بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

نتایجی درباره عدد غالب رنگین کمان

نگارش

مهدی جمالی

استاد راهنما : دکترحمیدرضا میمنی و دکتر فرحبخش کمالی

استاد مشاور: دکتر مجتبی قربانی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

تیر ۱۳۹۳

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **مهدی جمالی** متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاورد های پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه/ رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت برهان تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی می باشد.

امضاء : مهدی جمالی

تهران- لویزان- کدپستی: ۱۶۷۸۸- صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن: ۹- ۲۲۹۷۰۰۶۰- نمابر۲۲۹۷۰۰۱۱

پست الکترونیکی *sru@sru.ac*

تقدیم به:

زیباترین و مهربانترین وجود هستی، مادر

به شکوه دستانش، نگاه همیشه منتظرش ...

و به:

فداکارترین صبور هستی، پدر

به ترنم بودنش و ...

و همه ی پویندگان راه علم و دانش ...

و با سپاس فراوان از همسرمهربانم و غنچه زیبای هستی نازنین زهرای عزیزم و با تشکر فراوان از اساتید عزیزم آقای دکتر حمید رضا میمنی و سرکار خانم دکتر فرحبخش کمالی

که مرا در اجرای این کار یاری فرمودند.

چکیده:

کلود برگ[1] اولین بار در سال ۱۹۵۸ به مطالعه احاطه گری در گراف ها پرداخت، ارتباط بین عدد احاطه گر یا به عبارتی (عدد غالب) با عدد غالب ۲-رنگین کمان با استفاده از حاصلضرب دکارتی توسط هارتنل[2] و رال[3]معرفی شد.

در این رساله عدد غالب رنگین کمان و ارتباط این مفهوم با عدد غالبی و عدد غالب تام و عدد غالب جفت شده بررسی خواهد شد. عدد غالب تام در سال ۱۹۸۰ توسط کوکاینی[4] معرفی شد و هم اکنون افراد زیادی روی این مفهوم و ارتباط آن با عدد غالب k-رنگین کمان مشغول به کار هستند. از جمله ریاضی دانان مشهوری که می توان از آنها یاد کرد فاوارن[5] و هنینگ[6]هستند. عدد غالب k-رنگین کمان ارتباط تنگاتنگی با علوم کامپیوتر و صنعت دارد، در این پایان نامه در فصل اول تعاریف اولیه را یاداوری می کنیم، در فصل دوم مفهوم عدد غالب رنگین کمان و ارتباط آن با عدد غالب معمولی را بیان می کنیم و مفهوم حاصلضرب دکارتی گراف ها را شرح می دهیم و قضایای مقدماتی را آورده ایم. در فصل سوم به ارتباط عدد غالب رنگین کمان با عدد غالب جفت شده می پردازیم و عدد غالب ۲-رنگین کمان بعضی گراف های خاص را بررسی خواهیم کرد، همچنین عدد غالب -رنگین کمان ضعیف روی درخت ها را تعریف و بررسی خواهیم کرد. و در فصل چهارم ابتدا حاصلضرب قاموسی گراف ها را معرفی می کنیم، سپس با استفاده از آن به ارتباط بین عدد غالب رنگین کمان(به خصوص ۲-رنگین کمان) با عدد غالب تام خواهیم پرداخت. در این پایان نامه از مقاله های زیرکمک گرفته ایم.

[1] *B. Bre˘sar, M. A. Henning, and D. F. Rall. 2008 .Rainbow domination in graphs, Taiwanese.J.Matht.TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS. Vol.12 , No. 1 pp.213-225 , February* [2] *M. Ali, M. T. Rahim, M. Zeb, G. Ali. 2011 On 2-rainbow domination of some families of graphs. International Journal of Mathematics and Soft Computing. Vol.1.NO1(2011).47-53* [3] *Kung-Jui Pai+ and Yuan-Ching Jhou. Upper Bounds on the 2-rainbow Domination Number of Grids* [4] *Tadeja Kraner ˇ Sumenjak ∗ Douglas F. Rall †‡ Aleksandra Tepeh§.2013 .Rainbow domination in the lexicographic product of graphs. Discrete Applied Mathematics*.

کلمات کلیدی: گراف، عدد غالب ، حدس ویزینگ، عدد غالب k-رنگین کمان، عدد غالب تام، عدد غالب جفت شده، حاصلضرب دکارتی و قاموسی

1-Keload berg
2-Hartnell
3-Rall
4-kokaeni
5-Favaron
6-Heneng

پیش گفتار:

در اواسط قرن نوزدهم به علت علاقه شدید مردم به بازی شطرنج مسئله چگونگی چینش ۵ وزیر در صفحه شطرنج به طوری که بتوانند همه خانه های صفحه شطرنج را پوشش دهند، مطرح شد، به گفته ای می توان این مسئله را جزء اولین مسائل مطرح شده در مورد احاطه گری دانست، البته این مسئله در آن زمان حل نشد ولی بعدها با ممارست و تلاش ریاضی دانان این مسئله حل شد.

کلود برگ اولین بار در سال ۱۹۵۸ به مطالعه احاطه گری در گراف ها پرداخت، ارتباط بین عدد احاطه گر یا به عبارتی (عدد غالب) با عدد غالب ۲-رنگین کمان با استفاده از حاصلضرب دکارتی توسط هارتنل و رال معرفی شد. در دنیای مدرن امروز کاربرد های بسیاری از نظریه گراف شناخته شده است. بسیاری از کاربرد ها را در دنیای واقعی می توان به راحتی با اسفاده از نمودار ها که این نمودارها خود متشکل از مجموعه ای از نقاط و خطوطی که زوج های معینی از این نقاط را به هم وصل می کند، انجام داد.

دنیای امروز دنیای شبکه هاست که یک شبکه می تواند مجموعه ای از کامپیوتر ها، تلفن ها و یا تکنولوژی مربوط به ارتباط تنگاتنگ تجهیزات مخابراتی مورد استفاده برای انتقال و یا دریافت اطلاعات باشد. علاوه بر این تعریف شبکه می تواند به گروهی از مردم بسط داده شود. با نظریه گراف می توان این شبکه ها را به هم ارتباط داد.

احاطه گری و انواع آن حوزه هایی از نظریه گراف است که کاربرد های متعددی در شبکه های امروزی دارند. مثلا تخصیص منابع محدود در مسائل بهینه سازی و مشکلات برنامه ریزی بخشی از این کاربرد ها می باشد. رنگ آمیزی و احاطه گری در گراف ها نقشی مهم در توسعه نظریه گراف و به طور کلی در ریاضیات گسسته و بهینه سازی ترکیبی ایفا می کند.

با فناوری شبکه ها، سرعت انتقال داده به صورت مستقیم، به صورت بی سیم، موبایل و شبکه های بی سیم افزایش یافته است. انعطاف پذیری که در شبکه های ماهوره ای رادیو، تلفن همراه و سنسور های آنان وجود دارد، آنها را برای جهان امروزی هر چه کار آمد تر نموده است که حفظ این انعطاف پذیری در سطوح موثر دشوار است و برای افزایش این انعطاف پذیری نیاز به تحقیق و پژوهش بیشتر در مباحثی مانند احاطه گری داریم، در اینجا، احاطه گری و انواع آن را، به خصوص احاطه گر k-رنگین کمان و ارتباط آن با عدد احاطه گر (غالب) تام و عدد غالب جفت شده و همچنین ارتباط آن با انواع حاصلضرب به خصوص ارتباط با حاصلضرب دکارتی و حاصلضرب قاموسی را به طور توسعه یافته مورد بحث قرار می دهیم.

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فهرست علائم و اختصارات

فصل۱

تعاریف مقدماتی

۱-۱-تعاریف اولیه:

در این فصل به طور خلاصه به تعاریف اولیه، تعریف مجموعه غالب، مجموعه غالب رنگین کمان، مجموعه غالب جفت شده، مجموعه غالب تام و مفاهیم مربوطه خواهیم پرداخت، همچنین مفهوم رنگ آمیزی و عدد غالب و عدد غالب جفت شده، تام و عدد غالب رنگین کمان نیز معرفی خواهد شد. تمام گراف های در نظر گرفته شده در این رساله بدون جهت و ساده (بدون طوقه و بدون یال های چند گانه هستند).

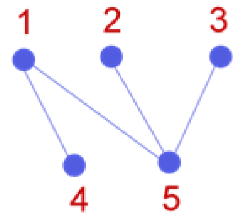
تعریف ۱-۱-۱-به دوتایی $G(V,E)$ که در آن V یک مجموعه غیرتهی و E زیرمجموعه ای از مجموعه های دو عضوی V باشد را یک گراف می نامیم. در گراف ها به $|V|=n$ مرتبه گراف و به $|E|=m$ اندازه گراف می گویند، در این صورت تعداد رأس های گذرا از رأس x را درجه x نامیده و آن را با $degx$ [۷] نمایش می دهیم. ماکزیمم مقدار درجه یک گراف را با $\Delta(G)$ نمایش و مینییم مقدار درجه یک گراف را با $\delta(G)$ نمایش می دهیم، رأس درجه صفر را رأس ایزوله (تنها) می نامیم. رأس درجه ۱ را رأس آویزان نامیده و یال متصل به آن را یال حامی یا برگ[۸] می نامیم و اگر گرافی تنها یک رأس داشته باشد به آن گراف بدیهی می گوییم.

تعریف ۱-۱-۲-گراف G را r-منتظم نامیم اگر درجه هر رأس آن r باشد. گراف G با n رأس را کامل نامیم اگر در آن هر دو رأس دلخواه مجاور باشند به عبارت دیگر در این گراف درجه هر رأس $n-1$ است.

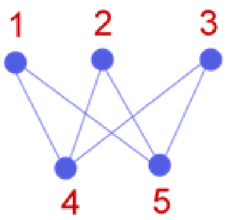
تعریف ۱-۱-۳-گراف G را دوبخشی می‌گوییم هرگاه بدیهی باشد یا بتوان رئوس G را به دو بخش V_1 و V_2 افراز کرد، به گونه ای که هر یال یک انتها در V_1 و یک انتها در V_2 داشته باشد. یا به عبارت دیگر رئوس موجود در V_1 با هم مجاور نیستند و رئوس موجود در V_2 نیز همین وضعیت را دارند. در گراف دوبخشی اگر همه رئوس موجود در V_1 به همه رئوس موجود در V_2 وصل باشد به این گراف دوبخشی کامل می گوییم و اگر $|V_1|=m$ و $|V_2|=n$ باشد، آن را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

7-degree x

8-leaf



شکل ۱-۲-گراف دوبخشی



شکل ۱-۱-گراف دوبخشی کامل $K_{۲,۳}$

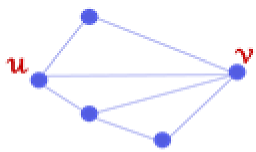
در شکل های بالا اگر $U=\{۱,۲,۳\}$ و $W=\{۴,۵\}$ باشد در این صورت U,W بخش های این دو گراف می باشد و شکل سمت ۱-۱ دو بخشی کامل است.

ستاره گراف دو بخشی کامل غیر بدیهی است که اندازه یکی از بخش های آن ۱ است.

تعریف ۱-۱-۴-یک گشت به طول k در G دنباله ای از رئوس مانند $v_۰,v_۱,...,v_k$ است به طوری که برای هر $۰\le i \le k-۱$، $v_i v_{i+۱}$ یالی در گراف G باشد و همچنین یک گذر به طول k در یک گراف، یک گشت به طول k است که یال تکراری ندارد و یک مسیر گذری است که رأس تکراری ندارد و در یک مسیر اگر رأس ابتدا و انتها یکی باشد به آن دور می گوییم.

تعریف ۱-۱-۵: فاصله [۹] بین دو رأس را به صورت $d(u,v)$ نشان می دهیم که کوچکترین مسیری است که بین رئوس u,v موجود است. و اگر بین دو رأس هیچ مسیری وجود نداشته باشد، $d(u,v)=\infty$ است.

به عنوان مثال در شکل زیر $d(u,v)=۱$ است.



شکل ۱-۳-فاصله بین دو رأس

همچنین گریز از مرکز، شعاع و قطر یک گراف نیز به صورت های زیر تعریف می شود.

خروج از مرکز v که با نماد $e(v)$ نمایش داده می شود، برابر با بیشترین فاصله رأس v از دیگر رئوس است.

شعاع گراف G که با نماد $r(G)$ نمایش داده می شود، برابر با کوچک ترین خروج از مرکز گراف G است.

مفهوم قطر در گراف G که با $diam(G)$ نمایش داده می شود، برابر با بزرگترین خروج از مرکز گراف G است.

8-Distance

تعریف ۱-۱-۶-گراف ساده G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس G یک مسیر وجود داشته باشد و یک مسیر n رأسی و $n-۱$ یالی که شامل یک مسیر به طول $n-۱$ باشد را مسیر نامیده و آن را با P_n نمایش می دهند و به همین ترتیب یک دور یک مسیر n رأسی و n یالی است که رأس ابتدا و انتهای آن یکی باشد و آن را با C_n نمایش می دهند. یک گراف همبند بدون دور را یک درخت می نامیم و به رئوس درجه یک، برگ می گوییم، یک درخت که تنها دو رأس غیر آویزان[۱۰] داشته باشد را دو ستاره می نامیم.

تعریف ۱-۱-۷-فرض کنید $v \in V(G)$ رأسی از گراف G باشد. همسایگی باز v را با $N(v)$ نمایش می دهیم که برابر با مجموعه رئوسی از $V(G)$ است که با v مجاور است یا به عبارتی

$$N(v)=\{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$$

و همسایگی بسته v را با $N[v]$ نمایش می دهیم که

$$N[v]=N(v) \cup \{v\}$$

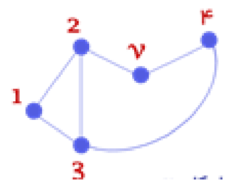
می باشد و اگر $S \subseteq V(G)$ مجموعه ای از رئوس باشد، $N(S)$ همسایگی باز این رئوس است و

$$N(S)=\bigcup_{v \in S} N(v)$$

اگر $S \subseteq V(G)$ مجموعه ای از رئوس باشد، $N[S]$ همسایگی بسته این رئوس است و

$$N[S]=N(S) \cup S$$

مثال: در شکل زیر همسایگی باز و بسته به ترتیب $N[v]=\{۲,۴,v\}$, $N(v)=\{۲,۴\}$ است.



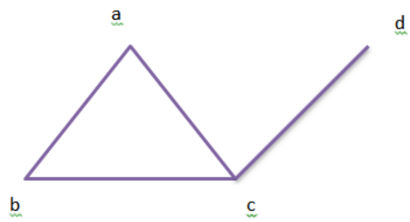
شکل ۱-۴-همسایگی باز و بسته یک رأس

9-support

تعریف ۱-۱-۸-برای گراف $G=(V,E)$، مجموعه $S\subseteq V(G)$ را مجموعه غالب نامیم اگر $N[S]=V(G)$ باشد. به عبارت دیگر برای گراف $G=(V,E)$ مجموعه $S\subseteq V(G)$ را مجموعه غالب (احاطه گر) گویند اگر هر رأس در V\S مجاور با یک رأس در S باشد. عدد غالب G را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم و $\gamma(G)=min|S|$ که S مجموعه غالب است. برای زیر مجموعه های $S,T\subseteq V(G)$ مجموعه S را مجموعه غالب بر T می گوییم اگر هر رأس T مجاور یک رأس S باشد. عدد غالب دارای تعریفی تابعی به شرح زیر است.

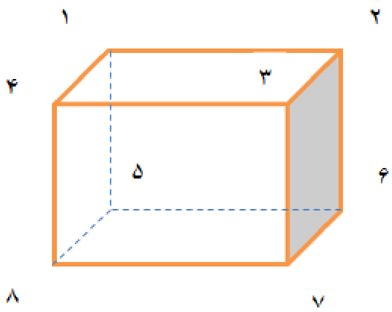
تابع $f:V(G)\rightarrow\{۰,۱\}$ تابع غالب نامیم هرگاه برای هر x که $f(x)=۰$ رأس y مجاور با x موجود باشد که در آن $f(y)=۱$ یا به گفته‌ای برای هر x که $f(x)=۰$، آنگاه $\sum_{y\in N(x)} f(y)\geq ۱$. دراین صورت $w_t(f)=\sum_{x\in V(G)} f(x)$ و $\gamma(G)=min\, w_t(f)$ می شود.

شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱-۵-گرافی با عدد غالب ۱

به عنوان مثال اگر تابع f به رأس c عدد ۱ و به بقیه رئوس عدد صفر را نظیر کند دراین صورت تابع f با مینیمم وزن خواهد بود و به گراف بالا یک مجموعه غالب مناسب نسبت داده شده است و لذا $\gamma(G)$ برای این گراف ۱ می شود. همچنین گراف شکل ۱-۶ یک گراف با عدد غالب ۲ است. اگر تابع f تابع غالب این گراف باشد، کافی است این تابع به رأس های ۱ و ۷ عدد ۱ و به بقیه رئوس صفر نظیر کند. در این حالت این تابع با مینیمم وزن خواهد بود، لذا $\gamma(G)$ برابر با ۲ است.



شکل ۱-۶-گرافی با عدد غالب ۲

در شکل ۱-۶ می توان مجموعه $S=\{۱,۷\}$ را به عنوان یک مجموعه غالب با مینیمم وزن در نظر گرفت. پس در این گراف $\gamma(G)=۲$ است.

تعریف ۱-۱-۹-برای گراف $G=(V,E)$ مجموعه $S\subset V$ را مجموعه غالب تام نامیم اگر $N(S)=V(G)$ باشد، در این صورت به مجموعه S یک مجموعه غالب تام برای گراف G می گوییم. همچنین عدد غالب تام دارای تعریف تابعی، به شرح زیر است.

تابع $f:V(G)\to\{0,1\}$ تابع غالب تام است هرگاه برای هر x داشته باشیم $\sum_{y\in N(x)} f(y)\geq 1$.

در این صورت

$$w_t(f)=\sum_{x\in V(G)} f(x)$$

و

$$\gamma_t(G)=\min_{f\text{ تابع غالبی تام است}} w_t(f).$$

در شکل ۱-۵ زیر مجموعه $\{\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$، مجموعه های غالب تام می باشند و مجموعه $\{b,d\}$ مجموعه غالب تام نیست.

به عنوان مثال اگر تابع f به رأس c و d عدد۱ و به بقیه رئوس عدد صفر را نسبت دهد در این صورت تابع f با مینیمم وزن خواهد بود و به گراف ۱-۵ یک تابع غالب تام مناسب نسبت داده شده است.

تعریف ۱-۱-۱۰-فرض کنید مجموعه ای با k رنگ داریم و به هر رأس از گراف G زیرمجموعه دلخواهی از این رنگ ها را نسبت دهیم. اگر هر رأسی که به آن مجموعه تهی اختصاص یافته در همسایگی اش تمامی رنگ ها را داشته باشیم آنگاه به مجموعه تمام زیرمجموعه های اختصاص داده شده به مجموعه رئوس گراف G مجموعه غالب رنگین کمان گراف G می گوییم. اندازه این مجموعه غالب نیز برابر با تعداد رنگ های اختصاص داده شده به رئوس گراف G است.

فرض کنید $G(V,E)$ گرافی ساده و بدون جهت باشد و $C=\{1,2,\ldots,k\}$ مجموعه ای از k رنگ باشد و f تابعی باشد که به هر رأس مجموعه ای از این k رنگ را اختصاص دهد، اگر برای هر رأس $v\in V(G)$ که در آن $f(v)=\varnothing$ باشد داشته باشیم

$$\bigcup_{u\in N(v)} f(u)=C.$$

در این صورت به این تابع یک تابع غالبی k-رنگین کمان گوییم. اندازه هر یک از این توابع برابر با مجموع رنگ های اختصاص داده شده به مجموعه رئوس گراف G است. برای هر گراف G حداقل وزن یک تابع غالب k-رنگین کمان را عدد غالب k-رنگین کمان گراف G گویند و آن را با $\gamma_{rk}(G)$ نمایش می دهند.

فرض کنید در یک شهرستان تعدادی روستا داریم که فاقد امکاناتی مانند درمانگاه و آتش نشانی و غیره باشند و مسئولان بخواهند طوری برنامه ریزی کنند که در این روستا ها یا همسایگی این روستا ها

همه این امکانات موجود باشد و بخواهند با کمترین هزینه این امکانات را در همسایگی روستاهایی که فاقد حداقل یکی از این امکانات هستند، ایجاد کنند. یکی از کاربرد های احاطه گر k-رنگین کمان در چنین مسائلی و بهینه سازی چنین اموری است.

گراف G در شکل ۱-۷ را در نظر بگیرید اگر بخواهیم $\gamma_{r3}(G)$ آن را محاسبه کنیم، واضح است که عدد غالب ۳-رنگین کمان آن ۳ خواهد بود. زیرا کافی است به رأس c مجموعه $\{1,2,3\}$ و به بقیه رئوس مجموعه $\varnothing$ را نظیر کنیم.

تعریف ۱-۱-۱۱: یک تطابق یا جور سازی یک زیر مجموعه M از یال های G است که هیچ دو یالی در M انتهای مشترک نداشته باشد. جورسازی M را جورسازی ماکزیمم نامیم، هرگاه برای هر جورسازی N داشته باشیم $|N|\leq|M|$. جورسازی M را جورسازی ماکسیمال نامیم هرگاه زیرمجموعه محض هیچ جورسازی دیگری نباشد. به عنوان مثال جورسازی $\{ac\}$ یک جورسازی ماکسیمال درگراف شکل ۱-۵ است.

فرض کنید M یک جورسازی در گراف G باشد. رأس x را M-رأس می نامیم هرگاه رأس x رأس پایانی یکی از یال های M باشد، در غیراین صورت آن را $\overline{M}$-رأس می نامیم و همچنین هرگاه هر رأس G، M-رأس باشد جورسازی M را یک جورسازی تام (کامل) گوییم. اگر M یک جورسازی در گراف G باشد، آنگاه $|M|\leq\left|\frac{n}{2}\right|$ و اگر N یک جورسازی تام در گراف G باشد، آنگاه $|N|=\frac{n}{2}$. پس اگر G دارای جورسازی تام باشد، آنگاه تعداد رئوس G زوج است. بوضوح هر جورسازی تام یک جورسازی ماکزیمم است.

در شکل ۱-۵ مجموعه $\{ac\}$ و $\{ab,cd\}$ جورسازی هایی برای گراف G هستند و جورسازی $\{ab,cd\}$ جورسازی تام است، همچنین این جورسازی، یک جورسازی ماکزیمم نیز هست.

مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک مجموعه مستقل می گوییم هرگاه گراف القاء شده توسط S یعنی $\langle S\rangle$ یک گراف تهی باشد، به عبارت دیگر هیچ دو رأسی در S مجاور نباشند، عدد استقلال G را با $\beta(G)$ نمایش می دهیم و مقدار آن برابر با ماکسیمم اندازه S است. یعنی

$$\beta(G)=\max_{\text{مجموعه مستقل است } S}|S|$$

مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک خوشه می گوییم هرگاه گراف القاء شده توسط S یعنی $\langle S\rangle$ یک گراف کامل باشد. عدد خوشه ای G را با $\omega(G)$ نمایش می دهیم و مقدار آن برابر با ماکسیمم اندازه S می باشد.

$$\omega(G)=\max_{\text{خوشه است } S}|S|$$

تعریف۱-۱-۱۲-فرض کنید $G=(V(G),E(G))$ یک گراف است.یک رنگ آمیزی رئوس گراف G یک نگاشت $f:V(G)\to C$ است که در آن C مجموعه ای از رنگ هاست. $(C\in Z^{+})$

یک رنگ آمیزی را رنگ آمیزی سره رأسی گوییم، هرگاه رنگ هر دو رأس مجاور متفاوت باشد یا به عبارتی برای هر یال $e=uv\in E(G)$، $f(u)\neq f(v)$ باشد. در یک رنگ آمیزی اگر از k رنگ استفاده کرده باشیم می گوییم که یک k-رنگ آمیزی داریم و گراف G را $k-$رنگ پذیر گوییم، اگر دارای یک $k-$رنگ آمیزی باشد، عدد رنگی رأسی را با $\mathcal{X}(G)$ نمایش می دهیم.

$$\mathcal{X}(G)=min\{k: \text{رنگ پذیراست } k \text{ ،}G\}$$

به عنوان مثال عدد رنگی رأسی چند گراف در زیر آورده شده است.

$$\mathcal{X}(C_۴)=۲ \text{ و } \mathcal{X}(k_n)=n \ .$$

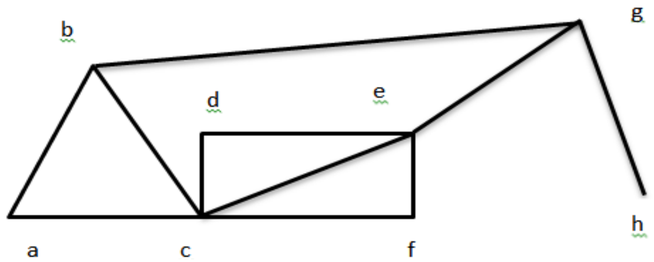
یکی از کاربرد های احاطه گر جفت شده در امور امنیتی است، هنگامی که بخواهیم با کمترین هزینه و نیروی امنیتی، محافظان یک مجموعه را مورد پشتیبانی(حمایت) قرار دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۳-برای گراف $G=(V,E)$ مجموعه $S\subset V$ که $S\neq\varnothing$ را یک مجموعه غالب جفت شده نامیم، اگر

الف) S یک مجموعه غالب تام باشد؛

ب) $G([S])$ دارای جورسازی تام باشد.

هر گراف فاقد رأس تنها یک مجموعه غالب جفت شده دارد. رئوس انتهایی هر جورسازی ماکسیمال تشکیل یک مجموعه غالب جفت شده می دهند. به عنوان مثال $\{ac\}$ در شکل ۵-۱ یک جورسازی ماکسیمال است و یک مجموعه غالب جفت شده برای گراف G تشکیل می دهد، همچنین در شکل زیر، مجموعه $\{bc,ef,gh\}$ یک جورسازی ماکسیمال برای این گراف است بنابراین یک مجموعه غالب جفت شده برای این گراف است.



شکل ۱-۷-گرافی با جورسازی ماکسیمال $\{bc,ef,gh\}$

تعریف ۱-۱-۱۴-حاصلضرب دکارتی دوگراف G,H را با $G\Box H$ نمایش می دهیم. حاصلضرب دکارتی گراف های G,H گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)\times V(H)$ که در آن دو رأس $(g_۱,g_۲)$ و $(h_۱,h_۲)$ مجاورند اگر و فقط اگر $g_۱=g_۲, h_۱h_۲\in E(H)$ یا $g_۱g_۲\in E(G), h_۱=h_۲$.

در این صورت درجه رأس (g,h) در $G\Box H$ و مرتبه $G\Box H$ از روابط زیر بدست می آید