دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

برهان جبری قضیه حذف برش

استاد راهنما
دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور
دکتر محمد اردشیر

نگارش
فهیمه اسماعیلی کریزی

بهار ۱۳۸۹

چکیده

در پایان نامه حاضر قصد داریم به بررسی و تشریح برهانی جبری برای یکی از قضایای مهم منطق ریاضی به نام قضیه حذف برش بپردازیم. این قضیه که یکی از مهمترین نتایج در نظریه برهان بر پایه حساب رشته هاست، اولین بار توسط گرهارد گنتسن، در سال ۱۹۳۴ برای منطقهای کلاسیک و شهودگرایی اثبات شده است.

از اوایل قرن نوزدهم زمینه های مشترکی بین منطق ریاضی و جبر بوجود آمد که موجب گسترش تحقیقات در منطق بوسیله تکنیک های جبری و گاهی حصول نتایجی در جبر به کمک ابزار های منطقی شد و این منجر به ایجاد شاخه منطق جبری در ریاضیات شد.

دلایل مختلفی بر ایجاد شاخه منطق جبری موثر بود که از آن میان می توان به ارتباط معنایی نزدیکی که بین شاخه ای از منطق ریاضی (به نام نظریه مدل) و بخشی از جبر (به طور خاص جبرجهانی) وجود دارد اشاره کرد. همچنین در برخی موارد تکنیک های جبری راه حل های ساده تری برای مسئله هایی از منطق ریاضی که پاسخ آنها بوسیله ابزار های منطقی طولانی و گاه طاقت فرسا بودند، ارائه می کردند.

پروفسور هیروآکرا اونو[۱] ، ریاضیدان برجسته ژاپنی، در خلال کارهای گسترده خود در منطق جبری، برهان جبری زیبایی برای قضیه حذف برش، در [۲] ارائه کرد؛ که ما در اینجا به تشریح این برهان برای منطق زیرساختاری FL_{ew} می پردازیم. منطق FL_{ew}،منطقی است که از منطق شهودگرایی، با حذف قاعده ساختاری انقباض حاصل می شود . در جریان این اثبات، ایده کار کاملا روشن می شود و با اعمال تغییراتی در آن می توان برهان را برای بسیاری از دیگر انواع منطق نیز ارائه کرد.

کلمات کلیدی:

قضیه حذف برش، ساختار گنتسن، منطق زیر ساختاری، شبکه های کاهش یافته .

---
[۱] Hiroakira Ono

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ زبان

برای صحبت کردن درباره یک منطق و مدل کردن آن به زبان ریاضی، نیاز به یک زبان است. هر زبان مانند $\mathcal{L}$ برای یک منطق شامل نماد های زیر است:[۱]

۱ - مجموعه ای از نماد های تابعی بصورت $F_{۰}^{n_۰}, F_{۱}^{n_۱}, F_{۲}^{n_۲}, \ldots$ که درآن F_i تابعی n_i موضعی است،

۲ - مجموعه ای از نماد های رابطه ای بصورت $R_{۰}^{m_۰}, R_{۱}^{m_۱}, R_{۲}^{m_۲}, \ldots$ که در آن R_i رابطه ای m_i موضعی است،

۳ - مجموعه ای از نماد های ثابت مثل $c_i, i \in I$ ،

۴ - متغیر های فردی بصورت دنباله ای شمارا و نا متناهی $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots$،

۵ - ادوات و سور های منطقی[۲] .

تعریف. مجموعه همه نام ها (ترم ها) که با نماد TER نشان داده می شود ،کوچکترین مجموعه ایست که شامل موارد زیر باشد:

۱ - تمامی ثابت ها و متغییر های فردی .

۲ - اگر $t_۱, \ldots, t_n \in TER$ ، و F_i^n یک تابع n موضعی باشد، آنگاه $F_i^n(t_۱, \ldots, t_n) \in TER$.

[۱] نقل از [۱] ، فصل ۲.

[۲] $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$

تعریف. مجموعه تمام فرمول ها که با نماد FRM نشان داده می شود ، مجموعه ای است که شامل موارد زیر باشد:

۱- شامل تمام روابط ۰موضعی باشد [۳] و اگر $t_۱, \ldots, t_m \in TER$ و R_i^m یک نماد رابطه ای mموضعی باشد ، آنگاه $R_i^m(t_۱, \ldots, t_m) \in FRM$. به علاوه اگر $t_۱$ و $t_۲$ دو ترم باشند، $t_۱ \approx t_۲ \in FRM$ [۴] .

۲- اگر A, B دو فرمول باشند، و $\star$ یک ادات دو موضعی باشد؛ آنگاه : $A \star B \in FRM$.

۳- اگر A یک فرمول باشد، آنگاه $\neg A \in FRM$ و برای هر عدد طبیعی i، $(\forall x_i A) \in FRM$ و $(\exists x_i A) \in FRM$.

مثال. زبان $\mathcal{L}$ را بصورت مقابل در نظر بگیرید: $\mathcal{L} = \{\leq, s, +, ۰\}$. در اینجا $\leq$ یک نماد رابطه ای دو موضعی است و s یک نماد تابعی یک موضعی است. $+$ نماد تابعی دو موضعی است و ۰ یک نماد ثابت است.

- چند ترم در زبان $\mathcal{L}$:

۰، $x_{۱۰}$، $s(x_۱)$، $x_۴ + s(x_{۱۰})$.

- چند فرمول در این زبان:

۱- $x_{۱۱} \approx ۰$،

۲- $s(x_۴) \leq ۰$.

۳- $\exists x_۲(x_۲ \leq s(x_۲))$.

تعریف. یک $\mathcal{L}$-ساختار، دنباله ای مرتب مثل $\mathbf{A} = (A, R_۰^{i_۰}, \ldots, R_n^{i_n}, F_۰^{j_۰}, \ldots, F_n^{j_m})$ است که $\{R_k^{i_k} : ۰ \leq k \leq n\}$ مجموعه ای از روابط روی A و $\{F_k^{i_k} : ۰ \leq k \leq m\}$ مجموعه ای از توابع روی A است که R_k، i_k موضعی و j_k ، F_k موضعی است.

تعریف. یک جبر ، ساختاری است که فاقد رابطه باشد.

[۳] هر رابطه ۰موضعی در حقیقت یک گزاره ساده است، یعنی کوچکترین واحد زبان که حامل خبر باشد.

[۴] $\approx$ یک نماد رابطه ای دو موضعی است که تساوی یا همانی بودن دو عنصر را نشان می دهد.

تعریف. یک *تخصیص*[5] روی ساختار $\mathbf{A}$ تابعی مانند h است، از مجموعه تمام متغیر ها به A. هر چنین تابعی را می توان بطور یکتا روی تمام ترم ها گسترش داد. چرا که اگر t ترمی باشد بصورت $F_i(t_1, \ldots, t_n)$ که t_j ها متغیر باشند، تابع h را برای آن به این صورت تعریف می کنیم:

$$h(F_i(t_1, \ldots, t_n)) = F_i(h(t_1), \ldots, h(t_n))$$

[5] Valuation

۲.۱ دستگاه های استنتاج

در کتب منطق ریاضی ، عموما موضوع منطق ریاضی را بررسی قواعد استدلال در ریاضیات تعریف میکنند[۶] . بنابراین یکی از مطالبی که در منطق ریاضی به آن پرداخته می شود، صورت بندی استدلال ریاضی است . از نظر تاریخی سه روش برای ارائه اصول و قواعد منطق کلاسیک وجود دارد: روش اصل موضوعی ، روش استنتاج طبیعی[۷] و روش حساب رشته ها[۸] .

هر کدام از این روشها نسبت به دیگر روش ها مزیت ها و کاستی هایی دارد، اما نکته مهم این است که قدرت استنتاج تمامی این دستگاه ها به یک اندازه است و لذا اگر فرمولی در یکی از این دستگاه ها اثبات شود در سایرین نیز برای این فرمول برهان وجود دارد. در این جا به ارائه توضیح مختصری در باره روش اصل موضوعی و حساب رشته ها می پردازیم.

روش اصل موضوعی

این روش که به بنیان گزاران منطق جدید بر میگردد و به روش هیلبرت[۹] معروف است، از تعدادی اصول موضوعه و یک قاعده استنتاج تشکیل شده است[۱۰]. روشهای مختلفی برای بیان اصول موضوعه روش هیلبرت وجود دارد؛ آنچه ما در اینجا آورده ایم برگرفته از [۵] است.[۱۱]

اصول موضوعه و قواعد منطق گزاره ها در دستگاه هیلبرت(HP):

(الف) اصول موضوعه:

(۱) $\varphi \to (\chi \to \varphi)$،

(۲) $(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi))$،

(۳) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$،

(۴) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$،

(۵) $(\chi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to (\varphi \wedge \psi)))$،

---

[۶] برگرفته از [۱]. ص. ۵

[۷] Natural Deduction

[۸] Sequent Calculus

[۹] Hilbert Calculus

[۱۰] نقل از [۱] . ص. ۴۰

[۱۱] توجه کنید که در مجموعه اصول فوق ، به جای $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ هر گزاره دلخواه می تواند قرار بگیرد. در حقیقت هر کدام از این اصول ،مجموعه ای از اصول هستند و $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ نمادهایی فرازبانی برای گزاره ها هستند.

(۶) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$،

(۷) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$،

(۸) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi) \to \chi))$،

(۹) $(\varphi \to \chi) \to ((\varphi \to \neg\chi) \to \neg\varphi)$،

(۱۰) $\varphi \to (\neg\varphi \to \chi)$،

(۱۱) $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

(ب) قاعده استنتاج:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}(MP)$$

در منطق سنتی به این قاعده قیاس استثنایی می گویند که البته بیشتر به قاعده وضع مقدم[۱۲] معروف است. در هر قاعده استنتاج ، به گزاره های بالای کسر ، مقدمه های استنتاج و به گزاره زیر خط، نتیجه می گویند.[۱۳]

در اینجا برای آشنایی بیشتر با نحوه استنتاج در دستگاه هیلبرت ، مثالی از یک برهان برای فرمول $\varphi \to \varphi$ در HP بصورت دنباله زیر، آمده است:

مثال. نشان دهید برای هر فرمول مثل φ در منطق گزاره ها داریم: $\varphi \to \varphi$

برهان. (۱) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$.اصل۱.

(۲) $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$.اصل۲.

(۳) $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$.از ۱و۲وقاعده استنتاج بدست می آید.

(۴) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$.اصل۱.

(۵) $\varphi \to \varphi$.از ۳و۴ وقاعده استنتاج بدست می آید.

□

در این مثال دو نکته قابل ذکر است: اول اینکه برای ارائه برهان برای گزاره ساده ای مثل $\varphi \to \varphi$ راه درازی پیموده شد، دوم اینکه روش یافتن قدم های برهان دست کم درابتدا طبیعی به نظر نمی آید.

---

[۱۲] Modus Ponens

[۱۳] نقل از [۱] . ص. ۴۱

این مشکلی بود که در بیشتر برهانها در دستگاه اصل موضوعی هیلبرت وجود داشت و ریاضیدانان به دنبال یافتن دستگاه استنتاجی بودند که در آن قدمهای برهان به حرکت واقعی فکر نزدیکتر باشد[۱۴] و با دیدن برهان بتوان ویژگی های منطقی آن را تحلیل کرد. در سال ۱۹۳۰ گنتسن[۱۵] توانست به این هدف دست یابد. او به این منظور دو دستگاه استنتاج به نامهای دستگاه استنتاج طبیعی و حساب رشته ها را ابداع کرد. ما در ادامه به بیان توضیح مختصری در باره روش حساب رشته ها می پردازیم.

روش حساب رشته ها

یکی از روش هایی که گنتسن ابداع کرد، روش حساب رشته ها بود. می توان گفت، اصلی ترین برتری روش حساب رشته ها از این ناشی می شود که می توان در آن برای هر جمله اثبات پذیر ، برهانی استاندارد ارائه کرد. (این در حقیقت یکی از نتایج قضیه مهم و معروف حذف برش است.) منظور از برهان استاندارد ، اثباتی است که بتوان ویژگی های منطقی استنتاج را با تحلیل ساختار برهان دریافت.

تا کنون روشهای متعددی برای بیان اصول و قواعد حساب رشته ها بوسیله منطق دانان ارائه شده است که اگر چه در ظاهر متفاوت اند، اما این تفاوت اساسی نیست. آنچه ما در اینجا بیان میکنیم برگرفته از [۵] است.

یک رشته[۱۶] ، عبارتی به شکل $\Gamma \Rightarrow \Delta$ است که در آن Γ, Δ به دنباله هایی متناهی از فرمول ها اشاره دارند که با کاما " ، " از هم جدا شده اند. مثلا بصورت $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$ که در آن $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ و $\Delta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ است و α_i ها و β_i ها فرمول هستند. در رشته $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ، Γ مقدم و Δ تالی خوانده میشود. اگر چه در تالی و مقدم از یک نماد کاما استفاده میکنیم ، اما کاما در هر طرف معنای متفاوتی دارد .در منطق کلاسیک، کاما در مقدم به معنای عطف و در تالی به معنای فصل بکار برده میشود. پس به عبارتی میتوان گفت در منطق کلاسیک، رشته $\Gamma \Rightarrow \Delta$ بصورت $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$ تعبیر می شود. منظور از α, Δ ، دنباله ای از فرمول هاست که از اجتماع Δ و α با همین ترتیب حاصل شده باشد . در اینجا حساب رشته ها برای منطق کلاسیک از یک اصل موضوع[۱۷] ، تعدادی قاعده منطقی (که روش کار ادوات منطقی را نشان میدهند)، و تعدادی

---

[۱۴] نقل از [۱] . ص. ۴۴-۴۳

[۱۵] G. Gentzen

[۱۶] Sequent

[۱۷] در هر دستگاه استنتاج به آن دسته از قواعدی که صورت قاعده تهی است، اصل موضوع یا Axiom گفته میشود. در حساب رشته ها به چنین قواعدی جمله ابتدایی یا Sequent Initial نیز گفته می شود.

قاعده ساختاری[۱۸] تشکیل شده است . در این قواعد ، فرمول هایی که با حروف بزرگ یونانی نمایش داده شده اند را فرمول جانبی[۱۹] ، و فرمول هایی که با حروف کوچک یونانی نمایش داده شده اند را *فرمول اصلی* می نامند. در اینجا برای نمایش مختصر هر یک از قواعد، یک نماد بکار می بریم که در سمت چپ هر قاعده ، داخل پرانتز ذکر شده است. برای مثال قاعده $(\Rightarrow \wedge)$ قاعده ای است که در نتیجه آن ادات $\wedge$ در سمت چپ $\Rightarrow$ ظاهر می شود.

- اصول موضوعه:

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

- قواعد منطقی:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\alpha \to \beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (\to\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta, \Delta}\ (\Rightarrow\to)$$

$$\frac{\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge ۱ \Rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge ۲ \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \Delta}\ (\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta, \Delta}\ (\Rightarrow \vee ۱) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta, \Delta}\ (\Rightarrow \vee ۱)$$

- قواعد ساختاری:
  - قواعد تضعیف[۲۰] :

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (w \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta}\ (\Rightarrow w)$$

[۱۸] Structural Rule

[۱۹] Side Formula

[۲۰] Weakening Rules

- قواعد انقباض[۲۱] :

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}(c \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \alpha, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \Theta}(\Rightarrow c)$$

- قواعد تبادل[۲۲] :

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (e \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \alpha, \beta, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \beta, \alpha, \Theta}(\Rightarrow e)$$

- قاعده برش[۲۳]:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \alpha, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (cut)$$

در صورتی که ثابت منطقی ۱ نیز در زبان موجود باشد، اصل موضوع $\Rightarrow$ ۱ را به مجموعه اصول موضوع اضافه می کنیم. همچنین، در حالتی که ثابت ۰ در زبان باشد ، اصل موضوع ۰ $\Rightarrow$ را به مجموعه اصول موضوعه اضافه می کنیم. $\Rightarrow$ ۱ یعنی ۱ اثبات پذیر است و ۰ $\Rightarrow$ به این معناست که ۰ یک تناقض است. [۲۴]

تعریف. برهان یا استنتاج رشته ای مثل $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در دستگاه حساب رشته ها، درختی متناهی است که ریشه آن رشته $\Gamma \Rightarrow \Delta$ است ، برگ های آن اصول دستگاه و گره های آن، نتیجه قواعد اعمال شده بر گره های بالایی هستند. به عبارت دقیق تر می توان گفت :

- هر اصل موضوع برهانی برای خودش است،
- اگر P و Q برهان هایی برای رشته های s_1 و s_2 باشند، همچنین اگر بنا به یکی از قواعد استنتاج

[۲۱] Contraction Rules

[۲۲] Exchange Rules

[۲۳] Cut Rule

[۲۴] معمولا به صورت قراردادی ثابتهای ۱ و ۰ به زبان یک منطق اضافه می شوند که ثابت ۱ گزاره "راست" است، و ثابت ۰، نشان دهنده گزاره "غلط" می باشد.

مثل $(\star)$ بتوان رشته s را از s_1 و s_2 نتیجه گرفت، در این صورت

$$\frac{P \qquad Q}{s}(\star)$$

برهانی برای s است.

مثال. درخت زیر برهانی برای فرمول $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ در حساب رشته هاست:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta}w\Rightarrow}{\Rightarrow \alpha, \alpha \to \beta} \Rightarrow\to \qquad \alpha \Rightarrow \alpha}{(\alpha \to \beta) \to \alpha \Rightarrow \alpha, \alpha} \to\Rightarrow}{(\alpha \to \beta) \to \alpha \Rightarrow \alpha} \Rightarrow c}{\Rightarrow ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha} \Rightarrow\to$$

۳.۱ برخی از انواع منطق

در این قسمت فهرستی از برخی انواع منطق ها را می آوریم وسعی میکنیم به اختصار و به حسب نیاز توضیحاتی درباره آنها بدهیم.[۲۵]

- **منطق کلاسیک**

منطق کلاسیک ،منطق ریاضیات کلاسیک است. با تسامح می توان گفت منطق کلاسیک منطق دو ارزشی است ومنطق های غیر کلاسیک چنین نیستند. منظور از اینکه منطق کلاسیک دو ارزشی است، اینست که هر گزاره ای یا راست است و یا دروغ . در اغلب موارد منظور از منطق کلاسیک، منطق گزاره ها یا منطق مرتبه اول است.

- **منطق شهود گرایی** [۲۶]

در ریاضیات استدلالهای وجودی دربسیاری از مواقع با کمک فرض خلف و رسیدن به تناقض انجام می شوند، بدون اینکه راه مشخصی برای یافتن شی مورد نظر ارائه شود. در ابتدای قرن بیستم گروهی از ریاضیدانان که بعدا به شهود گرایان معروف شدند، به انتقاد از این نوع استدلال پرداختند . باالاخص براوئر[۲۷] تلاش کرد تا مبانی و اصول ریاضیات را از نو به نحوی بازسازی کند که، گزاره هایی در ریاضیات که در باره وجود اشیاء هستند اثبات نشوند مگر اینکه شئ مورد نظر ساخته شود . این مسئله منجر به تغییرات اساسی در منطق شد. برای مثال مطابق اصول شهودگرایانه، فرمول $\varphi \vee \neg\varphi$ درست است اگر و تنها اگر شی توصیف شده توسط φ ساخته شود و یا اینکه فرض وجود چنین ساختی منجر به تناقض شود. اما می دانیم که این مساله برای هر فرمول برقرار نیست. برای مثال اگر φ را حدس گلدباخ[۲۸] در نظر بگیریم، (هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان بصورت مجموع دو عدد اول نوشت.) در این صورت $\varphi \vee \neg\varphi$ برقرار نیست.
(در حالیکه در منطق کلاسیک $\varphi \vee \neg\varphi$ یک قضیه است).

از دیگر تمایز های شاخص منطق شهود گرایی می توان به معادل نبودن $\varphi \to \psi$ با عبارت $\neg\varphi \vee \psi$ ؛ برقرار نبودن عبارت $\neg\neg\varphi \to \varphi$ به عنوان یک قضیه و نیز عدم مجاز بودن استفاده از برهان خلف در استنتاج را ذکر کرد.

[۲۵] نقل از [۱] . ص. ۱۱-۱۰

[۲۶] Intuitionistic Logic

[۲۷] L. E. J.Brouwer

[۲۸] Goldbach's Conjecture

در دهه ۱۹۲۰ آرندهیتینگ[۲۹] سعی کرد تا صورت بندی ای از اصول و قواعد استنتاج برای ریاضیات مورد نظر شهود گرایان ارائه کند. دستگاه هیلبرت برای منطق شهود گرایی از همان دستگاه معرفی شده برای منطق کلاسیک با حذف کردن قاعده $\neg\neg\varphi \to \varphi$ حاصل می شود. برای بدست آوردن حساب رشته ها برای منطق شهود گرایی که آن را با LJ نمایش می دهیم نیز باید یک تغییر اساسی در حساب رشته های ارائه شده برای منطق کلاسیک اعمال کنیم.

هر رشته در LJ باید بصورت $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ باشد که $0 \leq m$ و β یک فرمول یا یک رشته تهی است. یعنی در هر رشته تالی یا تهی است و یا تنها از یک فرمول تشکیل شده است. این تغییر را باید در تمامی رشته های موجود در اصول و قواعد حساب رشته ها اعمال کنیم. از آنجا که ممکن است در قسمتهای بعدی مورد نیاز باشد اصول و قواعد حساب رشته ها برای منطق شهود گرایی را مستقیما در اینجا ذکر می کنیم.

اصول موضوعه و قواعد استنتاج حساب رشته ها برای منطق شهودگرایی

- اصول موضوعه:

$$\alpha \Rightarrow \alpha \qquad 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow 1$$

- قواعد منطقی:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\alpha \to \beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\to\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta}\ (\Rightarrow\to)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}\ (\wedge 1 \Rightarrow) \quad \frac{\beta, \Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}\ (\wedge 2 \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\ (\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}\ (\vee \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\Rightarrow \vee 1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\Rightarrow \vee 2)$$

[۲۹] A. Heyting

– قواعد ساختاری[۳۰] :

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \delta}\,(w \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \alpha}\,(\Rightarrow w)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}\,(e \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}(c \Rightarrow)$$

– قاعده برش:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}\,(cut)$$

- **منطق موجهات**[۳۱]

در منطق موجهات، علاوه بر گزاره های خبری، گزاره های حاوی ضرورت و امکان نیز مورد توجه قرار می گیرد؛ مانند: «ممکن است P عدد اول باشد» و یا« ضرورتا **۳** عددی اول است ».

در این منطق دو نماد یک موضعی برای امکان و ضرورت بصورت $\Diamond$ و $\Box$ استفاده می شود که در منطق موجهات کلاسیک این دو نماد بر حسب هم به این صورت بیان می شوند : $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ و $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$ ؛ که اولی به این معناست که« p امکان دارد اگر و تنها اگر اینطور نباشد که نقیض p ضرورت داشته باشد» و بطور مشابه برای دومی.

- **منطق خطی**[۳۲]

منطق خطی از منطق هایی است که به منابع حساس است. در منطق هایی که تاکنون نام برده شد بکار بردن چند باره فرضها و یا مقدمه های استنتاج مجاز است. در منطق خطی در هر استنتاج هر فرض را تنها یکبار می توان بکار برد.

[۳۰] توجه کنید که در منطق شهودگرایی قواعد $c \Rightarrow$ و $e \Rightarrow$ خودبخود حذف می شوند. چون تالی همواره حداکثر از یک فرمول تشکیل شده است.

[۳۱] Modal Logic

[۳۲] Linear Logic

منطق خطی نوعی منطق زیر ساختاری است که در آن قواعد ساختاری تضعیف و انقباض حذف شده اند.

- **منطق چند ارزشی** [۳۳]

در منطق چند ارزشی، گزاره می تواند نه راست باشد و نه دروغ. بسته به زمینه کار می توان ارزشهای بین راست و دروغ هم داشت. این منطق هم نوعی منطق زیر ساختاری و فاقد قاعده انقباض است.

- **منطق فازی** [۳۴]

منطق فازی مانند منطق چند ارزشی است که در آن تعداد ارزشها می تواند نامتناهی باشد و به عبارت دقیقتر؛ این منطق، منطق مفاهیم مبهم است؛ مانند مفهوم «بلند قامت» در گزاره ای مثل «حسن بلند قامت است». در صورت بندی دستگاه حساب رشته ها برای منطق فازی نیز قاعده ساختاری انقباضی حذف می شود.

- **منطق فقه (تکلیف)**[۳۵]

منطق فقه ،منطق گزاره هایی مثل« نباید دروغ گفت »است . این منطق در نیمه دوم قرن بیستم مورد توجه فیلسوفان قرار گرفت و در سالهای اخیر در علوم نظری کامپیوتر به آن توجه شده است.

- **منطق شناختی** [۳۶]

منطق شناختی ،منطق گزاره هایی است؛ مانند «من می دانم که زید پسر عمر است» یا «همه می دانند که زید پسر عمر است»

- **منطق زمان**[۳۷]

در منطق زمان گزاره هایی بررسی می شوند که درستی آنها به زمان وابسته است مانند«باران خواهد آمد».

[۳۳] Multivalude Logic

[۳۴] Fuzzy Logic

[۳۵] Deontic Logic

[۳۶] Epistemic Logic

[۳۷] Temporel Logic

۴.۱ شبکه ها و مجموعه های جزئا مرتب

[۳۸] دو روش استاندارد برای تعریف شبکه[۳۹] وجود دارد ؛ یکی بیانی جبری دارد و دیگری مناسب برای شهود هندسی است. ما در اینجا به بیان هر دو روش می پردازیم.

روش اول:

تعریف. جبر $\mathbf{A}$ به همراه دو عملگر دو موضعی، بصورت $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee)$ یک شبکه نامیده می شود، اگر دو عملگر $\wedge$ و $\vee$ که به ترتیب عطف[۴۰] و فصل[۴۱] نامیده می شوند در شرایط زیر صدق کنند:

قواعد جابجایی:

۱- $x \wedge y = y \wedge x$

۲- $x \vee y = y \vee x$

قواعد شرکت پذیری:

۳- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

۴- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

قواعد جذب:

۵- $x \vee (x \wedge y) = x$

۶- $x \wedge (x \vee y) = x$

با استفاده از قوانین جذب می توان نشان داد که عطف و فصل، هر دو خاصیت خود توانی نیز دارند:

$$x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge y)) = x$$

$$x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee y)) = x$$

[۳۸] مطالب این بخش عموما برگرفته از [۴] است.

[۳۹] Lattice

[۴۰] Conjunctin

[۴۱] Disjunction

تعریف. رابطه $\leq$ روی مجموعه A یک *ترتیب جزئی* خوانده می شود، اگر برای هر $a, b, c \in A$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱- $a \leq a$، (بازگشتی)

۲- اگر $a \leq b, b \leq a$ آنگاه $a = b$، (پادتقارنی)

۳- اگر $a \leq b, b \leq c$ آنگاه $a \leq c$. (تراگذری)

تعریف. ساختار $\mathbf{P} = (P, \leq)$ یک مجموعه جزئا مرتب است ، اگر $\leq$ یک ترتیب جزئی روی P باشد.

روش دوم:

تعریف. مجموعه جزئا مرتب L یک شبکه خوانده می شود اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in L$ ، $sup\{a, b\}$ و $inf\{a, b\}$ در L موجود باشند.

به سادگی می توان دید دو تعریف فوق معادل اند. اگر L یک شبکه با تعریف اول باشد در این صورت ترتیب جزئی $\leq$ را می توان به این صورت روی آن تعریف کرد:

$a \leq b$ اگر وتنها اگر $a = a \wedge b$.

همچنین اگر L یک شبکه با تعریف دوم باشد،عطف و فصل را می توان به این صورت تعریف کرد:

$$a \wedge b = sup\{a, b\}$$
$$a \vee b = inf\{a, b\}$$

تعریف. شبکه L *کامل*[۴۲] خوانده می شود، اگر برای هر زیر مجموعه مثل X از L ؛ $supX$ و $infX$ متعلق به L باشند.

تعریف. جبر $\mathbf{B} = (B, \cdot, ۱)$ یک تکواره[۴۳] نامیده می شود، اگر $\cdot$ یک عملگر دو موضعی شرکت پذیر روی B باشد و ۱ عنصر همانی برای عملگر $\cdot$ باشد.

تعریف. ساختار $\mathbf{B} = (B, \cdot, \leq)$ یک *تکواره مرتب جزئی*[۴۴] است، هر گاه $(B, \cdot)$ یک تکواره باشد، $(B, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و بعلاوه برای هر $x, y, z \in B$ ،یکنوایی[۴۵] بین $\cdot$ و $\leq$ به

[۴۲] Complete

[۴۳] Monoid

[۴۴] Partially Ordered Monoid

[۴۵] Monotonicity

صورت زیر برقرار باشد:

اگر $x \leq y$ ؛ آنگاه داشته باشیم : $x \cdot z \leq y \cdot z$ و $z \cdot x \leq z \cdot y$.

به علاوه در حالتی که $(B, \leq)$ یک شبکه نیز باشد، $\mathbf{B}$ یک *تکواره مرتب شبکه ای*[۴۶] نامیده می شود.

برای دیدن مطالب بیشتر در باره شبکه ها به [۴] . ص. ۲۳. رجوع شود.

[۴۶] Lattice-Orderd Monoid

۵.۱ تاریخچه منطق جبری

[۴۷] همانطور که از عبارت منطق جبری[۴۸] پیداست، منطق جبری شاخه ای از ریاضیات است که در ارتباط با هر دو شاخه منطق و جبر است و در برگیرنده مطالبی است که عموما به طرح مبحثی از یکی از این شاخه ها در دیگری می پردازد و آنرا، گاه آسانتر و گاهی با معنایی جالب توجه تفسیر می کند. به زبان ساده تر می توان گفت آنچه منجر به گسترش این شاخه از ریاضیات شد ارتباط نزدیکی است که در برخی از شاخه های جبر با قسمتهایی از منطق ریاضی وجود دارد.

می توان گفت اولین کارها در منطق جبری توسط جورج بول[۴۹] آغاز شد. هنگامیکه بول در سالهای ۱۸۴۸-۱۸۵۴ ساختاری را که ما به عنوان جبر بول می شناسیم معرفی کرد. جبر بول، جبر مجموعه ها یا به عبارتی جبر روابط تک موضعی است. در حدود سالهای ۱۸۶۴-۱۸۵۶ دمورگان[۵۰] و پس از او شرودر[۵۱] جبر روابط دو موضعی را ساختند. از طرفی در دهه چهارم قرن نوزده توسط بیرکهوف[۵۲] شاخه جدیدی به نام جبر جهانی[۵۳] ساخته شد و بدین ترتیب پایه های محکمی برای منطق جبری بنا شد. تلاشهای لیندن باوم[۵۴] و تارسکی[۵۵] در ساختن جبر لیندن باوم – تارسکی، به دقت علت وجود رابطه عمیق بین گزاره ها و نامهای جبری در ساختارهای جبری را تبیین کرد.

در نیمه اول قرن بیستم نزدیکی جبر و منطق اوج گرفت. نیاز به تحقیقات بیشتر در منطق های غیر کلاسیک مثل منطق شهود گرایی، منطق چند ارزشی و منطق موجهات، منجر به گسترش جستجوهای جبری در منطق شد. برای مثال برای دریافت نوعی معناشناسی برای این منطق ها تلاشهای زیادی شد که از جمله می توان به ساخت جبر هیتینگ[۵۶] و MV-جبرها به ترتیب برای منطق شهود گرایی و منطق چند ارزشی اشاره کرد.

در همین دوره بود که گنتسن رویکرد جدیدی در نظریه برهان ارائه داد. او حساب رشته ها معرفی کرد

---

[۴۷] برگرفته از [۵]. ص. ۵- ۷

[۴۸] Algebraic Logic

[۴۹] G. Bool

[۵۰] A. De Morgan

[۵۱] F. W. K. E. Schroder

[۵۲] G. Birkhoff

[۵۳] Universal Algebra

[۵۴] A. Lindenboum

[۵۵] A. Tarski

[۵۶] Heyting Algebra