دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

آمار ، گرایش آمار ریاضی

عنوان

برآورد انقباضی موجک در حالت بیزی تحت تابع زیان لینکس

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

پژوهشگر

سمیرا توره زاده

خرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: تورەزاده　　　　نام: سمیرا

عنوان: برآورد انقباضی موجک در حالت بیزی تحت تابع زیان لینکس

استاد راهنما: دکتر محمد آرشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　　رشته: آمار　　　　گرایش: آمار ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود　　　　دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: خرداد ۱۳۹۲　　　　تعداد صفحات: ۸۷

واژگان کلیدی: برآوردگر بیز تعمیم یافته، زیان لینکس، زیان نرمال منعکس شده، مجاز، مینیماکس، موجک، آستانه نرم، برآورد انقباضی موجکی

چکیده

یکی از الگوهای اصلی مورد استفاده در استنباط‌های آماری روش بیزی می‌باشد، که در آن پارامتر θ یک متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال $\pi(\theta)$ می‌باشد. در این روش از توزیع پسین به عنوان معیاری برای تعیین براوردگر بیز استفاده می‌شود. با توجه به رشد سریع استفاده از روشهای بیزی از قرن ۲۰، در این پایان‌نامه به این نوع برآوردگرها می‌پردازیم. در این راستا، براوردگر بیز تعمیم یافته را تحت تابع زیان لینکس و نرمال منعکس شده می‌یابیم و برای توزیع نمونه‌ای نرمال و نرمال آمیخته مقیاسی، تحت تابع زیان لینکس، ثابت می‌کنیم که برآوردگر بیز تعمیم یافته، برآوردگر انقباضی موجکی نرم است. در ادامه با توجه به نقش مهمی که مفاهیم مجاز و مینیماکس، در استنباط و تصمیم‌های آماری ایفا می‌کنند، این برآوردگرها را از حیث این مفاهیم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با احترام و تواضع تقدیم به

مادرم، سرچشمه عشق و ایثار

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد آرشی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از اساتید داور محترم، سرکار خانم دکتر ایرانمنش و جناب آقای دکتر نزاکتی که با حضور دلگرمشان تصحیح و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفته‌اند سپاسگزارم.

همچنین، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس ایشان را و تشکر می‌کنم از خانواده و تمام دوستانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیرا توره زاده

خرداد ۱۳۹۲

پیش‌گفتار

تا کنون تلاش‌های فراوانی جهت بهبود و بهینه‌سازی برآوردگرها در مفهوم استنباط آماری صورت گرفته است. پس از آنکه در قرن ۱۸، ریاضیدان فرانسوی سیمون لاپلاس مفهوم بیز را بیان کرد، افراد زیادی به خصوص از قرن بیستم به بعد، راه حل‌های بیزی را در استنباط‌های آماری مورد توجه قرار دادند و با استفاده از روش‌های بیزی در پی برآوردگری با کمترین زیان ممکن بودند. از طرفی با توجه به اهمیت روزافزون استفاده از تابع زیان به خصوص در مسائل اقتصادی، بعد از بیان فلسفه تاگوچی در سال ۱۹۵۰، طی مطالعاتی، محققین پی به این مطلب بردند که گاهاً برای بررسی مسائل متفاوت نیاز به استفاده از تابع زیان‌های مختلف است و استنباط بر اساس تابع زیان درجه دوم (که در آن سال‌ها متداول بود) نمی‌تواند در تمامی مسائل نتایج مقبولی را ارائه دهد. از اینرو تابع زیان‌های کراندار و نامتقارنی همانند نرمال منعکس شده و لینکس معرفی شدند. بدین منظور در این پایان‌نامه برآوردگرهای انقباضی موجکی در حالت بیزی را تحت تابع زیان لینکس، برای حالتی که توزیع نمونه‌ای نرمال فرض شده مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین به بررسی برآوردگر بیز تعمیم یافته تحت تابع زیان نرمال منعکس شده پرداخته و در ادامه برآوردگر انقباضی موجک را برای تعمیمی از توزیع نرمال که در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته، بدست می‌آوریم. این مجموعه شامل ۵ فصل می‌باشد. مطالب هر فصل به طور مختصر عبارتست از

- در فصل ۱، مقدمات، مروری بر تاریخچه موضوع مورد بررسی و یک سری تعاریف و مفاهیم اولیه آورده شده‌اند. همچنین برخی لم‌ها و قضایایی که در این پایان‌نامه استفاده شده است نیز آمده است.

- در فصل ۲، به معرفی موجک‌ها، مروری بر تاریخچه موجک‌ها، روش‌های آستانه‌ای موجک‌ها و بیان برخی مفاهیم موجکی مرتبط با این پایان‌نامه پرداخته شده است.

- در فصل ۳، برآوردگر بیز تعمیم یافته را تحت تابع زیان لینکس برای توزیع نمونه‌ای نرمال چند متغیره بدست آورده و به بررسی مجاز و مینیماکس بودن آن پرداخته می‌شود. همچنین، نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن حالت خاصی از تابع زیان برآوردگر بیز تعمیم‌یافته، برآوردگر انقباضی موجکی می‌باشد.

- در فصل ۴، موارد بدست آمده در فصل ۳، برای حالتی که توزیع نمونه‌ای نرمال آمیخته مقیاسی فرض شده بررسی شده‌اند.

- در فصل ۵، برآوردگر بیز تعمیم یافته را تحت تابع زیان نرمال منعکس شده مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نمادها

A^T: ترانهاده ماتریس A

$A^{-۱}$: معکوس ماتریس A

$\mathbb{R}^+$: فضای حقیقی مثبت

$\mathbb{R}^n$: فضای n بعدی حقیقی

$\mathcal{X}$: فضای نمونه

Θ: فضای پارامتر

$\forall$: به ازای هر

$\wedge$: و

$\vee$: یا

$I(A)$: تابع نشانگر مجموعه A

$sign\ a$: تابع علامت a

$(a)_+$: ماکزیمم a و ۰

$< f, g >$: حاصلضرب داخلی f و g

$|f|$: قدر مطلق تابع f

$\|f\|$: نرم تابع f

$\sup f$: سوپریمم تابع f

$\inf f$: اینفیموم تابع f

$Supp\ f$: تکیه‌گاه f

$ess \sup f$: سوپریمم اساسی تابع f

$L^۲(\mathbb{R})$: فضای توابع انتگرال پذیر

$C^s(\mathbb{R})$: فضای هولدر

$B^s_{p,q}$: فضای بسوف

$\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$: توزیع نرمال n−متغیره با میانگین μ و مقیاس Σ

$\Gamma(r, v)$: توزیع گاما با پارامترهای r و v

$\mathcal{B}(r, v)$: توزیع بتا با پارامترهای r و v

$T_n(\mu, \Sigma, v)$: توزیع t−استیودنت n−متغیره با میانگین μ، مقیاس Σ و درجه آزادی v

$\mathcal{SL}_n(\mu, \Sigma, v)$: توزیع اسلش n−متغیره با میانگین μ، مقیاس Σ و پارامتر شکل v

$\mathcal{CN}_n(\mu, \Sigma, v, \gamma)$: توزیع نرمال آلایشی n−متغیره با میانگین μ، مقیاس Σ، v پارامتر نشان دهنده درصد داده‌های دور افتاده و γ می‌تواند تفسیری از فاکتور مقیاس باشد

$\mathcal{L}(\theta,\delta)$: تابع زیان
$R(\theta,\delta)$: تابع مخاطره
$r(\pi,\delta)$: مخاطره بیز
$\rho\left(\pi(\theta|x),\delta(x)\right)$: مخاطره پسین
$\mathcal{M}_X(t)$: تابع مولد گشتاور X در نقطه t

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمات و پیش‌نیازها

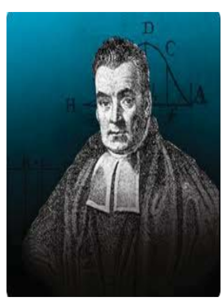
۱.۱ مقدمه

یکی از مسائلی که در آمار بسیار مورد توجه است مسئله برآورد و یافتن برآوردگر مناسب است. در دنیای پیرامون ما در علوم و زمینه‌های مختلف اعم از اجتماعی، اقتصادی، روانشناختی، سیاسی، زمین‌شناسی، پزشکی، نجوم و ... با پارامترهای مجهولی روبرو هستیم که همواره برآورد این پارامترها از اهداف اصلی می‌باشد. یافتن برآوردگرهای مناسب در عین سادگی در ظاهر، پیچیدگی‌های خاص خود را داراست و همواره در یافتن آنها نیاز است جوانب امر سنجیده شود. در استنباط‌های آماری دو الگو عمده کلاسیک[۱] و بیزی[۲] مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روشهای کلاسیک برای برآورد پارامتر مجهول θ آن را یک مقدار ثابت در نظر گرفته و بر اساس یک نمونه تصادفی $X = (X_1, \dots, X_n)$ بدست آمده از خانواده توزیع‌های $F = \{f : f_\theta(x) > 0, \theta \in \Theta\}$ برآوردگرهایی برای θ بدست می‌آوردیم. در روشهای غیر کلاسیک بیزی، θ را کمیتی در نظر می‌گیریم که خود یک متغیر تصادفی است و تغییرات آن توسط یک تابع که به آن توزیع پیشین[۳] می‌گویند توجیه می‌شود. روشهای بیزی یک الگوی کامل برای استنباط آماری و تصمیم گیری تحت عدم قطعیت[۴] فراهم می‌کند.

رشد سریع استفاده از روش‌های آماری بیزی در بررسی مسائل اقتصادی از سال ۱۹۵۰، کاربردهای

[۱] Classical
[۲] Bayesian
[۳] Prior
[۴] Uncertainty

بسیاری از استنباط بیزی و تکنیک‌های تصمیم گیری را در طیف وسیعی از مسائل، وارد کرد و باعث توسعه برنامه‌های کامپیوتری بیزی شد. برای اطلاعات بیشتر پرس[۵] (۱۹۸۰) را ببینید. به تجربه نشان داده شده که راه‌حل‌های بیزی در مسائل کاربردی به خوبی و یا بهتر از راه حل‌های غیر بیزی (کلاسیک) عمل می‌کند. در واقع بسیاری از نتایج غیر بیزی می‌توانند به وسیله روشهای بیزی تحت فرضیات خاص بدست آیند. اگر چه این فرضیات خاص اغلب نامطلوب بوده و در نتیجه راه‌حل‌های کاملا بیزی که این فرضیات را کمرنگ می‌کنند ترجیح داده می‌شوند. بعلاوه یکی از دلایل شهرت خوب رویکردهای بیزی، جواز استفاده از اطلاعات پیشین در بدست آوردن راه حل‌هایی در اعمال استنباط و مسئله تصمیم گیری است، بخصوص این مسئله زمانی ارزشمند است که اطلاعات نمونه محدود باشد. روشهای بیزی ترکیب فرضیه‌های علمی را در تجزیه و تحلیل (با استفاده از توزیع پیشین) ممکن می‌سازد و اغلب در مسائلی که ساختار آنها برای روشهای کلاسیک پیچیده است بکار می‌رود. اساس الگوی بیزی به عنوان اندازه‌گیری کسر شرطی، عدم قطعیت که در زبان عادی با کلمه احتمال مطابقت دارد، می‌باشد. استنباط آماری در مورد کمیت مورد علاقه، به عنوان تعدیلی از عدم قطعیت در پرتو شواهد بیان می‌شود وتئوری بیز بطور دقیق چگونگی ساخته شدن این تعدیلات را مشخص می‌کند (برناردو[۶]، ۲۰۰۳).
اصطلاح بیز اشاره به ریاضیدان و الهیات شناس قرن ۱۸ توماس بیز[۷] دارد.

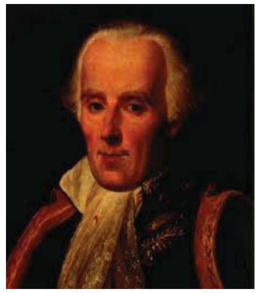


شکل ۱.۱: توماس بیز

اگر چه اولین پیشگام آنچه امروزه ما به عنوان احتمال بیزی می‌شناسیم سیمون لاپلاس[۸]

[۵] Press
[۶] Bernardo
[۷] Bayes
[۸] Laplace

(۱۸۲۷ – ۱۷۴۹) است. برخی افراد تلاش‌ها قابل تقدیری در ارائه راه‌حل‌های بیزی در استنباط و



شکل ۲.۱: سیمون لاپلاس

مسئله تصمیم و برخی کاربردها انجام داده‌اند که می‌توان تحقیقات گود[۹](۱۹۶۵ ,۱۹۵۰)، جفری [۱۰] (۱۹۶۷ ,۱۹۵۷)، سویج[۱۱] (۱۹۵۴)، لیندلی[۱۲](۱۹۷۱ ,۱۹۶۵)، زلنر[۱۳](۱۹۸۴ ,۱۹۷۱)، دگروت[۱۴] (۱۹۷۰)، لیمر[۱۵] (۱۹۷۸) و برگر[۱۶](۱۹۸۰) را نام برد. همچنین مقالاتی حاوی نظریه‌های با ارزش و کاربردی به چاپ رسیده که از آن جمله می‌توان به فینبرگ[۱۷] زلنر (۱۹۷۵)، برناردو[۱۸] و همکاران (۱۹۸۰)، زلنر (۱۹۸۰) و گول[۱۹] و زلنر (۱۹۸۵) اشاره کرد. برخی کاربردهای جالب از تجزیه وتحلیل‌های بیزی در اقتصاد عبارتند از پیک[۲۰](۱۹۷۴)، روش برآورد بیزی را در تحلیل وضع سرمایه‌گذاری شرکت‌ها در صنعت برق بکار برد. واریان[۲۱](۱۹۷۵)، روش‌های بیزی را برای حل مسئله ارزیابی مالیات املاک و مستغلات بکار گرفت. زلنر و ویلیامز[۲۲](۱۹۷۳)، روش‌ها بیزی را در مطالعات مدل‌های سری‌های زمانی برای تقاضا پول امریکا و سرمایه‌گذاری بکار بردند.

استنباط و تصمیم بر اساس برآوردگرها همواره ضرر و زیان‌هایی را به دنبال دارد که این زیان می‌تواند

[۹] Good
[۱۰] Jeffreys
[۱۱] Savage
[۱۲] Lidley
[۱۳] Zellner
[۱۴] Degroot
[۱۵] Leamer
[۱۶] Berger
[۱۷] Fienberg
[۱۸] Bernardo
[۱۹] Goel
[۲۰] Peck
[۲۱] Varian
[۲۲] Williams

در غالب زیان ناشی از بیش‌برآورد[۲۳] و کم‌برآورد[۲۴] نمایان شود، بعد از بیان فلسفه تاگوچی[۲۵] بر اهمیت استفاده از تابع زیان[۲۶] روز به روز افزوده شده است. از این‌رو استفاده از تابع زیان مناسب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و باید با توجه به موضوع تحت بررسی تابع زیان مناسب را برگزید. در گذشته استفاده از تابع زیان‌های متقارن[۲۷] مانند تابع زیان درجه دوم خطا[۲۸] مرسوم بود اما در رویارویی با مسائل کاربردی محققین پی به نواقص این تابع زیان برای برخی از مسائل بردند. از جمله نواقص این تابع زیان می‌توان به نامتناهی بودن آن و ضعف این تابع در تفکیک زیان حاصل از بیش‌برازش و کم برازش اشاره نمود. از این رو تابع زیان کراندار همانند نرمال منعکس شده[۲۹] و نامتقارن، همانند لینکس[۳۰] ارائه شدند.

با اذعان به این مطلب که ضرر و زیان ناشی از استفاده برآوردگرها در اکثر مسائل تقریبا اجتناب ناپذیر است همواره در پی آن هستیم که این زیان را تا حد امکان کاهش دهیم. لذا از این مطلب می‌توان به عنوان معیاری برای انتخاب براوردگر مناسب استفاده کرد. در این راستا با مفاهیمی همچون مجاز[۳۱] و مینیماکس[۳۲] مواجه می‌شویم.

با توجه به قابلیت انعطاف و محتوای غنی و کاربردهای بسیار تحلیل موجک[۳۳]، امروزه این توابع پایه متعامد[۳۴]، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. نکته قابل توجه در این میان اینست که برخی از برآوردگرهای مجاز و مینیماکس تحت شرایطی خاص برآوردگر انقباضی موجکی هستند.

[۲۳] Over-estimation
[۲۴] Under-estimation
[۲۵] Taguchi
[۲۶] Loss function
[۲۷] Symmetric
[۲۸] Quadratic error
[۲۹] Reflected normal
[۳۰] Linex
[۳۱] Admissible
[۳۲] Minimax
[۳۳] Wavelet
[۳۴] Orthogonal

در راستای مطالب ذکر شده به بیان یک سری تعاریف ومفاهیم می‌پردازیم.

۲.۱ مفاهیمی از استنباط و تصمیم‌های آماری

نظریه تصمیم آماری، مباحثی در مورد تصمیم‌گیری در حضور دانش آماری است که درک عدم قطعیت را آسان می‌کند. فرض کنید عدم قطعیت را می‌توان مقدار کمی نامعلوم در نظر گرفت و آن را با θ و مجموعه تمام مقادیر ممکن θ را با Θ نمایش دهیم، هدف استنباط آماری بدست آوردن اطلاعاتی در مورد θ یا توزیع F_θ از طریق مشاهدات (اطلاعات نمونه که از روش‌های آماری تهیه می‌شوند) است و پس از آن استنباط‌هایی روی θ (بدون در نظر گرفتن محل استفاده آن) صورت می‌گیرد. در نظریه تصمیم آماری این اطلاعات با اطلاعات جانبی دیگر به کار گرفته می‌شود. یعنی علاوه بر اطلاعات نمونه، اطلاعات مربوط به تصمیم‌های ممکن و همچنین اطلاعاتی مربوط به θ، که به اطلاعات پیشین موسوم هستند نیز در نظر گرفته می‌شود که این اطلاعات پیشین گاهاً از منابع غیر آماری و تجارب گذشته حاصل می‌شوند. در نهایت برای هر تصمیم مقداری سود و زیان متناسب با مقادیر مختلف θ در نظر می‌گیرند تا به بهترین تصمیم دست یابند.

۱.۲.۱ عناصر اصلی یک مسئله تصمیم آماری

همانطور که بیان کردیم مشاهدات ابزار سودمندی برای استنباط در مورد پارامتر θ (یا بردار θ) هستند. برای استفاده از این ابزار نیازمند به فرمول‌بندی و معرفی تمام مولفه‌ها در یک تصمیم آماری هستیم. برای این منظور در این بخش عنصرهای اصلی یک مسئله تصمیم آماری را معرفی می‌کنیم. عنصرهای اصلی یک مسئله تصمیم آماری عبارتند از:

۱. داده: یافته یک متغیر تصادفی X با فضای نمونه‌ای $\mathcal{X}$.

۲. وضع طبیعت: پارامتر واقعی و نامعلوم θ که می‌خواهیم در مورد آن استنباط انجام دهیم.

۳. فضای پارامتر: همه مقادیر قابل قبول وضع طبیعی که با Θ نمایش می‌دهیم.

۴. مدل[۳۵]: خانواده $F = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ از توزیع‌های احتمال ممکن، برای X، که به پارامتر θ وابسته‌اند.

۵. فضای عمل: مجموعه کلیه عمل‌های ممکن برای پارامتر نامعلوم θ را فضای عمل گفته و اغلب با نماد $\mathcal{A}$ نمایش می‌دهند.

۶. قاعده تصمیم: شیوه به کار بردن داده‌ها بعنوان کمکی در تصمیم گیری شامل یک قاعده یا مجموعه‌ای از دستورات می‌باشد. در واقع، یک قاعده تصمیم تعیین می‌کند که با مشاهده $x \in \mathcal{X}$، کدام عمل $a \in \mathcal{A}$ بایستی انتخاب شود و معمولا آن را با نماد $\delta(x)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر یک قاعده تصمیم تابعی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{A}$ است.

۷. تابع زیان: اگر $\theta \in \Theta$ حالت واقعی طبیعت باشد، در اینصورت ممکن است عمل a، درست، تا اندازه‌ای نادرست و یا کلا نادرست باشد. میزان نادرستی را با تابع زیان $\mathcal{L}(\theta, a)$ اندازه گیری می‌کنند که میزان زیان به کار بردن a، زمانی که θ مقدار واقعی حالت طبیعت باشد را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر تابع زیان، تابعی از $\Theta \times \mathcal{A}$ به $\mathbb{R}^+$ است. برای آگاهی بیشتر در خصوص لزوم استفاده از تابع زیان بخش ۲.۵ را ببینید.

۸. تابع مخاطره[۳۶]: هنگامی که قاعده تصمیم معلوم $\delta(x)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، نه تنها زیان حاصل به حالت واقعی طبیعت بستگی دارد بلکه به مقدار $X = x$ نیز وابسته است. از آنجایی که X یک متغیر تصادفی است، $\mathcal{L}\left(\theta, \delta(X)\right)$ نیز یک متغیر تصادفی است. عموما در آمار متوسط زیان مورد نظر است که از آن تحت عنوان تابع مخاطره یاد می‌کنند و آن را با $R(\theta, \delta) = E_\theta\left[\mathcal{L}\left(\theta, \delta(X)\right)\right]$ نمایش می‌دهند که در آن

$$E_\theta\left[\mathcal{L}\left(\theta, \delta(X)\right)\right] = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(\theta, \delta(x))\, \mathrm{d}F_\theta(x), \qquad \theta \in \Theta. \qquad (۱.۱)$$

در حقیقت میزان دقت و یا عدم دقت قاعده تصمیم با تابع مخاطره اندازه‌گیری می‌شود.

[۳۵] Model
[۳۶] Risk function

۹. فضای قواعد تصمیم: مجموعه تمام قواعد تصمیم ممکن را با $\mathcal{D}$ نمایش می‌دهند و آن را فضای قواعد تصمیم می‌نامند، معمولاً فضای قواعد تصمیم را حاوی تمام تصمیم‌های با مقادیر مخاطره متناهی در نظر می‌گیرند.

برای مشاهده توضیحات بیشتر در این زمینه به لهمن و رمانو[۳۷](۲۰۰۵) یا کریمی‌نژاد (۱۳۸۸) مراجعه کنید.

۳.۱ اصل بیز

در روش غیر کلاسیک بیزی، θ به عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع احتمال $\pi(\theta)$ در نظر گرفته می‌شود، که π را توزیع پیشین می‌نامند.

$f(x|\theta)$ تابع چگالی احتمال شرطی از متغیر تصادفی X است که در آن $\theta \in \Theta$ ثابت فرض شده، و با توجه به اینکه π توزیع θ است، در نتیجه تابع چگالی توام θ و X به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f(x,\theta) \quad = \quad \pi(\theta) f(x|\theta). \tag{۲.۱}$$

لازم به ذکر است که توزیع پیشین، بر اساس اطلاعات قبلی، اعتقادات، باورها و تجربیات آزمایشگر تعیین می‌گردد. بر اساس نمونه جمع‌آوری شده از جامعه، توزیع پیشین تصحیح می‌گردد، توزیع پیشین تصحیح شده را توزیع پسین[۳۸] می‌نامند. به‌عبارتی ترکیبی از اطلاعات حاصل از مشاهدات بدست آمده از جامعه (تابع درستنمایی) و توزیع پیشین را بعنوان معیار توزیع پسین برای تعیین برآوردگر پارامتر نامعلوم بکار می‌برند.

با توجه به این که θ خود یک متغیر تصادفی بوده و تابع مخاطره $R(\theta,\delta) = E_\theta[L(\theta,\delta)]$ تابعی از θ است، بنابراین تابع مخاطره نیز یک متغیر تصادفی است.

تعریف ۱.۳.۱. (لهمن و کسلا[۳۹]، ۱۹۹۸) امید ریاضی $R(\theta,\delta)$ نسبت به تابع $\pi(\theta)$ را مخاطره

[۳۷] Lehman and Romano
[۳۸] Posterior
[۳۹] Casella

بیز[۴۰] نامیده و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$r(\pi,\delta) \;=\; E_\pi\left[R(\theta,\delta)\right] = \int_\Theta R(\theta,\delta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{D}$ کلاس کلیه برآوردگرها باشد، برآوردگر δ^* را برآوردگر بیز[۴۱] گویند هرگاه مخاطره بیز را مینیمم کند، بعبارتی δ^* برآوردگر بیز است اگر

$$r(\pi,\delta^*) \;=\; \inf_{\delta\in\mathcal{D}} r(\pi,\delta). \qquad (۴.۱)$$

با استفاده از قضیه زیر می‌توان برآوردگر بیز را تحت تابع زیان دلخواه بدست آورد.

قضیه ۳.۳.۱. *(لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) فرض کنید θ دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)\in\Pi$ و متغیر تصادفی X از خانواده توزیع‌های $F=\{f: f_\theta(x)>0, \theta\in\Theta\}$ باشد، همچنین فرض کنید در مساله برآوردیابی با تابع نامنفی $\mathcal{L}(\theta,\delta)$ شرایط زیر برقرار باشد*

الف : برآوردگر δ_0 با مخاطره متناهی وجود داشته باشد.

ب : برای $x\in X$، برآورد $\delta^*(x)$ موجود باشد که مخاطره پسین

$$\rho\left(\pi(\theta|x),\delta(x)\right) \;=\; E\left[\mathcal{L}\left(\theta,\delta(X)\right)|X=x\right] = \int_\Theta \mathcal{L}\left(\theta,\delta(x)\right)\mathrm{d}\pi(\theta|x), \qquad (۵.۱)$$

را مینیمم کند که در آن

$$\pi(\theta|x) \;=\; \frac{\pi(\theta)\ f(x|\theta)}{\int_\Theta\ f(x|\theta)\ \mathrm{d}\pi(\theta)} \qquad (۶.۱)$$

چگالی پسین θ به شرط $X=x$ است. در این صورت $\delta^*(x)$ برآوردگر بیز است.

تعریف ۴.۳.۱. (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) برآوردگر δ^* را یک برآوردگر مینیماکس می‌نامند هرگاه ماکسیمم مخاطره را می‌نیمم کند و یا به عبارتی

$$\inf_{\delta\in D}\ \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta) = \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta^*) \qquad (۷.۱)$$

[۴۰] Bayes risk
[۴۱] Bayes estimator

در حقیقت یک برآوردگر مینیماکس با می‌نیمم کردن ماکزیمم تابع مخاطره بهترین برآوردگر را در بدترین حالت (برآوردگرهایی با تابع مخاطره ماکزیمم) انتخاب می‌کند.

تعریف ۵.۳.۱. برآوردگر δ غیر مجاز[۴۲] است اگر

$$\exists\, \delta^* \in D \quad s.t \quad \forall\, \theta \in \Theta \qquad R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta) \tag{۸.۱}$$

و حداقل به ازای یک مقدار $\theta \in \Theta$ نامساوی اکید باشد. هرگاه چنین برآوردگری وجود نداشته باشد آنگاه δ را مجاز می‌گویند. به‌عبارتی اگر δ غیرمجاز نباشد مجاز است.

با توجه به تعریف ۵.۳.۱، یک برآوردگر مجاز از یک دیدگاه برآوردگر خوبی است زیرا هیچ برآوردگری مخاطره کمتری نسبت به آن ندارد. حال اگر بدانیم که یک برآوردگر غیر مجاز است باید به دنبال برآوردگری بگردیم که مخاطره کمتری نسبت به آن داشته باشد.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید Π خانواده توزیع‌های پیشین θ باشد در این‌صورت توزیع پیشین $\pi \in \Pi$ را بی‌اطلاع[۴۳] گویند هرگاه حاوی هیچ اطلاعی در مورد پارامتر θ نباشد.

تعریف ۷.۳.۱. توزیع پیشین $\pi \in \Pi$ را ناسره[۴۴] گوییم اگر $\int_\Theta \mathrm{d}\pi(\theta) \neq ۱$ و سره[۴۵](مناسب) گوییم اگر π یک تابع احتمال باشد.

تعریف ۸.۳.۱. اگر توزیع پیشین ناسره باشد برآوردگری که مخاطره پسین را می‌نیمم می‌کند، برآوردگر بیز تعمیم یافته [۴۶] است.

در ادامه به بیان لم‌ها و قضایای مورد نیاز در این فصل می‌پردازیم.

قضیه ۹.۳.۱. (*روهاتکی و صالح*[۴۷]، ۲۰۰۱)

فرض کنید $F = \{f : f_\theta(x) > ۰, \theta \in \Theta\}$ یک خانواده از توزیع های احتمال و δ^* برآوردگر بیز باشد، اگر تابع مخاطره ثابت باشد δ^* برآوردگر مینیماکس است.

[۴۲] Inadmissible
[۴۳] Non-informative
[۴۴] Improper
[۴۵] Proper
[۴۶] Generalized Bayes estimator
[۴۷] Rohatgi and Saleh