

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ - زنجان



# رفتارهای دینامیکی پیچیده در سیستم‌های اخترفیزیکی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

سعید تقوی وله موزوئی

استاد راهنما: دکتر یوسف عزیزی

۱۸ فروردین ۱۳۹۳

تقدیم به همه آنهایی که می‌خواهند بیشتر بدانند.

# مشکروقدردانی

در این جا از خانواده خوبم که در همه مراحل زندگی از من حمایت کردند تشکر می کنم. همچنین از دوستان عزیزم که در این دوره خاطرات خوب زیادی با هم داشتیم نیز تشکر می کنم و عمیق ترین تشکرات خویش را تقدیم می کنم به استاد بزرگوارم دکتر عزیزی که این پروژه را با همراهی و راهنمایی های ایشان انجام دادم.

## چکیده

در این پایان نامه ما به بررسی مفاهیم سیستم‌های دینامیکی و برخی از ابزارهای مورد استفاده برای مطالعه این سیستم‌ها مثل نگاشت پوانکاره و نمای لیپانوف پرداختیم؛ و در ادامه سیستم‌های آشوبناک و شرایط لازم برای ظهور آشوب در یک سیستم دینامیکی و خواص فرکتالی سیستم‌های آشوبناک را مرور کردیم. در فصل سوم به چند مثال از سیستم‌های اخت‌فیزیکی که رفتارهای دینامیکی پیچیده‌ای دارند پرداختیم و در فصل آخر نگاهی به مسئله فرار یکی از ذرات درون یک سیستم سه‌تایی و ساختار ایجاد شده‌ی مربوط به پیکربندی‌های منجر به فرار داشتیم.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم‌های دینامیکی، آشوب، رفتارهای دینامیکی پیچیده، سیستم سه‌ذره‌ای.

# فهرست

پنج	چکیده	.....
۱	سیستم‌های دینامیکی	۱
۱	۱.۱ مقدمه	.....
۹	۲.۱ دسته‌بندی نقاط بحرانی	.....
۱۷	۳.۱ ابزارها	.....
۱۷	۱.۳.۱ نگاشت پوانکاره	.....
۲۳	۲.۳.۱ بدست آوردن نگاشت پوانکاره یک سیستم چهاربعدي	.....
۲۸	۳.۳.۱ نمای لیپانوف	.....
۳۰	۴.۳.۱ محاسبه عددی نمای لیپانوف برای یک سیستم دوبعدی	.....
۳۴	۴.۱ فرکتال‌ها و ابعاد فرکتالی	.....
۴۰	۲ آشوب	.....
۴۱	۱.۲ خواص سیستم‌های آشوبناک	.....
۴۱	۱.۱.۲ حساسیت نسبت به شرایط اولیه	.....
۴۴	۲.۱.۲ آمیختگی توپولوژیکی یا تعدی توپولوژیکی	.....
۴۵	۳.۱.۲ تراکم مدارهای دوره‌ای	.....

۴۶	.....	۲.۲	خواص فرکتالی حرکت آشوبناک و جاذب‌های عجیب
۵۱		۳	مدل‌های اخترفیزیکی ساده
۵۲	.....	۱.۳	دینامیک جمعیت ستاره‌ای
۵۶	.....	۲.۳	نوسانات غیرخطی در مدل تک منطقه‌ای برای ستاره‌های تپنده
۶۳	.....	۳.۳	مدار ستاره‌ها در یک پتانسیل کلهکشان
۷۰		۴	فرار از سیستم سه جسمی گرانشی
۷۶	.....	۱.۴	فرار در مسئله سه جسمی
۸۷	.....	۲.۴	ساختارهای خودمتشابه جواب‌های مقید در فضای فاز سه جسم گرانشی
۸۸	.....	۱.۲.۴	مرزهای حوزه فرکتالی
۸۹	.....	۲.۲.۴	نتایج
۹۲		آ	معرفی برنامه <i>Catena</i>
۹۹	.....		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

## فهرست تصاویر

۵	. . . . . ۷.۱ [ب] پرتره فاز سیستم ۴.۱ ، [الف] پرتره فاز سیستم ۴.۱	۱.۱
۱۴	جهت زمان را نشان می‌دهند [۱] . . . . .	۲.۱
۱۸	سطح مقطع پوانکاره و نگاشت پوانکاره برای دو مدار دوره‌ای و غیر دوره‌ای [۷] .	۳.۱
۱۹	(سمت راست) تعدادی نگاشت پوانکاره از جاذب عجیب روسلر که توسط صفحاتی که بر صفحه $x - y$ عمود هستند و با محور $x$ زاویه‌های $(a) 60^\circ -$ درجه، $(b) 0^\circ$ درجه، $(c) 60^\circ$ درجه و $(d) 120^\circ$ درجه می‌سازند تعریف شده اند. (چپ) نمای جانبی و نمای صفحه $x - y$ یک مسیر نوعی با اضافه کردن مقاطع پوانکاره [۸] .	۴.۱
۲۰	مدار $x_1$ دوره‌ای و از یک ۴ نقطه دوره‌ای تشکیل شده است [۸] . . . . .	۵.۱
۲۱	نقطه ثابت از نوع گره پایدار . . . . .	۶.۱
۲۱	نقطه ثابت از نوع گره ناپایدار . . . . .	۷.۱
۲۲	نقطه ثابت از نوع نقطه زینی . . . . .	۸.۱
۲۲	نقطه ثابت از نوع کانون پایدار . . . . .	۹.۱



۲۳	۱۰.۱	نقطه ثابت از نوع کانون ناپایدار
۲۳	۱۱.۱	نقطه ثابت از نوع مرکز
۲۶	۱۲.۱	محل برخورد مدار با مقطع پوانکاره
۲۸	۱۳.۱	نگاشت پوانکاره سیستم هنون-هیلزبا انرژی $E = ۰/۰۲$ [۹]
	۱۴.۱	محاسبه نمای لیپانوف در زمان طولانی به مقیاس بندی دوباره جدایی بین دو مسیر
۲۹		نیاز دارد.
۳۲	۱۵.۱	تنظیم دوباره مدارها بعد از هر مرحله تحول [۱۲]
۳۳	۱۶.۱	نمای لیپانوف محاسبه شده برای نگاشت هنون، $۰ < C < ۱/۴$ , $B = ۰/۳$
۳۴	۱۷.۱	نمای لیپانوف محاسبه شده برای نگاشت لوجستیک.
۳۵	۱۸.۱	ساختن مجموعه کانتور [۱۴]
۳۹	۱۹.۱	مدار فوتون‌ها به دور دو سیاه‌چاله [۱۳]
	۱.۲	سری تولید شده توسط نگاشت لوجستیک با دو مقدار اولیه متفاوت $x_0 = ۰/۳۵$
۴۲		و $x_0 = ۰/۳۵۰۱$
	۲.۲	یک سیستم دینامیکی ساده که توسط دو برابر کردن مکرر یک مقدار اولیه تولید می‌شود؛ با وجود این که این سیستم همه جا به شرایط اولیه وابسته است اما رفتار
۴۴		آشوبناک ندارد.
۴۷	۳.۲	اثر کشیدگی و پیچ خوردن روی بخشی از فضای فاز [۳]
۴۸	۴.۲	تاثیر نگاشت بیکر روی شکل یک صورت [۳].
۴۹	۵.۲	سه شکل اول تولید شده از مربع واحد تحت نگاشت بیکر [۳]
۴۹	۶.۲	ضخامت نوارهای جاذب $A$ در مرحله $n$ ام اعمال نگاشت بیکر [۳]
	۷.۲	جاذب لورنز رفتار آشوبناک دارد. در شکل می‌توان حساسیت نسبت به شرایط اولیه
۵۰		درون ناحیه‌ای از فضای فاز که توسط جاذب اشغال شده است را دید [۲۲]

- ۱.۳ پیدا کردن نقاط ثابت یک نگاشت به روش هندسی. در شکل [a] سه مرحله اول نشان داده شده‌اند که در مراحل بعدی با توجه به پایداری نقطه ثابت  $x^*$  به طور
- ۵۴ ماریچ به سمت داخل (شکل [b]) یا خارج (شکل [c]) حرکت می‌کنند. [۲۳]
- ۲.۳ نمودار دوشاخگی نگاشت لوجستیک. محور افقی پارامتر کنترل  $r$  و محور عمودی مقدار حدی مربوط به پارامتر کنترل مربوطه است. . . . . ۵۶
- ۳.۳ طرحی از مدل تک منطقه‌ای نوسان ستاره بدون ناحیه یونیزه که از هسته‌ای به جرم  $M$ ، پوسته‌ای کروی به جرم  $m$  و شعاع  $R$  تشکیل شده است؛ فضای بین هسته تا پوسته با گازی بدون جرم با فشار  $P$  پر شده است. [۲۸] . . . . . ۵۷
- ۴.۳ شتاب شعاع لایه خارجی برای مقادیر مختلف انتروی. . . . . ۵۹
- ۵.۳ شعاع بر حسب زمان برای مقادیر متفاوت  $\epsilon$ :  $(a)\epsilon = 0/04$ ,  $(b)0/15$ ,  $(c)0/205$ ,  $(d)4/0$  ۶۰
- ۶.۳ طرح فضای فاز برای جواب‌های نشان داده شده در شکل ۵.۳ روی صفحه  $(R, \dot{R})$  . . . . . [۲۷] ۶۱
- ۷.۳ درخشندگی بر حسب زمان برای جواب‌هایی که در شکل ۶.۳ توصیف شده‌اند [۲۷]. ۶۲
- ۸.۳ نگاشت پوانکاره سیستم هنون-هیلز با انرژی‌های متفاوت [۲۶]. . . . . ۶۷
- ۹.۳ مساحت مربوط به جزایر پایداری [۲۶]. . . . . ۶۸
- ۱۰.۳ محاسبه نمای لیاپانوف برای سیستم هنون-هیلز در انرژی‌های مختلف. . . . . ۶۹
- ۱۱.۳ شکل‌های خودمتمشابه در نگاشت پوانکاره سیستم هنون-هیلز با انرژی  $E = 0/12500$ . . . . . ۶۹
- ۱.۴ پیکربندی اولیه مسئله فیثاغورس . . . . . ۷۲
- ۲.۴ مسیرهای مسئله فیثاغورس، از آن‌جا که فرار صورت گرفته و اجرام خارج از چارچوب شکل‌ها وجود دارند دو شکل نهایی شبیه هستند. . . . . ۷۴
- ۳.۴ پراکندگی با تشدید در مسئله سه ذره‌ای [۳۰]. . . . . ۷۵

۴.۴	تحول زمانی سیستم سه ذره‌ای برای دو سیستم متفاوت با تغییرات کمی در شرایط اولیه. محور عمودی فاصله سه ذره تا مرکز جرم سیستم و محور افقی زمان را نشان می‌دهد. . . . .	۷۷
۵.۴	پیکربندی مسئله سه ذره‌ای. . . . .	۷۸
۶.۴	مخروط فرار، ذره‌گریزان در رأس مخروط قرار دارد و چون باید در گذشته برهمکنش قوی‌ای با دوتایی انجام داده باشد پس از درون مخروط آمده است. . . . .	۸۱
۷.۴	مقایسه رابطه ۲۵.۴ با داده‌های عددی حاصل از شبیه‌سازی‌ها. در شبیه‌سازی‌ها همه جرم‌ها برابر بودند. در مجموعه اول (+) ذره سوم به طور مستقیم درون دوتایی سقوط می‌کرد؛ و در مجموعه دوم ( $\diamond$ ) ذره سوم مولفه سرعت عرضی هم دارد. کمیت رسم شده $z =  E_0 / E_B $ است و با تغییر متغیر توزیع انتظاری باید به شکل $f(z) = 3/5 z^{2/5}$ باشد که با خط‌چین نشان داده شده است. نقاط نشان داده شده از دو مجموعه ۱۰۰۰۰ تایی شرایط اولیه تولید شده‌اند و بنابراین خطای کمی دارند که نشان داده نشده است [۳۴]. . . . .	۸۶
۸.۴	محک زدن توزیع خروج از مرکز رابطه ۲۶.۴ با استفاده از ۱۰۰۰۰ مدار محاسبه شده به کمک رایانه با تکانه زاویه‌ای $L = 0/15$ [۳۴]. . . . .	۸۷
۹.۴	طرح دو جاذب و مرز بین حوزه‌های جذب‌شان در فضای فاز. . . . .	۸۸
۱۰.۴	مدار حرکت سه جسم برای چند شرط اولیه متفاوت [۳۸]. . . . .	۹۰
۱۱.۴	از ۴۰۰ شرط اولیه بررسی شده، برای نقاطی که مشخص کردیم مسئله سه ذره جواب مقید دارد [۳۸]. . . . .	۹۱
۱۲.۴	از ۴۰۰۰۰ شرط اولیه بررسی شده، برای نقاطی که مشخص کردیم مسئله سه ذره جواب مقید دارد [۳۸]. . . . .	۹۱

# فصل اول

## سیستم‌های دینامیکی

### ۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه عمدتاً با سیستم‌های دینامیکی هامیلتونی سرو کار داریم که گروه خاصی از سیستم‌های دینامیکی پیوسته را در بر می‌گیرند. بنابراین به جای شروع از تعریف کلی سیستم‌های دینامیکی به مواردی می‌پردازیم که در این پروژه موضوع بحث ما خواهند بود. سیستم‌های دینامیکی را مجموعه‌ای از  $m$  معادله دیفرانسیل معمولی با متغیرهای  $x_1, x_2, \dots, x_m$  و  $x_m$  تعریف می‌کنیم.

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m, t), i = 1, 2, \dots, m \quad (1.1)$$

و در نمادگذاری برداری

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

در رابطه ۱.۱ متغیر مستقل  $t$  زمان را مشخص می کند و فرض می کنیم که  $m$  تابع  $X_i$  در  $m + 1$  بُعد مناسب تعریف شده اند و آنجا شرایطی را ارضا می کنند که تحت آن قضیه وجود و یکتایی جواب برقرار باشد. فضای  $m$  بعدی  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  فضای فاز<sup>۱</sup> نامیده می شود و در حال حاضر همان فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^m$  است. اگر توابع  $X_i$ ، که میدان برداری  $X$  را تعریف می کنند، به طور صریح<sup>۲</sup> به زمان بستگی نداشته باشند، سیستم مستقل از زمان<sup>۳</sup> نامیده می شود. در حالت کلی، یکی از جواب های معادله ی ۱.۱ بردار  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(x_0), t_0, t)$  خواهد بود که شرط اولیه  $\mathbf{x}(x_0, t_0) = \mathbf{x}_0$  در آن صدق می کند. برای یک سیستم مستقل از زمان، خواص انتقال باعث می شود که: اگر  $\mathbf{x}(t)$  یکی از جواب ها باشد، آنگاه  $\mathbf{x}(t - \alpha)$  با  $\alpha$  ثابت نیز یکی از جواب ها است. اثبات این مسئله سراسر است، زیرا در این حالت سمت راست رابطه ۲.۱ وابسته به زمان نمی باشد.

در مورد سیستم مستقل از زمان، می توانیم یکی از  $x_i$  ها، برای مثال  $x_1$  (اگر  $X_1 \neq 0$  به ازای هر  $\mathbf{x}$ )، را به جای  $t$  به عنوان متغیر مستقل جدید استفاده کنیم و  $m - 1$  معادله بدست آوریم

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(\mathbf{x})}{X_1(\mathbf{x})}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{X_3(\mathbf{x})}{X_1(\mathbf{x})}, \quad \dots, \quad \frac{dx_m}{dx_1} = \frac{X_m(\mathbf{x})}{X_1(\mathbf{x})} \quad (3.1)$$

جواب مجموعه ۳.۱ در فضای فاز، منحنی فاز نامیده می شود.

اگر قضیه وجود و یکتایی جواب برای مجموعه ۱.۱ برقرار باشد، برای مجموعه ۳.۱ هم برقرار خواهد بود؛ بنابراین منحنی های فاز همدیگر را قطع نمی کنند. باید به خاطر داشته باشیم که جواب های مختلف  $\mathbf{x}(t)$  و  $\mathbf{x}(t - \alpha)$  مربوط به منحنی فاز یکسان می باشند. اگر نقطه  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  وجود داشته باشد که  $\mathbf{X}_i(\mathbf{a}) \equiv 0$  آنگاه نقطه  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$  نقطه بحرانی<sup>۴</sup> یا نقطه تکین<sup>۵</sup> نامیده می شود. واضح

<sup>۱</sup> Phase space

<sup>۲</sup> Explicitly

<sup>۳</sup> Autonomous

<sup>۴</sup> Critical point

است که در چنین نقطه‌ای کاهش دادن سیستم به یک مجموعه  $m - 1$  معادله‌ای، با حذف کردن زمان، آنچنان که در ۳.۱ انجام دادیم امکان پذیر نمی‌باشد. نقطه بحرانی را می‌توان به عنوان منحنی فازی که در یک نقطه ته‌نگن شده است در نظر گرفت. علاوه بر این، اگر در نقطه بحرانی  $(\forall t) \dot{x}_i = 0$  باشد آنگاه نقطه بحرانی مربوط به جواب تعادلی است؛  $x_i(t) = a_i (\forall t)$  جواب یکتایی از سیستم است که از  $a$  می‌گذرد، و اگر جوابی متمایز باشد،  $y(t) \neq a (\forall t)$  خواهد بود. با این وجود، ممکن است که برای  $t \rightarrow \infty$  بعضی از جواب‌ها به حالت تعادلی میل کنند؛ در این حالت جواب تعادل، جاذب<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. به صورت دقیق‌تر، یک نقطه بحرانی  $x = a \in \mathbb{R}^m$  جاذب مثبت<sup>۲</sup> نامیده می‌شود اگر در همسایگی  $\Omega_a \subset \mathbb{R}^m$  نقطه  $a$ ، نقطه  $x(t)$  وجود داشته باشد که در حد  $t \rightarrow +\infty$ ،  $x \rightarrow a$  میل کند. وقتی  $t \rightarrow -\infty$  و  $x$  به  $a$  میل کند، جاذب منفی<sup>۳</sup> خواهیم داشت. اگر جواب  $x = x(t)$  در بازه  $I \subset \mathbb{R}$  با مقادیر  $x(t) \in D \subset \mathbb{R}^m$  به صورتی تعریف شود که  $(T \geq 0)$   $x(t) = x(t + T)$  برقرار باشد، آنگاه  $x$  جواب دوره‌ای<sup>۴</sup> با دوره‌ی  $T$  نامیده می‌شود. از  $x(t) = x(t + T)$  می‌توان دریافت باشد،  $x(t) = x(t \pm nT)$ ، که در آن  $n$  هر عدد صحیحی است. با در نظر گرفتن فضای فاز سیستم، از آنجا که برای جواب دوره‌ای  $x_1, x_2, \dots, x_m$  در زمان  $t + T$  دوباره مقادیری که در  $t$  داشتند را می‌گیرند، نتیجه می‌گیریم که جواب دوره‌ای موجب منحنی فاز بسته<sup>۵</sup> (یا چرخه<sup>۶</sup>) می‌شود. با استفاده از خواص انتقال سیستم‌های مستقل و این حقیقت که چندین جواب انتقال داده شده با منحنی فاز یکسانی متناظر هستند، می‌توان نشان داد که: هر منحنی فاز بسته با یک جواب دوره‌ای متناظر است. برای مثال، سیستم

<sup>۵</sup> Singular point

<sup>۱</sup> Attractor

<sup>۲</sup> Positive attractor

<sup>۳</sup> Negative attractor

<sup>۴</sup> Periodic solution

<sup>۵</sup> Closed phase curve

<sup>۶</sup> Cycle

زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \quad (4.1)$$

جوابها ترکیبهای خطی از  $\sin t$  و  $\cos t$  هستند و برای  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$  جوابی دوره‌ای با دوره  $T = 2\pi$  داریم. منحنی‌های فاز با تبدیل 4.1 به

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} \quad (5.1)$$

بدست می‌آیند. با انتگرال‌گیری از 5.1 خواهیم داشت:

$$x_1^2 + x_2^2 = \text{const.} \quad (6.1)$$

در این مثال، منحنی‌های فاز دایره‌های متحدالمرکز هستند.

از  $x_1 = a \cos t + b \sin t$ ،  $x_2 = -a \sin t + b \cos t$  و  $a, b \in \mathbb{R}$  آشکار است که نقطه بحرانی  $x_1 = x_2 = 0$  جاذب نیست. در عوض اگر سیستم زیر را در نظر بگیریم

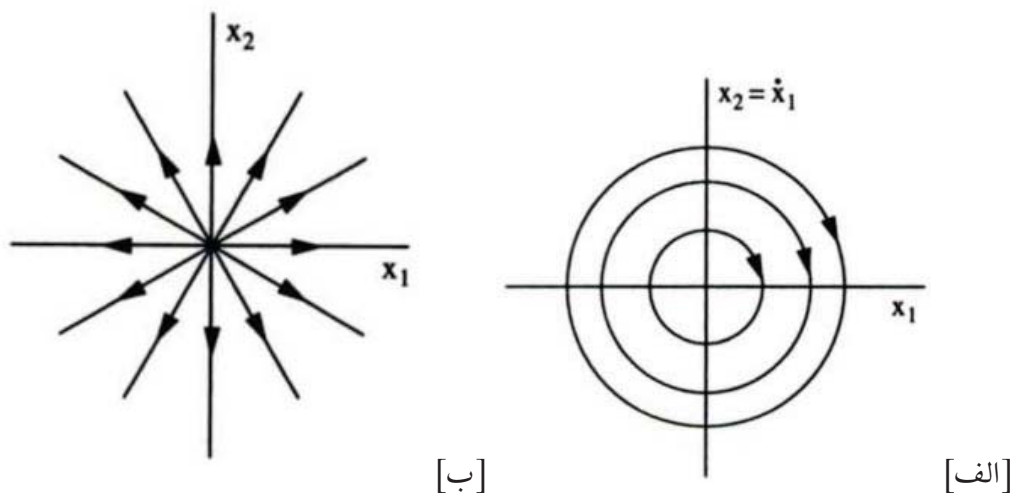
$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 \quad (7.1)$$

منحنی‌های فاز

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} \quad (8.1)$$

خواهند بود و با انتگرال‌گیری خواهیم داشت  $x_2 = \alpha x_1$ ،  $\alpha \in \mathbb{R}$ . در این سیستم منحنی‌های فاز

خط‌های صافی هستند که از مبدأ می‌گذرند.  $x_1 = c_1 e^t$  و  $x_2 = c_2 e^t$  بدست می‌آیند به طوری که جواب تعادلی  $(0, 0)$  جاذبی منفی است. پیکان‌های درون شکل جهت حرکت نقاط فاز را با افزایش زمان نشان می‌دهند. این حرکت جریان فاز<sup>۱</sup> نامیده می‌شود و طرح مجموعه‌ای از منحنی‌های فاز (متناظر با شرایط اولیه متفاوت) را پرتره فاز<sup>۲</sup> می‌نامند.



شکل ۱.۱: [الف] پرتره فاز سیستم ۴.۱، [ب] پرتره فاز سیستم ۷.۱.

در دو مثالی که ارائه شد، این امکان وجود داشت که با انتگرال‌گیری از سیستم ۳.۱ رابطه بین مولفه‌های  $x$  را پیدا کرد. این رابطه یک منیفولد  $m - 1$  بعدی، زیرمجموعه فضای فاز  $m$  بعدی را تعریف می‌کند و سطح تراز ثابت<sup>۳</sup> را به صورت تابعی از  $x_1, x_2, \dots, x_m$  مشخص می‌کند. این سطح تراز ثابتی را که در حالت کلی می‌توان به صورت

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = const. \quad (9.1)$$

<sup>۱</sup> Phase flow

<sup>۲</sup> Phase portrait

<sup>۳</sup> Level set



نشان داد، منیفولد انتگرال<sup>۱</sup> و تابع  $F(x)$  را انتگرال اول<sup>۲</sup> سیستم  $\dot{x} = X(x)$  می‌نامند. به طور کلی، تابع حقیقی و مشتق‌پذیر  $F(x)$  را انتگرال اول سیستم  $\dot{x} = X(x)$  می‌نامیم اگر در امتداد یکی از جواب‌های سیستم ثابت بماند، یعنی

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \dot{x}_m = 0 \quad (10.1)$$

وجود یک انتگرال اول باعث کاهش یافتن ابعاد فضای فاز در دسترس سیستم می‌شود. در نتیجه منحنی‌های فاز، زیر مجموعه‌هایی از این منیفولد  $m - 1$  بعدی هستند. در دو موردی که دیدیم، با  $m = 2$ ، منحنی‌های فاز با منیفولد انتگرال منطبق شدند.

از آنجایی که مثال‌هایی که تا اینجا در نظر گرفتیم بسیار ساده بودند (سیستم‌های خطی با ضرایب ثابت مثل ۴.۱ و ۷.۱)، روش انتگرال‌گیری بر پایه کم کردن مرتبه سیستم با استفاده از انتگرال اول ممکن است روش دست و پاگیری به نظر برسد. با این حال، در موارد پیچیده‌تر ضروری است، بنابراین توضیح کاربردهایش ارزشمند است. سیستم ۴.۱، نوسانگر هماهنگ، را در نظر بگیرید. همان طور که می‌دانیم، جواب را می‌توان به صورت  $x_1 = x = A \sin(t + \phi)$  و  $x_2 = \dot{x} = A \cos(t + \phi)$  که  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  و  $\phi = \arctan(a/b)$  نوشت. از انتگرال اول ۶.۱ که آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = I_1 \quad (11.1)$$

---

<sup>۱</sup> Integral manifold

<sup>۲</sup> First integral

و از نخستین رابطه ۴.۱ بدست می‌آوریم:

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm \sqrt{2I_1 - x_1^2} \quad (۱۲.۱)$$

که با انتگرال‌گیری بدست می‌آوریم

$$\int dt = \pm \int \frac{dx_1}{\sqrt{2I_1 - x_1^2}} \quad (۱۳.۱)$$

یعنی

$$t + I_2 = \arcsin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2I_1}}\right) \quad (۱۴.۱)$$

در این رابطه  $I_2$  ثابت انتگرال‌گیری است. سرانجام با معکوس کردن ۱۴.۱ خواهیم داشت

$$x_1 = \sqrt{2I_1} \sin(t + I_2) \quad (۱۵.۱)$$

اگر  $A = \sqrt{2I_1}$  و  $\phi = I_2$  باشد، جواب بدست آمده با جوابی که پیش از این ذکر شد منطبق است. ثابت‌های انتگرال‌گیری نیز با شرایط اولیه مشخص می‌شوند؛ اگر  $x_1(0) = x_1^0$  و  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0$  خواهیم داشت:

$$I_1 = \frac{1}{2}(x_1^0)^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1^0)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad I_2 = \phi = \arctan \frac{x_1^0}{\dot{x}_1^0} = \arctan \frac{a}{b}. \quad (۱۶.۱)$$

به طور خلاصه فرآیندی که دنبال کردیم شامل چهار مرحله می‌شود:

آ) پیدا کردن انتگرال اول؛

ب) کاهش دادن مرتبه سیستم توسط انتگرال حرکت پیدا شده؛

پ) انتگرال گیری از سیستم کاهش یافته؛

ت) معکوس کردن و بدست آوردن جواب.

بدیهی است که، برای انتگرال گیری صریح از یک سیستم مرتبه  $m$  به  $m - 1$  انتگرال اول نیاز داریم. طبق تعریف ۹.۱ تا به حال فقط انتگرال های اول را در نظر گرفته بودیم که فقط تابعی از  $x_1, x_2, \dots, x_m$  بودند و تابع زمان  $t$  نبودند. با این حال، بعضی اوقات انتگرال هایی وجود دارند که به زمان هم بستگی دارند. برای توضیح این موضوع یکی از بهترین مثال ها سیستمی است که یک حرکت نوسانی میرا را توصیف می کند:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \lambda x_2, \quad (17.1)$$

جایی که  $\lambda$  یک ثابت مثبت است. انتگرال اول به صورت زیر خواهد بود:

$$e^{\lambda t}(x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_1 x_2) = I_1 = const. \quad (18.1)$$

و همانطور که مشاهده می شود این انتگرال حرکت به زمان وابسته است.

ادامه بحث در مورد سیستم ۱۷.۱ برای ما جذابیت ندارد، اما باید سیستم های ۴.۱ و ۱۷.۱ را برای پیش بینی گروه بندی ای که خیلی مهم است استفاده کنیم: تفاوت بین سیستم های «پایستار» و «ناپایستار». اگر  $x_1 = x$  و  $x_2 = \dot{x}$  قرار دهیم، دو سیستم ذکر شده به ترتیب با  $\ddot{x} = -x$  و  $\ddot{x} = -x - \lambda \dot{x}$  معادل خواهند شد. سیستمی را پایستار می نامیم که

$$\ddot{x} = f(x) \quad (19.1)$$

و ناپایستار می‌نامیم اگر

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}) \quad (20.1)$$

در مکانیک، مورد اول نیرویی را نشان می‌دهد که از یک پتانسیل ناشی شده است و فقط به مکان بستگی دارد و در مورد دوم نیرو به سرعت نیز وابسته است. در مورد اول (سیستم پایستار) انرژی کل پایسته است.

## ۲.۱ دسته‌بندی نقاط بحرانی

فرض کنیم که سیستم ۲.۱ در  $x = a$  نقطه بحرانی دارد، در این حالت بسط تیلور در همسایگی  $x = a$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = \mathbf{X}(x, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x}(x, t) \right|_{x=a} (x - a) + O(|x - a|^2). \quad (21.1)$$

اگر جمله اول بسط ۲۱.۱ را در نظر بگیریم، یعنی ما سیستم ۲.۱ را با تقریب خطی‌اش جایگزین کرده‌ایم. بعداً خواهیم دید که تقریب خطی، معنادار و پر از اطلاعات در مورد جواب سیستم پیچیده است. در حالتی که سیستم کاملاً مستقل از زمان است، ماتریس مربعی  $m \times m$ ، که به صورت  $(\partial \mathbf{X} / \partial x)|_{x=a}$  مشخص می‌کنیم، درایه‌های ثابت خواهد داشت. در این حالت مرسوم است که با جابجایی محورهای مختصات، نقطه بحرانی را به مبدا انتقال دهیم.

بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله، خودمان را به بررسی سیستمی مستقل از زمان با نقطه‌ای