y$،

(21) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$،

(22) $x \odot (y \wedge z) = (x \odot y) \wedge (x \odot z)$،

(23) برای هر (مجموعه اعداد حسابی) $n \in W$،

$(x \vee y)^n = x^n \vee y^n$ و $(x \wedge y)^n = x^n \wedge y^n$. $x \vee y = 1$ ایجاب می کند که

$x^n \vee y^n = 1$،

(24) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ ،

(25) $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$،

(26) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$ ،

(27) $x \to y \leq (x \odot z) \to (y \odot z)$ ،

(28) $x \odot (y \to z) \leq y \to (x \odot z)$ ،

(29) $(y \to z) \odot (x \to y) \leq x \to z$،

(30) $x, y \leq z$ و $z \to a = z \to b$ ایجاب می کند که $x = y$ ،

(31) $x \vee (y \odot z) \geq (x \vee y) \odot (x \vee z)$ و برای هر $n, m \in IN$ داریم:

$x^m \vee y^n \geq (x \vee y)^{mn}$.

(32) $(x \to y) \to z \leq \big((y \to x) \to z\big) \to z$ ،

(33) $x \leq \neg\neg x$ ، $\neg 1 = 0$ ، $\neg 0 = 1$ ، $\neg\neg\neg x = \neg x$ ،

$x \to \neg x \leq \neg\neg x$ و $x = 1$ $\neg$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

(34) $\neg(x \vee y) = (\neg x \wedge \neg y)$ و $\neg(x \wedge y) = (\neg x \vee \neg y)$،

(35) $\neg\neg(x \vee y) = (\neg\neg x \vee \neg\neg y)$ ،

$\neg\neg(x \wedge y) = (\neg\neg x \wedge \neg\neg y)$،

$\neg\neg(x \odot y) = (\neg\neg x \odot \neg\neg y)$،

$\neg\neg(x \to y) = (\neg\neg x \to \neg\neg y)$،

(36) اگر $\neg\neg x \leq \neg\neg x \to x$ آنگاه $x = \neg\neg x$ ،

(37) $x = \neg\neg x \odot (\neg\neg x \to x)$ ،

(38) $x \to \neg y = y \to \neg x = \neg\neg x \to \neg y = \neg(x \odot y)$ ،

(39) $\neg(\neg\neg x \to x) = 0$ و $(\neg\neg x \to x) \vee \neg\neg x = 1$ ،

(40) $\neg y \leq x$ ایجاب می کند که $x \to \neg\neg(x \odot y) = \neg\neg y$ ،

(41) $x, y \leq z$ آنگاه $x \odot (z \to y) = y \odot (z \to x)$ ،

(42) $x \leq y \Leftrightarrow (x \wedge y) = x$ ،

(43) $x \leq y \Leftrightarrow (x \vee y) = y$ ،

(44) $(x \wedge y) = x \Leftrightarrow (x \vee y) = y$.

تعریف ۱-۲-۷[۲۳] : جبر $(A, \oplus, \neg, 0)$ که $\oplus$ عمل دوتایی ، $\neg$ عمل یکتایی و 0 عنصر ثابت روی A هستند را MV ـ جبر گوییم هرگاه:

(MV_1) $(A, \oplus, 0)$ تکگون جا بجایی باشد،

(MV_2) به ازای هر $a \in A$ ، داشته باشیم $a = \neg\neg a$،

(MV_3) به ازای هر $a \in A$ ، داشته باشیم $a \oplus \neg 0 = \neg 0$،

(MV_4) به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم ، $\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a$.

حال اگر A یک MV ـ جبر باشد. عملگرهایی دوتایی $\wedge, \vee, \odot, \longrightarrow$ را به ازای $a, b \in A$ های به صورت زیر تعریف می کنیم:

$(t-1)$ $a \odot b = \neg(\neg a \oplus \neg b)$ ،

$(t-2)$ $a \wedge b = (a \oplus \neg b) \odot b$ ،

$(t-3)$ $a \vee b = (a \odot \neg b) \oplus b$ ،

$(t-4)$ $a \rightarrow b = (\neg a \oplus b)$ ،

$(t-5)$ $1 = \neg 0$.

مثال ۱–۲–۸ : فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ باشد. عملگرهای $\odot, \rightarrow$ را روی A به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	c	c	1	1	1	1
c	b	c	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

بوضوح مشاهده می کنیم که $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, \odot, 0, 1)$ یک BL ـ جبر است. حال با استفاده از تعریف های $\odot, \rightarrow$ روی A، که در بالا بیان شده اند داریم:

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	d	1	d	1
c	c	c	1	1	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$\neg$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

بوضوح (MV_1) تا (MV_4) و $(t-1)$ تا $(t-5)$ برقراراند پس می توان نتیجه گرفت که $(A,\oplus,\neg,0)$ یک MV ـ جبر است.

لم ۱-۲-۹[۲۴] : هر MV ـ جبر یک BL ـ جبر است اما عکس آن همواره برقرار نمی باشد.

مثال ۱-۲-۱۰ : در مثال (۱-۲-۴) ، A یک BL ـ جبر است که MV ـ جبر نیست، زیرا(MV_2) برای $b \in A$ برقرار نیست. پس عکس لم (۱-۲-۹) همواره برقرار نمی باشد.

لم ۱-۲-۱۱[۲۵] : اگر جبر A یک BL ـ جبر باشد و به ازای هر $a \in A$، داشته باشیم:

$$a = \neg\neg a,$$

آنگاه A یک MV ـ جبر است.

۱-۳: مرکز بولی روی مشبکه مانده

ازاینجا به بعد در این فصل منظور از A، مشبکه مانده A است .