وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

زوج‌گروه‌های $n-$ایزوکلینیک

توسط:
محمدحسن قاسم نژاد

استاد راهنما:
دکتراسدالله فرامرزی ثالث

استاد مشاور:
دکترپیمان نیرومند

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

زوج‌گروه‌های $n-$ایزوکلینیک

توسط:
محمدحسن قاسم نژاد

استاد راهنما:
دکتراسدالله فرامرزی ثالث

استاد مشاور:
دکترپیمان نیرومند

شهریور ۱۳۹۱

به نام خدا

زوج‌گروه‌های n- ایزوکلینیک

توسط:

محمدحسن قاسم نژاد

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید حیدر جعفری استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود (استاد داور)

دکتر سجاد رحمانی استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر محمد رمضان‌پور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر، مادر و همسر مهربانم

که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر. آنان که فروغ نگاهشان و گرمی کلامشان، سرمایه‌های جاودانی زندگیم هستند. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان و آرامش خاطرم در نگاه مضطرب و نگرانشان تجلی یافت.

و تقدیم به

برادران، خواهران و دوستانم، که مشوقم در تمام مراحل زندگی بودند.

سپاسگزاری

به نام خداوند جان و خرد   کز این برتر اندیشه برنگذرد

سپاس مخصوص خدایی است که خالق زمین است و زمان

پدر نماد استواری، مادر نماد عشق و همسر نماد محبت، سه موجود لایق سپاس، که من اینجا با قلبی سرشار از عشق، کمال تشکر را از آنها دارم که مرا تا این مرحله از زندگی و تحصیل یاری نمودند.

مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را پیشکش استاد گرانقدر و فرزانه ام، دکتر اسدالله فرامرزی ثالث می نمایم که درست اندیشیدن را به من آموخت و با راهنمایی های خود، بنده را در دستیابی به اهداف علمی و معنوی هدایت نمودند. از جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که مسئولیت

مشاوره این پایان نامه را بر دوش کشیدند، کمال تشکر را دارم. هم چنین از اساتید گرامی، جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری و جناب آقای دکتر سجاد رحمانی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از سایر اعضای خانواده و دوستان عزیزم، کمال تشکر را دارم که باعث دلگرمی و آرامشم بوده اند.

محمد حسن قاسم نژاد

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

زوج‌گروه‌های $n-$ایزوکلینیک

به وسیله‌ی:
محمدحسن قاسم نژاد

ما در این پایان‌نامه، مفهوم n-ایزوکلینیسم را به کلاس همه‌ی زوج گروه‌های (G, M)، که M زیرگروه نرمال G است، توسعه داده و سپس با مطالعه جزئیات این مفهوم، تعدادی شرایط هم‌ارز را برای دو زوج‌گروه n-ایزوکلینیک پیدا می‌کنیم.

به‌علاوه با معرفی n-ساقه زوج‌گروه‌ها، زیرگروه-تحویل‌ناپذیر و خارج قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم، ثابت می‌کنیم که n-ساقه زوج‌گروه‌ها، خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم هستند و در حالت کلی‌تر، هر زوج‌گروهی که در شرط $Z_n(M, G) \leq \gamma_{n+1}(M, G)$ صدق کند، هم زیرگروه-تحویل‌ناپذیر و هم خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: زوج‌گروه‌ها، n-ایزوکلینیسم، گروه n-ساقه، زیرگروه-تحویل‌ناپذیر، خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر.

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌های اختصاری

$C_G(x)$:	مرکزساز عنصر x در G
$N_G(x)$:	نرمال‌ساز عنصر x در G
$Cl_G(x)$:	رده مزدوجی عنصر x در G
$d(G)$:	درجه جابه‌جایی G
$k(G)$:	تعداد رده‌های مزدوجی G
$Z(G)$:	مرکز گروه G
$Z_n(G)$:	$(n+۱)$-امین جملهٔ سری مرکزی بالایی (n-امین مرکز) گروه G
$\gamma_n(G)$:	n-امین جملهٔ سری مرکزی پایینی گروه G
G':	زیرگروه مشتق G
$D_{۲n}$:	گروه دووجهی از مرتبه $۲n$
$Q_{۲^n}$:	گروه چهارگان از مرتبه ۲^n
$\mathbb{Z}_n$:	حلقه اعداد صحیح به پیمانه n
A_n:	گروه متناوب از درجه n
S_n:	گروه متقارن از درجه n
$[a,b]$:	جابه‌جاگر a و b
$[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]$:	جابه‌جاگر $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n
$\langle X\rangle$:	زیرگروه تولید شده با مجموعه‌ی X
$[G:H]$:	اندیس H در G
$\langle X \mid R\rangle$:	نمایش گروه با مجموعه مولد X و مجموعه روابط R
(G,M):	زوج‌گروه G و M که M در G نرمال است

$[M,G]$:	زیرگروه تولید شده با تمام جابه‌جاگرهای $[m,g]$، که $m \in M$ و $g \in G$
$Z(M,G)$:	مجموعه $\{m \in M \mid \forall g \in G, [m,g]=1\}$ وقتی M در G نرمال است
$Z_n(M,G)$:	$(n+1)$-امین جملهٔ سری مرکزی بالایی زوج‌گروه‌ها
$\gamma_n(M,G)$:	(n)-امین جملهٔ سری مرکزی پایینی زوج‌گروه‌ها
$A \leq B$:	A زیرگروه B است
$A \trianglelefteq B$:	A زیرگروه نرمال B است
$A char B$:	A زیرگروه مشخصه‌ی B است
$A \cong B$:	A با B یکریخت است
$A \sim B$:	A با B ایزوکلینیک است
$A \sim_n B$:	A با B، n-ایزوکلینیک است
$G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$:	حاصلضرب مستقیم گروه‌های G_1، G_2، $\ldots$ و G_n
$\prod_{i=1}^{n} A_i$:	مجموعه $\{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n)\}$ که $A_i \leq G$
$\phi(G)$:	زیرگروه فراتینی G

پیشگفتار

هال [1] در سال ۱۹۴۰ [؟]، به منظور رده‌بندی گروه‌هایی با مرتبه توانی از یک عدد اول، نماد ایزوکلینیسم[2] را معرفی کرد و نشان داد که چطور ایزوکلینیسم می‌تواند در رده‌بندی گروه‌های متناهی استفاده شود. H و K را ایزوکلینیک[3] می‌نامیم، اگر و تنها اگر $\frac{H}{Z(H)}$ با $\frac{K}{Z(K)}$ و زیرگروه‌های جابه‌جاگر آن‌ها، H' با K' یکریخت باشند.

ایزوکلینیسم، تعمیمی از ایزومورفیسم و یک رابطه هم‌ارزی در کلاس همه گروه‌هاست. گروه‌های ایزومورفیسم، ایزوکلینیک هستند، اما عکس آن همیشه برقرار نیست. برای مثال گروه دووجهی D_8 و چهارگان Q_8 ایزوکلینیک هستند، اما $D_8 \ncong Q_8$. خیلی جالب است که بدانیم هرگروه آبلی‌ست اگر و تنها اگر با گروه همانی ایزوکلینیک باشد.

هال هم‌چنین ثابت کرد که هرکلاس هم‌ارزی حداقل شامل یک گروه متناهی با مرتبه مینیمال می‌باشد که مرکزش مشمول در زیرگروه جابه‌جاگرش است و آن را گروه ساقه[4] نامید.

در سال ۱۹۷۶ ، بایوش[5] [؟] با در نظر گرفتن واریته تمام گروه‌های پوچ‌توان از کلاس حداکثر n، که n عدد صحیح مثبت است، توانست مفهوم n-ایزوکلینیسم را معرفی کند. پس از ده سال، هکستر[6] [؟] نتایجی را که قبل از او برای گروه‌های ایزوکلینیک بدست آمده بود، به گروه‌های

---

[1] Hall

[2] Isoclinism

[3] Isoclinic

[4] Stem group

[5] Bioch

[6] Hekster

n-ایزوکلینیک تعمیم داد. هم‌چنین با معرفی گروه n-ساقه، زیرگروه-تحویل‌ناپذیر و خارج قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم، ثابت کرد که گروه n-ساقه، خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم است. و در حالت کلی‌تر، هر گروهی که در شرط $Z_n(G) \leq \gamma_{n+1}(G)$ صدق کند، هم زیرگروه-تحویل‌ناپذیر و هم خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم می‌باشد.

درجه جابه‌جایی گروه‌های متناهی توسط میلر[7] [؟] درسال ۱۹۴۴ به صورت زیر معرفی شد که $d(G)$ درجه جابه‌جایی گروه G ، برابر با حاصل تقسیم، تعداد جفت‌های مرتب در G که باهم جابه‌جا می‌شوند، برتوان دوم مرتبه G است.

گاستافسون[8][؟] درسال ۱۹۷۳ با ارائه این فرمول که، درجه جابه‌جایی یک گروه برابر با حاصل تقسیم تعداد کلاس‌های مزدوجی گروه بر مرتبه آن گروه است، توانست کران بالای $\frac{5}{8}$ را برای درجه جابه‌جایی گروه‌های غیرآبلی پیدا کند.

پس از آن لسکات[9] [؟] در سال ۱۹۹۵ با استفاده از مفهوم ایزوکلینیسم گروه‌ها و این‌که گروه‌های ایزوکلینیک درجه جابه‌جایی یکسان دارند، توانست گروه‌های با درجه جابه‌جایی حداقل $\frac{1}{2}$ را رده‌بندی کند. او نشان داد که اگر گروهی درجه جابه‌جایی $\frac{1}{2}$ را اختیار کند، باید با گروه متقارن S_3 ایزوکلینیک باشد و گروه‌های با درجه جابه‌جایی بیشتر از $\frac{1}{2}$ ، گروه‌های پوچ‌توان از کلاس حداکثر ۲ هستند. سپس لسکات، درجه جابه‌جایی گروه‌ها را تعمیم داد و n-امین درجه جابه‌جایی $d^n(G)$ را تعریف کرد. $d^n(G)$ برابر با حاصل تقسیم تعداد $(n+1)$-تایی‌های مرتبی که دوبه‌دو جابه‌جا می‌شوند، بر توان $(n+1)$-ام مرتبه گروه می‌باشد.

درسال ۲۰۰۵ مقدم، سالم‌کار و چیتی [؟]، تعمیم دیگری از درجه جابه‌جایی را معرفی کردند که n-امین درجه پوچ‌توانی نام گرفت و برابر با مجموعه تمام $(n+1)$-تایی‌های مرتبی که جابه‌جاگر $(n+1)$-تایی آن‌ها برابر با عنصر همانی گروه است، تقسیم بر توان $(n+1)$-ام مرتبه گروه می‌باشد. آن‌ها با تعریف گروه‌های n-ایزوکلینیک که درجه n-پوچ‌توانی را حفظ می‌کند، نتایج جدیدی را برای CN-گروه‌ها، که مرکزساز هر عنصرشان در گروه نرمال است، بدست آوردند. لازم به ذکر است که CN-گروه‌ها، پوچ‌توان از کلاس حداکثر ۲ بوده و نتایج مربوطه بدیهی می‌باشد.

در سال ۲۰۰۷ سالم‌کار، سعیدی و کریمی [؟]، مفهوم ایزوکلینیسم را به کلاس همه زوج‌گروه‌های (G, M) که M زیرگروه نرمال G است، تعمیم داده و نشان دادند که تحت بعضی شرایط، هر کلاس هم‌ارزی شامل حداقل یک زوج‌گروه ساقه می‌باشد. هم‌چنین آن‌ها تعدادی شرایط هم‌ارز را برای

[7] Miller

[8] Gustafson

[9] Lescot

زوج‌گروه‌های ایزوکلینیک معرفی کردند.

ما در این پایان‌نامه با مطالعه و بررسی کارهایی که حیدریان و غلامی [؟] در سال ۲۰۱۱، در راستای نتایج هکستر [؟] انجام داده‌اند، مفهوم n-ایزوکلینیسم را به کلاس همه زوج‌گروه‌های (G, M) که M زیرگروه نرمال G است، توسعه داده و سپس با مطالعه جزئیات این نماد، تعدادی شرایط هم‌ارز را برای دو زوج‌گروه n-ایزوکلینیک پیدا می‌کنیم. به علاوه با معرفی زوج‌گروه‌های n-ساقه، زیرگروه-تحویل‌ناپذیر و خارج قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم، ثابت می‌کنیم که زوج‌گروه‌های n-ساقه، خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم هستند و در حالت کلی‌تر، هر زوج‌گروهی که در شرط $Z_n(M, G) \leq \gamma_{n+1}(M, G)$ صدق کند، هم زیرگروه-تحویل‌ناپذیر و هم خارج‌قسمت-تحویل‌ناپذیر نسبت به n-ایزوکلینیسم می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل به بیان بعضی تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است. این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول با تعریف مرکزسازها، نرمال‌سازها و رده‌های مزدوجی، معادله رده‌ای را معرفی می‌نماییم. در بخش دوم با معرفی p-گروه‌ها، نتایجی مقدماتی از روابط بین آنها را بدست می‌آویم. در بخش سوم، با معرفی گروه‌های پوچ‌توان، به بیان برخی قضیه‌ها و نتایج پرداخته و در ادامه زیرگروه فراتینی، سری‌های مرکزی بالایی و پایینی را معرفی می‌نماییم. و سرانجام در فصل چهارم، با تعریف مفهوم درجه جابه‌جایی، با طرح مثال و قضیه، کرانی بالا برای درجه جابه‌جایی گروه‌های متناهی و ناآبلی پیدا می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از مراجع مختلفی است که در هر یک از بخش‌ها به آن‌ها اشاره شده است و خواننده در صورت نیاز به مطالعه‌ی بیشتر، می‌تواند به آن‌ها مراجعه کند.

۱-۱ مرکزسازها، نرمال‌سازها و معادله رده‌ای

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و x یک عضو از آن باشد. دراین‌صورت **رده مزدوجی** x در G را با $Cl_G(x)$، نشان می‌دهیم وبه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Cl_G(x) &= \{g \in G \big| g = x^y;\ y \in G\} \\ &= \{x^y = yxy^{-1} \big|\ y \in G\}. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۱.۱. *رده‌های مزدوجی دارای خواص زیر می‌باشند*

الف) *هر عنصر در رده مزدوجی خود قرار دارد.*

ب) *اگر* $x \in Cl_G(y)$، *آن‌گاه* $Cl_G(x) = Cl_G(y)$.

ج) $Cl_G(x) = Cl_G(y)$ *یا* $Cl_G(x) \cap Cl_G(y) = \varnothing$.

د) *مجموعه* $\{Cl_G(x) \big| x \in G\}$ *یک افراز برای گروه* G *می‌باشد.*

اثبات. از آنجایی که رابطه تزویج یک رابطه هم‌ارزی‌ست، به سادگی نتیجه حاصل می‌شود. □

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و x یک عضو از آن باشد. دراین‌صورت **مرکزساز** x در G را با $C_G(x)$، نشان می‌دهیم وبه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(x) = \{y \in G \big| xy = yx\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$Z(G) = \{y \in G \big|\ \forall x \in G;\ xy = yx\}.$$

دراین‌صورت $Z(G)$ را **مرکز** گروه G می‌نامیم.

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید* G *گروهی متناهی باشد. دراین‌صورت*

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

اثبات. با توجه به تعریف، نتیجه بدیهی است. □

قضیه ۶.۱.۱. [؟] *فرض کنید* G *یک گروه متناهی و* x *یک عنصر از آن باشد. دراین‌صورت تعداد عناصر رده مزدوجی* x *در* G *برابر است با* $[G : C_G(x)]$، *که* $|\ G\ |$ *را می‌شمارد.*

نتیجه ۷.۱.۱. *مجموعه $\{x\}$ یک رده مزدوجی است، اگر و تنها اگر $x \in Z(G)$ باشد. در نتیجه به ازای هر x در مرکز G،*

$$[G : C_G(x)] = ۱.$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. تعداد رده‌های مزدوجی متمایز G را **عدد رده‌ای** گروه G می‌گوییم و آن را با $k(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. اگر $\overline{x}_۱$، $\overline{x}_۲$، . . . ، $\overline{x}_n$، $(x_i \in G)$ تمامی رده‌های مزدوجی متمایز G باشند، آن‌گاه

$$|G| = \sum_{i=۱}^{n} |\overline{x}_i| = \sum_{i=۱}^{n}[G : C_G(x_i)].$$

که آن را **معادله‌ی رده‌ای** G می‌نامند.

ملاحظه ۱۰.۱.۱. [؟] اگر G یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه بنابر نتیجه ؟؟، معادله‌ی رده‌ای G را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=۱}^{m}[G : C_G(x_i)].$$

که در آن برای $۱ \leq i \leq m$، $x_i \in G \setminus Z(G)$ و $[G : C_G(x_i)] > ۱$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه G و g عنصری از گروه G باشد. دراین‌صورت **مزدوج** X **به وسیله** g برابر است با

$$X^g = gXg^{-۱} = \{gxg^{-۱} | x \in X\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. **نرمال‌ساز** X در G را با نماد $N_G(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_G(X) = \{g \in G | X^g = X\}.$$

ملاحظه ۱۳.۱.۱. اگر H زیرگروهی از G باشد، آن‌گاه $N_G(H)$ بزرگترین زیرگروهی از G می‌باشد که H در آن نرمال است.

قضیه ۱۴.۱.۱. (***نرمال‌ساز- مرکزساز***) [؟] *فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، دراین‌صورت*

$$C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$$

و $N_G(H) / C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

۱-۲ p- گروه‌های متناهی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اوّل باشد. G را یک p**-گروه** گویند اگر به‌ازای هر $g \in G$، عددصحیح نامنفی n وجود داشته باشد که $o(g) = p^n$.
اگر H زیرگروهی از گروه G و H یک p- گروه باشد، آن‌گاه H را یک p**-زیرگروه** از G می نامند.

تعریف ۲.۲.۱. گروه متناهی G را p**- گروه بسیار ویژه**[۱] می‌نامند، هرگاه

$$Z(G) = G' \cong Z_p.$$

به عنوان مثال، p- گروه‌های D_8 و Q_8 بسیار ویژه هستند.

تعریف ۳.۲.۱. گروه نابدیهی G را **گروه ساده** می‌نامند، هرگاه زیرگروه نرمال واقعی نابدیهی نداشته باشد.

تعریف ۴.۲.۱. گروهی را که همه‌ی عناصر آن از مرتبه‌ی متناهی باشند را **گروه تابدار** می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱. هر گروه که به جز عضو همانی، همه‌ی عضوهای دیگر آن از مرتبه‌ی نامتناهی باشند را گروه **بدون تاب** می‌نامند.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. دراین‌صورت G را **گروه آبلی مقدماتی** می‌نامند هرگاه عدد اول p وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $a \in G$، $a^p = 1$.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و M یک زیرگروه از آن باشد. دراین‌صورت M را یک **زیرگروه بیشین** (ماکسیمال) از G می‌گویند، هرگاه $M \leq H \leq G$ نتیجه دهد که $M = H$ یا $H = G$.

قضیه ۸.۲.۱. [؟] (**ددکیند**[۲]) *فرض کنید L، H و K زیرگروه‌های گروه G باشند. اگر $K \subseteq L$، آنگاه $(HK) \cap L = (H \cap L)K$.*

قضیه ۹.۲.۱. (**لاگرانژ**[۳])[؟] *اگر G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$، آن‌گاه $|H| \mid |G|$.*

---

[۱] Extra special p-group

[۲] Dedekind

[۳] Lagrange

قضیه ۱.۲.۱۰. (**کوشی** [۴])[؟] *فرض کنید G گروهی متناهی و p یک عدد اوّل باشد، به‌طوری‌که $p \mid |G|$. دراین‌صورت G شامل عنصری از مرتبه‌ی p می‌باشد.*

نتیجه ۱.۲.۱۱. [؟] *گروه متناهی G یک p-گروه است اگر و فقط اگر $|G|$ توانی از عدد اول p باشد.*

نتیجه ۱.۲.۱۲. [؟] *اگر G یک p-گروه متناهی و نابدیهی باشد، آن‌گاه $|Z(G)| > ۱$.*

قضیه ۱.۲.۱۳. [؟] *فرض کنید G یک p-گروه متناهی (p عددی اوّل است) باشد. دراین‌صورت برای هر زیرگروه نرمال و نابدیهی N از G، $Z(G) \cap N$ نابدیهی است.*

تعریف ۱.۲.۱۴. زیرگروه P از گروه G را یک p-**زیرگروه سیلو** (p عددی اوّل است) از G می‌نامند، هرگاه P، یک p-زیرگروه ماکزیمال (بیشین) از G باشد.

قضیه ۱.۲.۱۵. [؟] *فرض کنید G گروهی متناهی و p عددی اوّل باشد که $p||G|$. دراین‌صورت اگر P، p-زیرگروه سیلوی G باشد و $N_G(P) \leq H \leq G$، آن‌گاه $N_G(H) = H$.*

نتیجه ۱.۲.۱۶. [؟] *فرض کنید G یک p-گروه متناهی و M زیرگروهی ماکسیمال از G باشد. دراین‌صورت $M \trianglelefteq G$ و $[G : M] = p$.*

۱–۳ گروه‌های پوچ‌توان

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت

الف) به ازای هر $x, y \in G$، عنصر $[x, y] = x^{-۱}y^{-۱}xy \in G$ را **جابه‌جاگر** x و y می‌نامند.

ب) به ازای هر $X, Y \leq G$، زیرگروه

$$[X, Y] = \big\langle [x, y] \bigm| x \in X, y \in Y \big\rangle$$

را **زیرگروه جابه‌جاگر** X و Y می‌نامند.

ج) فرض کنید M یک زیرگروه نرمال از G باشد. دراین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$[M, G] = \big\{ [m, g] \bigm| m \in M, g \in G \big\}.$$

و در حالت کلی داریم: $[M,_{۰} G] = M$ و برای $n \geq ۱$، $[M,_{n+۱} G] = \big[[M,_n G], G \big]$.

---

[۴] Cauchy