دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

بررسی مینیمم مجموع رنگ آمیزی

استاد راهنما

خانم دکتر نسرین سلطانخواه

دانشجو

زهرا تندپور

اسفند ۱۳۸۹

چکیده

اگر G یک گراف باشد، $\sum_k(G)$ کوچکترین مجموع ممکن بین همه $k-$رنگ‌آمیزی‌های رأسی سره از G که رنگ‌ها در آن‌ها اعداد طبیعی هستند را تعیین می‌کند و $\sum(G)$ مجموع رنگی رأسی G است که در واقع $\min_{k\geq\chi(G)}\sum_k(G)$ می‌باشد. شدت رأسی G که با $s(G)$ نمایش می‌دهیم، کوچکترین مقدار s است به طوری که $\sum_s(G)=\sum(G)$ شود. رنگ‌آمیزی رأسی سره $c:V(G)\rightarrow N$ یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای گراف G است هرگاه $\sum_{v\in V(G)}c(v)=\sum(G)$ باشد و همچنین اگر در چنین رنگ‌آمیزی به ازای هر رأس $v\in V(G)$، $c(v)\leq s(G)$ باشد، آنگاه رنگ‌آمیزی مینیمال c یک رنگ‌آمیزی بهینه برای گراف G است.

در این پایان‌نامه رنگ‌آمیزی مینیمال و همچنین رنگ‌آمیزی بهینه را روی درخت‌ها، گرافهای بازه‌ای، شکاف، دوبخشی، دوبخشی زنجیری، جدولی و ابرگرافها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی:رنگ‌آمیزی گراف، مجموع رنگی، شدت رأسی.

قدردانی و تشکر

سپاس بیکران پروردگار را که به انسان قدرت اندیشیدن بخشید تا به یاری این موهبت الهی راه ترقی و تعالی را پیموده و در درک علم که یکی از راه‌های تقرب به ذات اوست کوشا باشد.
روح آدمی لطیفه‌ای ربّانی است که خدای متعال در انسان به ودیعه نهاده، تا خود را آن گونه که شایسته است جستجو نماید و آنچه را که مطلوب واقعی اوست، طلب کند.
ای صاحب حمد و ثنا، با تمام وجود به درگاهت سجده شکر می گذارم که توفیق نگارش این پایان نامه را به من عطا فرمودی.
اکنون که به شکرانهٔ الهی و در سایهٔ ایزد منّان، این پروژه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند به ویژه، استاد محترم سرکار خانم دکتر سلطانخواه تشکر و قدردانی نمایم.
همچنین از جناب آقای دکتر حاج‌ابوالحسن و سرکار خانم دکتر اسکندری که زحمت داوری این پروژه را به عهده داشتند نهایت تشکر را دارم.
همچنین از سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و از خانوادهٔ عزیزم و به خصوص پدر و مادر و همسر گرامیم که یاور و مشوق من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلم بوده‌اند کمال امتنان را دارم.

مقدمه

رنگ‌آمیزی گرافها یکی از مسائل نظریه گراف است که کاربردهای زیادی دارد و تاکنون توجه زیادی را به خود جلب کرده است.
رنگ‌آمیزی رأسی در واقع تابعی مانند $f : V \longrightarrow N$ است که اگر به ازای هر دو رأس مجاور u و v، $f(u) \neq f(v)$ باشد، آنگاه f را یک رنگ‌آمیزی سره می‌نامیم.
در این پایان نامه روی نوعی از رنگ‌آمیزی رأسی به نام رنگ‌آمیزی مینیمال کار می‌کنیم که در آن مجموع رنگ‌های رأس‌ها نسبت به رنگ‌آمیزی‌های رأسی سره دیگر کمتر است. این رنگ‌آمیزی را روی درختها، گرافهای بازه‌ای، دوبخشی، دوبخشی زنجیری، شکاف، جدولی و ابرگرافها مورد بحث قرار می‌دهیم.
مطالب فصل‌های پایان‌نامه به این شرح است.
در فصل ۱ به بررسی تعاریف، پیشینه تاریخی و نتایج اولیه‌ی بدست آمده در مورد رنگ‌آمیزی مینیمال می‌پردازیم و بخش آخر فصل ۱ را نیز به بعضی از کاربردهای آن اختصاص داده‌ایم. مطالب این فصل از مراجع [۱]، [۳]، [۴] و [۱۰] انتخاب شده است.
در فصل ۲ کران‌هایی برای شدت رأسی گراف دلخواه G و همچنین کرانی برای شدت رأسی گرافهای خاص بازه‌ای و دوبخشی مطرح شده و حدس مهرآبادی در رابطه با شدت رأسی را نیز آورده‌ایم. مطالب این فصل نیز از مراجع [۳]، [۶] و [۷] انتخاب شده است.
در فصل ۳ کران‌هایی برای مجموع رنگی گراف دلخواه G و همچنین کرانی برای

مجموع رنگی و شدت رأسی گرافهای خاص دوبخشی زنجیری و شکاف را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۹] و [۱۱] می‌باشد.
در فصل ۴ کرانی برای شدت رأسی درخت‌ها ثابت کرده‌ایم و الگوریتمی نیز برای حل مسئله افراز رنگی هزینه بهینه (*optimum cost chromatic partition*) در مورد درخت‌ها را همراه با مثال مورد مطالعه قرار داده‌ایم. این فصل با توجه به مراجع [۵] و [۱۰] تنظیم شده است. فصل ۵ را نیز با الهام از [۱] به مسئله رنگ‌آمیزی مینیمال روی ابرگرافها و اثبات کران‌هایی برای عدد رنگی هزینه و مجموع رنگی آنها اختصاص داده‌ایم. فصل ٦ رنگ‌آمیزی مینیمال روی گرافهای جدولی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. مطالب فصل ٦ نیز برگرفته از [۴] می‌باشد و سرانجام در فصل ۷ نتیجه‌گیری مختصر و پیشنهاداتی مطرح شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و کاربردها

۱.۱ تعاریف

جفت $G = (V, E)$ را یک گراف می‌نامیم هرگاه $V = V(G)$ یک مجموعه متناهی از رأس‌ها و $E = E(G)$ یک مجموعه از زیرمجموعه‌های دو عضوی متمایز از V به نام یالها باشد.
یکی از موضوعات مهم نظریه گراف، رنگ‌آمیزی است که تاکنون توجه زیادی را به خود جلب کرده است. یک رنگ‌آمیزی از گراف G اختصاص رنگها به رأس‌های G است که در آن به هر رأس یک رنگ اختصاص می‌دهند. یک رنگ‌آمیزی را رنگ‌آمیزی سره گویند هرگاه در آن رأس‌های مجاور، رنگشان یکسان نباشد.
همان طور که از تعریف رنگ‌آمیزی گراف مشخص است یک رنگ‌آمیزی تابعی از مجموعه رأس‌های گراف به مجموعه‌ای مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.
رنگ‌آمیزی سره‌ای که در آن k رنگ استفاده شده باشد را یک k–رنگ‌آمیزی سره می‌گوییم. گراف G، k–رنگ‌پذیر است اگر برای یک مقدار $s(\geq k)$ یک s–رنگ‌آمیزی سره برای G وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱ مینیمم عدد صحیح k که به ازای آن G، k−رنگ‌پذیر باشد را عدد رنگی گراف G می‌نامیم و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ برای یک گراف $G=(V,E)$ اگر $C_k(G)$ مجموعه تمام k−رنگ آمیزی‌های رأسی سره از G باشد آنگاه $\min_{c\in C_k(G)}\sum_{v\in V(G)}c(v)$ که مینیمم مجموع رنگ‌ها بین همه k−رنگ آمیزی‌های رأسی سره از G می‌باشد را با $\sum_k(G)$ نمایش می‌دهیم.

از تعریف بالا بر می آید که $\sum(G)=\min_k\sum_k(G)$ مینیمم مجموع رنگ‌ها بین همه رنگ آمیزی‌های رأسی سره از G می‌باشد. به این مقدار مجموع رنگی گراف G می‌گوییم.
شدت رأسی G نشان داده شده با $s(G)$ را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۱ شدت رأسی گراف G کوچکترین مقدار s است به طوری که $\sum(G)=\sum_s(G)$ شود.

اگر رنگ آمیزی $c:V(G)\rightarrow N$ را برای گراف G داشته باشیم. مجموع رنگ‌های تمام رأس‌های گراف G را با نماد $\sum(G,c)$ نشان می‌دهیم. در واقع $\sum(G,c)=\sum_{v\in V(G)}c(v)$. مسئله مینیمم مجموع رنگ آمیزی مسئله‌ای است که در آن به دنبال رنگ آمیزی برای گراف G هستیم که مجموع رنگهای رأس‌ها در آن رنگ آمیزی $\sum(G)$ باشد که طبق تعریف زیر چنین رنگ آمیزی، رنگ آمیزی مینیمال نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ رنگ آمیزی رأسی سره c از G را یک رنگ آمیزی مینیمال گوییم هرگاه $\sum(G,c)=\sum(G)$ باشد.

تعریف ۵.۱.۱ رنگ آمیزی مینیمال c از G را یک رنگ آمیزی بهینه گوییم هرگاه برای هر رأس $v\in V(G)$، $c(v)\leq s(G)$ باشد.

اولین نتیجه‌ای که از تعاریف فوق بدست می‌آید، تحت گزاره زیر بیان شده است که در آن C_i کلاس رنگی i—ام از رنگ‌آمیزی c و $N(v)$ مجموعه همسایه‌های رأس v است.

گزاره ۱.۱ اگر G یک گراف و c یک رنگ‌آمیزی بهینه از آن باشد. آنگاه،

(S_1) $|C_1| \geq |C_2| \geq \ldots \geq |C_s|$.

(S_2) به‌ازای هر رأس $v \in C_i$ و هر $j < i$، $N(v) \bigcap C_j \neq \phi$.

(S_3) C_i مجموعه مستقل ماکزیمال در $G - \bigcup_{j<i} C_j$ است.

(S_4) برای هر گراف G، $\sum_{\chi(G)}(G) \leq \lfloor \frac{\chi(G)+1}{2} |V(G)| \rfloor$.

(S_5) $\sum(G - C_1) = \sum(G) - |V(G)|$.

(S_6) $s(G - C_1) = s(G) - 1$.

(S_7) $\Delta(G - C_1) \leq \Delta(G) - 1$.

اثبات گزاره. (S_1)،(S_2)،(S_3)،(S_5) و(S_6) با توجه به تعاریف بالا واضح است.

اثبات (S_4): از (S_1) واضح است که بیشترین مقدار برای $\sum_{\chi(G)}(G)$ زمانی رخ می‌دهد که $|C_1| = |C_2| = \cdots = |C_{\chi(G)}| = \lfloor \frac{|V(G)|}{\chi(G)} \rfloor$ باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{\chi(G)}(G) &= |C_1| + 2|C_2| + \cdots + \chi(G)|C_{\chi(G)}| \\ &\leq \lfloor \frac{|V(G)|}{\chi(G)} \rfloor (1 + 2 + \cdots + \chi(G)) = \lfloor \frac{\chi(G)+1}{2} |V(G)| \rfloor \end{aligned}$$

اثبات (S_7): در رنگ‌آمیزی بهینه c، برای هر رأس v با درجه $\Delta(G)$ یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت ۱: $v \in C_1$

حالت ۲: $\exists\, 2 \leq i \leq s(G) \mid v \in C_i$

اگر حالت ۱ رخ دهد که $v \notin V(G - C_1)$ و اگر حالت ۲ رخ دهد با توجه به(S_2)، $N(v) \bigcap C_1 \neq \phi$ در نتیجه $\deg_{G-C_1} v < \deg_G v = \Delta(G)$. بنابراین هیچ رأسی با درجه$\Delta(G)$ در $G - C_1$ وجود ندارد و در نتیجه $\Delta(G - C_1) \leq \Delta(G) - 1$. ■

طبق تعاریف، کران واضحی برای $\sum(G, c)$ که در آن c یک t−رنگ‌آمیزی از G است، بدست می‌آید که در لم زیر آن را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۱ اگر G یک گراف و c یک t-رنگ آمیزی از G باشد به طوری که $|C_1| \geq |C_2| \geq \cdots \geq |C_t|$، $|V(G)| = q|C_1| + r$ و $0 \leq r < |C_1|$ آنگاه

$$\sum(G,c) \geq \frac{1}{2}q(q+1)|C_1| + r(q+1).$$

اثبات. برای بدست آوردن مجموع کمتر در یک رنگ آمیزی، بهتر است که $|C_i|$ برای i های کوچکتر، بیشترین مقدار ممکن را دارا باشد. چون به ازای هر i، $1 \leq i \leq t$، $|C_i| \leq |C_1|$ است. مطلوب آن است که اندازه کلاس‌های رنگی تا حد امکان به $|C_1|$ نزدیک باشند یعنی تا حد امکان تعداد رأس‌های با رنگ‌های کوچکتر، بیشتر باشد. با توجه به این که $|V(G)| = q|C_1| + r$ بهترین حالت زمانی رخ می‌دهد که:

$$\forall i, 1 \leq i \leq q \;, \quad |C_i| = |C_1|$$

و کلاس C_{q+1} شامل r رأس باقی مانده باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}
&\sum(G,c) = |C_1| + 2|C_2| + \cdots + q|C_q| + (q+1)|C_{q+1}| + \cdots + t|C_t| \\
&\geq |C_1| + 2|C_1| + \cdots + q|C_1| + (q+1)r \\
&= |C_1|\frac{q(q+1)}{2} + (q+1)r
\end{aligned}$$

■

تعریف‌های زیر تعاریف گرافهایی است که در این پایان نامه پارامترهای ذکر شده را برای آنها بررسی می‌کنیم.

تعریف ۶.۱.۱ گراف $G = (V,E)$ را یک گراف بازه‌ای گوییم هرگاه رأس‌های آن متناظر بازه‌هایی روی اعداد حقیقی باشند و دو رأس از V به هم وصل باشند هرگاه اشتراک بازه‌های متناظر آنها ناتهی باشد. همچنین G را یک گراف بازه‌ای سره گوییم هرگاه بازه متناظر یک رأس زیر مجموعه‌ای از بازه‌ی متناظر با رأس دیگری نباشد.

تعریف ۷.۱.۱ گراف G یک گراف شکاف است هرگاه رأس‌های آن به یک خوشه C و یک مجموعه مستقل I افراز شود. در این صورت G را با نماد $G(C \cup I, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $\{V_{ij}\}$ها، $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، mn تا مجموعه متناهی دو بدو مجزا باشند. یک گراف جدول $T[V_{ij}]$ گرافی است که مجموعه رأس‌هایش $\bigcup_{i,j} V_{ij}$ باشد و دو رأس $u \in V_{ij}$ و $v \in V_{kl}$ به هم وصل باشند اگر و تنها اگر $i \neq k$ و $j \neq l$ باشد. یک گراف G جدولی است هرگاه یکریخت با یک گراف جدول باشد.

به وضوح یک گراف جدول $T[V_{ij}]$ می‌تواند به وسیله یک جدول که درایه (i,j)–ام آن $|V_{ij}|$ است، معرفی شود.

تعریف ۹.۱.۱ یک جفت $H = (V, \mathcal{E})$ را یک ابرگراف می‌نامیم هرگاه $V = V(H)$ یک مجموعه متناهی از رأس‌ها و $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H)$ یک مجموعه از زیرمجموعه‌های متمایز V به نام یال‌ها باشند که هر یک از این زیرمجموعه‌ها، اندازه حداقل ۲ داشته باشند.

۲.۱ پیشینه تاریخی

مسئله مینیمم مجموع رنگ‌آمیزی حالت خاصی از مسئله افراز رنگی هزینه بهینه که به اختصار به آن مسئله $occp$ ($optimum\ cost\ chromatic\ partition$) گفته می‌شود، می‌باشد که در زیر آن را شرح می‌دهیم.
مسئله $occp$ به این صورت است که در آن یک گراف $G = (V, E)$ با $|V| = n$ و یک دنباله غیرکاهشی $K = (k_1, \ldots, k_n)$ از هزینه‌های رنگ‌ها که می‌توانند هر عدد صحیح مثبت دلخواهی باشند، داریم و هدف پیدا کردن یک رنگ‌آمیزی رأسی سره c است به طوری که $\sum_{v \in V(G)} k_{c(v)} = \min_{c' \in F} \sum_{v \in V(G)} k_{c'(v)}$، که در آن F مجموعه تمام رنگ‌آمیزی‌های رأسی سره از G است. در این صورت به رنگ‌آمیزی c، رنگ‌آمیزی مینیمال از G با مجموعه هزینه K و به مجموع $\sum_{v \in V(G)} k_{c(v)}$ هزینه رنگ‌آمیزی مینیمال گراف G با مجموعه هزینه K گفته می‌شود.

حال اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $k_i = i$ باشد این مسئله به مسئله مینیمم مجموع رنگ‌آمیزی تبدیل می‌شود.
این مفهوم از رنگ‌آمیزی که در آن به دنبال مینیمم کردن مجموع رنگ‌ها هستیم برای اولین بار در سال ۱۹۸۷ از دو منظر مختلف مطرح شد. یکی به صورت محض در نظریه گراف توسط کیوبیکا[۱] مطرح شد. او در پایان نامه دکتری خود مجموع رنگی گراف را تعریف کرد. همچنین سوپویت[۲] مسئله $occp$ را به لحاظ کاربردشان در طراحی $VLSI$ مطرح کرد.

۳.۱ کاربردها

در این بخش به برخی کاربردهای دو مسئله ذکر شده می‌پردازیم.
۱) با توجه به تعریف گرافهای بازه‌ای مسئله $occp$ برای گرافهای بازه‌ای معادل مسئله زمانبندی بازه‌ای ثابت ($Fixed\ Interval\ Scheduling\ Problem$) با هزینه اجرایی وابسته ماشینی است، در این مسئله زمانبندی n کار و m ($\leq n$) ماشین داریم به طوری که کار j–ام $1 \leq j \leq n$ باید در بازه زمانی ثابت (s_j, t_j) انجام شود و هزینه اجرای هر کار فقط وابسته به ماشینی است که آن کار را انجام می‌دهد. اگر کار j توسط ماشین m انجام شود آنگاه هزینه اجرای آن کار k_m خواهد بود. کارها نیز به هم وابسته است یعنی کارهایی وجود دارند که بازه‌های زمانی برای اجرای آنها با هم اشتراک دارد و نکته دیگر این که هر کاری فقط توسط یک ماشین قابل اجراست یعنی این که نمی‌توان در بازه زمانی (s_j, t'_j) که $t'_j < t_j$ کار j را با ماشین m_1 و در بازه زمانی (t'_j, t_j) کار j را با ماشین m_2 انجام داد. پس به عبارت دیگر هر کار j باید فقط توسط یک ماشین انجام شود.
سوال این است که چطور برنامه ریزی کنیم تا همه کارها با مینیمم هزینه اجرایی انجام

۱ Kubika
۲ Supowit

شود؟
اگر این مسئله را با ابزارهای نظریه گراف مدل بندی کنیم مسئله به صورت زیر مطرح می‌شود.
اگر n رأس یک گراف بازه‌ای متناظر با زمان‌های اجرایی n کار مورد نظر باشد یعنی مثلاً رأس v_j متناظر بازه زمانی (s_j, t_j) که زمان اجرای کار j است، باشد. واضح است که اگر دو بازه مربوط به رأس‌های v_i و v_j با هم اشتراک داشته باشند. با توجه به تعریف گرافهای بازه‌ای این دو رأس به هم وصل می‌شوند و چون هر ماشینی در یک زمان فقط یک کار را انجام می‌دهد. پس چون بازه‌های زمانی v_i و v_j مشترکند پس نمی‌توان آن‌ها را با یک ماشین انجام داد و در نتیجه توسط دو ماشین مختلف $m_۱$ و $m_۲$ باید انجام شود. پس هزینه‌های مختلف $k_{m_۱}$ و $k_{m_۲}$ به آنها اختصاص داده می‌شود. بنابراین برنامه ریزی شدنی معادل با رنگ‌آمیزی شدنی (سره) برای گراف بازه‌ای متناظر است. حال سوال بالا را می‌توان با پیدا کردن یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای گراف بازه‌ای مورد نظر با مجموعه هزینه $K = (k_۱, \dots, k_m)$ پاسخ داد.
۲) n کمیته بازرسی وجود دارد که هر کدام یک روز به بازرسی می‌روند و هیچ دو کمیته‌ای با یک عضو مشترک نمی‌توانند در یک روز به بازرسی بروند و ضمناً بازرسی در روز i–ام هزینه k_i را متحمل می‌شود.
سوال این است که چطور برنامه ریزی کنیم تا در حداقل روزهای ممکن و همچنین حداقل هزینه تمام این n کمیته به بازرسی بروند؟
اگر گرافی بسازیم که هر رأس آن متناظر یک کمیته باشد و دو رأس را به هم وصل کنیم هر گاه کمیته‌های متناظر عضو مشترک داشته باشند. آنگاه سوال بالا را می‌توان با پیدا کردن یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای گراف ساخته شده که در آن $C = \{k_۱, k_۲, \dots, k_n\}$ مجموعه هزینه‌های رنگها است، پاسخ داد.
۳) یک کارخانه تولید شیمیایی به طبع کالاهای بی‌مصرفی دارد که بعضی از آنها اگر با هم در یک جا ذخیره سازی شوند ماده‌ای خطرناک تولید می‌شود. این کارخانه انبارهایی برای ذخیره سازی این کالاها دارد که البته هر کدام از این انبارها هزینه

ذخیره سازی مختلفی دارد. سوال این است که ذخیره سازی چطور انجام شود که مجموع هزینه‌ها بدون ایجاد خطر مینیمم شود؟ در ضمن تحقق ویژگی مینیمم مجموع هزینه‌ها، تعداد انبارها نیز حداقل باشد.
اگر رأس‌های ابرگراف H متناظر کالاهای بی‌مصرف متمایز در یک کارخانه شیمیایی باشد و یک مجموعه از رأس‌ها تشکیل یک یال در H را بدهند اگر و تنها اگر ذخیره سازی کالاهای بی‌مصرف متناظر این رأس‌ها در یک جا تشکیل یک ماده ترکیبی خطرناک را بدهند و فرض کنید c_i از $C = (c_1, \ldots, c_n)$ متناظر هزینه ذخیره سازی در انبار i–ام باشد، آنگاه یک رنگ‌آمیزی مینیمال از H با مجموعه هزینه C پاسخ سوال بالا است.

فصل ۲

شدت رأسی گرافها

در این فصل ابتدا کرانهایی برای شدت رأسی گراف دلخواه G بیان می‌کنیم و سپس حدس مهرآبادی برای شدت رأسی را مطرح می‌کنیم. اثباتی از حدس را در حالتی که G یک گراف دوبخشی است، بیان می‌کنیم و سرانجام در بخش آخر در مورد شدت رأسی گرافهای بازه‌ای بحث می‌کنیم.
یادآوری می‌کنیم شدت رأسی گراف G، $s(G)$، کوچکترین مقدار s است به طوری که $\sum(G) = \sum_s(G)$.

۱.۲ کران‌هایی برای شدت رأسی گرافها

لم زیر کران بالایی برای $s(G)$ بر حسب بزرگترین درجه گراف معرفی می‌کند.

لم ۱.۱.۲ برای هر گراف G، $s(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

اثبات. با توجه به الگوریتم حریصانه برای رنگ‌آمیزی گرافها به وضوح $\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱$ است. بنابراین رنگ‌آمیزی از گراف G وجود دارد که تعداد رنگ‌های به کاربرده در آن کمتر یا مساوی $\Delta + ۱$ است. حال اگر

$s(G) > \Delta(G) + ۱$ باشد، آنگاه به ازای هر رنگ‌آمیزی بهینه f از G مجموعه $S = \{v \in V(G) : f(v) \geq \Delta + ۲\}$ غیر تهی است. فرض کنید $v \in S$ یعنی $f(v) \geq \Delta + ۲$. به وضوح برای رنگ‌آمیزی همسایه‌های v حداکثر Δ رنگ مورد نیاز است. بنابراین با توجه به انتخاب v، رنگ $j \in \{۱, \ldots, \Delta + ۱\}$ وجود دارد که در رنگ‌آمیزی رأس‌های همسایه v استفاده نشده است. حال رنگ‌آمیزی f' را برای گراف G به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$f'(v) = j$ و به ازای هر رأس دیگر $u(\neq v)$، $f'(u) = f(u)$.

به وضوح $\sum_{f'}(G) < \sum_f(G)$ است که با فرض بهینه بودن f در تناقض است. بنابراین مجموعه S تهی و $s(G) \leq \Delta(G) + ۱$ است. ■

کران بالای بیان شده در لم بالا برای $s(G)$ تیز می‌باشد زیرا به وضوح برای گرافهای کامل و دورهای فرد تساوی برقرار است.

در قضیه زیر که در [۱] مطرح شده است، شرط لازم و کافی برای این که $s(G) = \Delta(G) + ۱$ باشد را بیان کرده است.

قضیه ۱.۱.۲ اگر G یک گراف باشد آنگاه $s(G) = \Delta(G) + ۱$ اگر و تنها اگر G گراف کامل یا دور فرد باشد.

اثبات. برای سادگی اثبات فرض کنید $\Delta \geq ۴$ است.

اگر G گراف کامل یا دور فرد باشد به وضوح تساوی $s(G) = \Delta(G) + ۱$ برقرار است. فرض کنید عکس این عبارت همواره برقرار نباشد و G کوچکترین مثال نقض برای آن باشد. ادعا می‌کنیم یک رنگ‌آمیزی بهینه c از G وجود دارد که درآن $|C_{\Delta+۱}| = ۱$ می‌باشد. زیرا در غیر این صورت به ازای هر رنگ‌آمیزی بهینه c از G، $|C_{\Delta+۱}| \geq ۲$. حال یکی از رأس‌های با رنگ $\Delta + ۱$ به نام u را از G حذف کنید. بنا به خاصیت مینیمال بودن G و این واقعیت که هیچ مولفه‌ای از $G - u$ یکریخت با $K_{\Delta+۱}$ نیست، پس اگر $G - u$ مولفه‌ای یکریخت با $K_{\Delta(G-u)+۱}$ داشته باشد در این صورت $\Delta(G - u) \leq \Delta(G) - ۱$ پس شدت رأسی این مولفه حداکثر $\Delta(G)$ خواهد بود. مولفه‌های دیگر هم چنانچه دور فرد باشند شدت رأسی ۳ و در

غیر این صورت یعنی اگر دور فرد یا گراف کامل نباشند با توجه به مینیمال بودن G، قضیه برای آن‌ها برقرار است یعنی شدت رأسی‌شان کمتر یا مساوی $\Delta(G-u)$ است و چون $\Delta(G-u) \leq \Delta(G) - ۱$ پس در این حالت تمام مولفه‌های $G-u$ را می‌توان با $\Delta(G)$ رنگ به طور بهینه رنگ کرد. اما اگر هیچ یک از مولفه‌های $G-u$ یکریخت با $K_{\Delta(G-u)+۱}$ نباشند آنگاه با توجه به مینیمال بودن G شدت رأسی‌اش کمتر یا مساوی $\Delta(G-u)$ است و چون $\Delta(G-u) \leq \Delta(G)$ است پس در این حالت نیز $s(G-u) \leq \Delta(G)$. پس در هر حال می‌توان با $\Delta(G)$ رنگ $G-u$ را به طور بهینه رنگ کرد و سپس رنگ $\Delta + ۱$ را به u اختصاص داد. پس به این ترتیب رنگ‌آمیزی بهینه مورد نظر بدست می آید.

حال $G - C_۱$ را بررسی می‌کنیم. اگر $G - C_۱$ مولفه‌ای یکریخت با K_Δ نداشته باشد آنگاه $s(G - C_۱) \leq \Delta(G - C_۱)$. زیرا با توجه به انتخاب G تنها در صورتی $s(G-C_۱) = \Delta(G-C_۱) + ۱$ است که $G - C_۱$ مولفه‌ای یکریخت با $K_{\Delta(G-C_۱)+۱} = K_\Delta$ داشته باشد($\Delta(G-C_۱) = \Delta(G) - ۱$ است. زیرا اولاً بنا به $(S_۸)$، $\Delta(G-C_۱) \leq \Delta(G) - ۱$ و همچنین بنا به فرض چون $\mid C_{\Delta+۱} \mid = ۱$ است پس یک رأس u وجود دارد که به ازای هر$۱ \leq i \leq \Delta$ یک همسایه v_i با $c(v_i) = i$ دارد بنابراین $\deg_{G-C_۱} u = \Delta(G) - ۱$ است). پس در صورت عدم وجود مولفه‌ای یکریخت با K_Δ در مولفه‌های $G - C_۱$، $s(G) - ۱ \leq \Delta(G) - ۱$ می‌شود که با انتخاب G در تناقض است. پس حداقل یکی از مولفه‌های $G - C_۱$ یکریخت با K_Δ است و از آنجایی که تنها یک رأس با رنگ $\Delta + ۱$ وجود دارد، بنابراین $G - C_۱$ فقط یک مولفه یکریخت با K_Δ دارد. آن مولفه را نیز K می‌نامیم با توجه به $(S_۲)$ و این که ماکزیمم درجه G، Δ است پس هر رأس K یک همسایه منحصربه فرد در $C_۱$ دارد. مجموعه A را مجموعه تمام همسایه‌های K در $C_۱$ قرار می‌دهیم یعنی $A := C_۱ \bigcap N(V(K))$.
حال فرض کنید v رأسی دلخواه از A باشد اگر رنگ $\Delta + ۱$ را به v اختصاص دهیم و K را با رنگ‌های $۱, \ldots, \Delta$ رنگ کنیم. به وضوح مجموع رنگ‌ها در رنگ‌آمیزی جدید همان $\sum(G)$ است و همه رأس‌ها نیز با $\Delta + ۱$ رنگ، رنگ شده‌اند. بنابراین