دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

توسیع‌هایی از حلقه‌های تمیز و بررسی خواص حلقه‌های تمیز

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

پژوهشگر

بی بی حنیفه اوزونی دوجی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: اوزونی دوجی   نام: بی بی حنیفه

عنوان: توسیع‌هایی از حلقه‌های تمیز و بررسی خواص حلقه‌های تمیز

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی   گرایش: جبر

دانشگاه: شاهرود   دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۶۶

واژگان کلیدی: حلقه‌های تمیز، حلقه‌های ماتریس، عناصر کامل، حلقه‌های که شامل تعدادی عنصر کامل هستند

چکیده

ابتدا در این پایان‌نامه حلقه f- تمیز را تعریف می‌کنیم و سپس به بررسی خواص حلقه‌های f - تمیز می‌پردازیم. فرض کنیم $C = \begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ یک حلقه موریتاکانتکس باشد. شرایطی را که تحت آن C یک حلقه f - تمیز باشد را بیان می‌کنیم. همچنین حلقه‌هایی که شامل تعدادی عنصر کامل هستند را تعریف می کنیم و ساختار این حلقه ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در ادامه نشان می‌دهیم که اگر حلقه R شامل تعدادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه $M_n(R)$ نیز چنین است. در آخر به معرفی حلقه‌های تمیز و تمیز یکتا می‌پردازیم و برخی خواص این حلقه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه، برگرفته از مقالات

[۱] و [۱۰] می باشد .

تقدیم به

مادر و

همسر عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم ودانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره‌ی پرخاطره از تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرهیخته و فرزانه، جناب آقای دکتر هاشمی که همواره راهنما و راه‌گشای من در اتمام این پایان‌نامه بوده است، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، زحمات مادر مهربانم را ارج می‌نهم که همواره در پستی و بلندی‌های زندگی، همراهم بوده و دعای خیرش بدرقه ی راهم بوده است و تشکر می‌کنم از همسر صبورم که همراه وپشتیبان من بوده است. همچنین از دوستان عزیزم خانم سمیه ممی زاده، خانم خدیجه پاسبان، خانم زهرا وزیری و خانم سمیه حیدری که مرا در این مهم یاری نمودند نهایت سپاسگزاری را دارم و برایشان آرزوی موفقیت می‌کنم.

بی بی حنیفه اوزونی دوجی

۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

حلقه‌های تمیز بوسیله نیکلسون [۱] [۱۱]، تعریف شد. علاوه بر او نویسنده‌های زیادی حلقه های تمیز را مورد بررسی قرار داده‌اند: از جمله کامیلو [۲]، اندرسون [۳]، یو [۴] و خورانا. [۵]

اندرسون و کامیلو در [۱] نشان دادند که حلقه چند جمله‌ای‌ها روی حلقه تعویض‌پذیر ناصفر تمیز نیست. همچنین چن در [۳] نشان داد که اگر حلقه‌های A و B شامل تعدادی عنصر کامل باشند، آن‌گاه حلقه موریتاکانتکس T نیز چنین است.

در این پایان‌نامه در فصل اول نمادها، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا حلقه‌های f ـ تمیز را تعریف می‌کنیم و سپس به بررسی خواص حلقه‌های f ـ تمیز می‌پردازیم و شرایطی که تحت آن حلقه موریتاکانتکس $T=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ یک حلقه fـ تمیز باشد را بیان می‌کنیم و همچنین نشان می‌دهیم اگر حلقه R یک حلقه f ـ تمیز باشد، آن‌گاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز f ـ تمیز است. در ادامه به معرفی حلقه‌هایی که شامل تعدادی عنصر کامل هستند می‌پردازیم و همچنین نشان می‌دهیم که اگر حلقه R شامل تعدادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه $M_n(R)$ نیز چنین است.

در فصل سوم به معرفی حلقه‌های تمیز می‌پردازیم و مثال‌هایی از آن بیان می‌کنیم. همچنین معادل‌هایی برای حلقه تمیز ارائه می‌دهیم. در ادامه روش‌های دیگری که می‌توان ویژگی‌های حلقه‌های تمیز را بررسی نمود، ارائه می‌دهیم. در آخرحلقه‌های تمیز یکتا را معرفی می‌کنیم و قضایا و گزاره‌هایی در این مورد بیان می‌کنیم.

مطالب ارائه شده در این پایان‌نامه، برگرفته از مقالات [۱] و [۱۰] می باشد.

---
[۱] Nicholson
[۲] Comillo
[۳] Anderson
[۴] Yu
[۵] Khurana

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه‌ی غیر صفر شرکت‌پذیر و یکدار است مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود و از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$U(R)$: مجموعه‌ی یکه‌های حلقه‌ی R،

$N(R)$: مجموعه‌ی غیر یکه‌های حلقه‌ی R،

$T_n(R)$: حلقه ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ روی R،

$M_n(R)$: حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی R،

$GL_n(R)$: گروه خطی عمومی $n-$بعدی روی R،

$J(R)$: رادیکال جیکبسون حلقه R،

$K(R)$: مجموعه عناصر کامل حلقه R،

$Ann(X)$: صفرسازX،

$R[X]$: حلقه چند جمله‌ای‌ها،

$R[[X]]$: حلقه‌های سریهای توانی،

PID: دامنه ایده‌آل اصلی،

$Spec(R)$: مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R،

$Max(R)$: مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R،

$Min(R)$: مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R.

$Id(R)$: مجموعه خودتوان‌های حلقه R ،

$R^{n\times 1}$: مجموعه $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in R \right\}$،

$R^{1\times n}$: مجموعه $\left\{ \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in R \right\}$،

برای هر $\alpha, \beta \in U(R)$ و $a, b \in R$، قرار می‌دهیم:

$$B_{۱۲}(a) = \begin{pmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad B_{۲۱}(a) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{pmatrix}, \quad [\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & \beta \end{pmatrix}.$$

بوضوح برای هر $\alpha_۱, \alpha_۲, \beta_۱, \beta_۲ \in U(R)$، $x, y \in R$ و $۱ \leq i, j \leq ۲$، رابطه‌های زیر برقرارند:

(۱) $B_{ij}(x)B_{ij}(y) = B_{ij}(x+y)$،

(۲) $B_{ij}(x)[\alpha_۱, \alpha_۲] = [\alpha_۱, \alpha_۲]B_{ij}(\alpha_i^{-۱}x\alpha_j)$،

(۳) $[\alpha_۱, \alpha_۲]B_{ij}(x) = B_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-۱})[\alpha_۱, \alpha_۲]$،

(۴) $[\alpha_۱, \alpha_۲][\beta_۱, \beta_۲] = [\alpha_۱\beta_۱, \alpha_۲\beta_۲]$،

(۵) $[\alpha_۱, \alpha_۲]^{-۱} = [\alpha_۱^{-۱}, \alpha_۲^{-۱}]$،

(۶) $B_{ij}^{-۱}(x) = B_{ij}(-x)$.

رابطه‌های فوق را رابطه های Δ می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱. حلقه‌های A و B را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که ${}_AV_B$، (A, B)- دومدول و ${}_BW_A$، (B, A)- دومدول باشند و $\psi : V \otimes_B W \longrightarrow A$ و $\phi : W \otimes_A V \longrightarrow B$ هomomorphism‌های دومدولی باشند بطوری‌که $\psi(v \otimes w)v' = v\phi(w \otimes v'), \phi(w \otimes v)w' = w\psi(v \otimes w')$.

در این‌صورت (A, B, V, W, ψ, ϕ) را موریتاکانتکست می‌نامیم. فرض کنیم $T = \begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$.

عمل دوتایی ضرب روی T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & v' \\ w' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \psi(v \otimes w') & av' + vb' \\ wa' + bw' & \phi(w \otimes v') + bb' \end{pmatrix}.$$

می‌توان نشان داد که T با دو عمل دوتایی جمع معمولی ماتریس‌ها و ضرب دوتایی فوق یک حلقه است.

T را حلقه موریتاکانتکست می‌نامیم.

واضح است که کلاس حلقه‌های موریتاکانتکست شامل حلقه ماتریس‌های ۲×۲ و حلقه ماتریس‌های مثلثی

است.

تعریف ۲.۲.۱. الف) عنصر $a \in R$ را فون نیومن منظم می‌نامیم، هرگاه $a \in aRa$.

ب) حلقه R را فون نیومن منظم می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن فون نیومن منظم باشد.

تعریف ۳.۲.۱. الف) عنصر e از حلقه‌ی R را خودتوان می‌نامیم، هرگاه $e^{2} = e$.

ب) حلقه‌ی R را بولی می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن خودتوان باشد.

ج) خودتوان $e \in R$ را مرکزی می‌نامیم، هرگاه برای هر $r \in R$، $re = er$.

تعریف ۴.۲.۱. حلقه‌ی R را تقلیل یافته می‌نامیم، هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱. تمام ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$، با درایه‌هایی از حلقه R را گروه خطی عمومی n - بعدی روی R می‌نامند و با نماد $GL_n(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد.

الف) $0 \neq a \in R$ را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم، هرگاه a یکه نباشد و اگر $a = xy$ باشد، آن‌گاه x یا y یکه باشد.

ب) $0 \neq p \in R$ را اول می‌نامیم، هرگاه p یکه نباشد و اگر $p \mid xy$، آن‌گاه $p \mid x$ یا $p \mid y$.

پ) گوییم دو عنصر a و b شریک هستند، هرگاه $a \mid b$ و $b \mid a$.

تعریف ۷.۲.۱. دامنه‌ی صحیح R را یک دامنه تجزیه یکتا می‌نامیم و با علامت UFD نمایش می‌دهیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) هرعنصر ناصفر غیر یکه a از حلقه‌ی R را بتوانیم به صورت $a = p_1 \ldots\ldots p_m$ بنویسیم، بطوری‌که $p_1, \ldots, p_m$ عناصری تحویل‌ناپذیر هستند.

ب) اگر $p_1 \ldots p_m = q_1 \ldots q_n$، بطوری‌که $p_1, \ldots, p_m$ و $q_1, \ldots, q_n$ عناصری تحویل‌ناپذیر هستند، آن‌گاه $n = m$ باشد و $\delta \in S_n$ وجود داشته باشد بطوری‌که q_i و $p_{\delta(i)}$ شریک باشند.

تعریف ۱.۲.۸. الف) فرض کنیم R یک حلقه یکدار باشد. فرض کنیم $R[[x]]$ مجموعه تمام دنباله‌های $a_0 + a_1x + \ldots$ روی R باشد. اعمال جمع و ضرب را روی آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(a_0 + a_1x + \ldots) + (b_0 + b_1x + \ldots) = ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots)$ و

$(a_0 + a_1x + \ldots)(b_0 + b_1x + \ldots) = (c_0 + c_1x + \ldots)$ بطوری‌که برای هر k، $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$. در نتیجه به سادگی می‌توان نشان داد $R[[x]]$ یک حلقه یکدار بوده و $(1, 0, \ldots)$ عضو خنثی ضربی آن است. آن را حلقه‌های سریهای توانی نامیده و عناصر $R[[x]]$ همان سریهای توانی روی R هستند.

ب) فرض کنیم R یک حلقه و δ یک درون‌ریختی روی R باشد. حلقه سریهای توانی اریب را با $K = R[[x;\delta]]$ نمایش می‌دهیم. عناصر آن همانند عناصر سریهای توانی است. جمع و ضرب روی K بطور طبیعی تعریف می‌شود، بطوری‌که برای هر $a \in R$، $xa = \delta(a)x$.

تعریف ۱.۲.۹. می‌گوییم که زیر مجموعه‌ی S از حلقه جابجایی R ضربی بسته است اگر

الف) $1 \in S$ و

ب) اگر $s_1, s_2 \in S$ ، آن‌گاه $s_1s_2 \in S$.

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از حلقه جابجایی R باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای (a, b) و $(b, t) \in R \times S$

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : u(ta - sb) = 0.$$

در این‌صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

رده هم‌ارزی شامل $(a, s) \in R \times S$ را با a/s یا $\frac{a}{s}$ و مجموعه رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}\text{و } \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}$$

به ازای $a, b \in R$ و $s, t \in S$، حلقه‌ای جابجایی است. این حلقه جدید $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R نسبت به S می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی و P ایده‌آلی اول از حلقه R باشد. فرض کنیم $S := R \setminus P$. در این‌صورت حلقه $S^{-1}R$ را با R_p نمایش می‌دهیم. R_p را حلقه حاصل از موضعی سازی R در P می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۲.۱. *اگر $P \in Spec(R)$ و $P \cap S = \emptyset$، آن‌گاه*

$P^e = \{\lambda \in S^{-1}R : \lambda = \dfrac{a}{s}, a \in P, s \in S\} \in Spec(S^{-1}R)$.

برهان. به [۱۲] قضیه ۳۲.۵ رجوع کنید. $\square$

گزاره ۱۳.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & c \end{pmatrix}$، که $A \in GL_2(R)$ و $\alpha \in U(R)$. در این‌صورت عناصر $d, e \in R$ و $\beta \in U(R)$ وجود دارند بطوری‌که*

$$A = [\alpha, \beta]B_{21}(d)B_{12}(e),$$

که در آن $\beta = -b\alpha^{-1}a + c$، $d = \beta^{-1}b$ *و* $e = \alpha^{-1}a$.

برهان. ثابت می‌کنیم $x, y \in R$ وجود دارند که

$$B_{21}(x) \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & c \end{pmatrix} B_{12}(y) = [\alpha, \beta].$$

در واقع $x, y \in R$ باید در تساوی زیر صدق کنند:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha y + a \\ xa + b & (x\alpha + b)y + xa + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

پس $\alpha y + a = 0$ و $x\alpha + b = 0$. در نتیجه $y = -\alpha^{-1}a$، $x = -b\alpha^{-1}$ و $\beta = -b\alpha^{-1}a + c$. چون $B_{21}(x)AB_{12}(y)$ وارون‌پذیر است (وارون آن بصورت $B_{12}(-y)A^{-1}B_{21}(-x)$ می‌باشد.)، پس $[\alpha, \beta]$ وارون‌پذیر است. لذا $\beta \in U(R)$. پس

$$B_{21}(-b\alpha^{-1})AB_{12}(-\alpha^{-1}a) = [\alpha, \beta].$$

با ضرب تساوی فوق از راست در $B_{۱۲}(\alpha^{-۱}a) = B_{۱۲}^{-۱}(-\alpha^{-۱}a)$ و از چپ در $B_{۲۱}(b\alpha^{-۱}) = B_{۲۱}^{-۱}(-b\alpha^{-۱})$، داریم:

$$A = B_{۲۱}(b\alpha^{-۱})[\alpha, \beta]B_{۱۲}(\alpha^{-۱}a).$$

ازبند (۲) روابط Δ، داریم $B_{۲۱}(b\alpha^{-۱})[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta]B_{۲۱}(\beta^{-۱}b)$. پس

$$A = [\alpha, \beta]B_{۲۱}(\beta^{-۱}b)B_{۱۲}(\alpha^{-۱}a).$$

□

گزاره ۱.۲.۱۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \beta \end{pmatrix}$، که $A \in GL_۲(R)$ و $\beta \in U(R)$. در این‌صورت عناصر $d, e \in R$ و $\alpha \in U(R)$ وجود دارند بطوری‌که*

$$A = [\alpha, \beta]B_{۱۲}(d)B_{۲۱}(e),$$

که $\alpha = a - b\beta^{-۱}c$، $d = \alpha^{-۱}b$ و $e = \beta^{-۱}c$.

برهان. مشابه گزاره‌ی قبل اثبات می شود. □

تعریف ۱.۲.۱۵. الف) حلقه‌ی R را تجزیه پذیر می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل‌های $I_۱, \ldots, I_n$ $(n > ۱)$ از R موجود باشند بطوری‌که $R = I_۱ \oplus I_۲ \oplus \cdots \oplus I_n$.

ب) حلقه‌ای که تجزیه پذیر نباشد، تجزیه ناپذیر می‌نامیم.

نتیجه ۱.۲.۱۶. *حلقه‌ی R تجزیه ناپذیر است، اگر و تنها اگر ۱ تنها خودتوان مرکزی غیرصفر حلقه R باشد.*

برهان. به [۲] نتیجه ۷.۷ رجوع کنید. □

نتیجه ۱.۲.۱۷. *فرض کنیم R یک حلقه و $I_۱, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند بطوری‌که برای هر $i \neq j$، $I_i + I_j = R$. در این‌صورت $\frac{R}{I_۱ \cap \ldots \cap I_n} \cong \prod_{i=۱}^{n} \frac{R}{I_i}$.*

برهان. به [۹] نتیجه ۲.۲۷ رجوع کنید. □

قضیه ۱۸.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار بوده و $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$. در این‌صورت f یک یکه در R است، اگر و تنها اگر a_0 یک یکه در R بوده و $a_1,\dots,a_n$ عناصر پوچ‌توانی از R باشد.*

برهان. به [۹] رجوع کنید.

تعریف ۱۹.۲.۱. حلقه تعویض‌پذیر R را موضعی می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد داشته باشد؛ اگر M ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد R باشد، آن‌گاه آن را به صورت (R,M) نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۰.۲.۱. *هرگاه R یک حلقه جابجایی و یکدارباشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند :*

(۱) *R یک حلقه موضعی است.*

(۲) *تمام غیریکه‌های R مشمول ایده‌آلی سره مانند M هستند.*

(۳) *غیر یکه‌های R یک ایده‌آل تشکیل می‌دهند.*

برهان. (۱) $\Longrightarrow$ (۲): هرگاه $a \in R$ یک غیریکه باشد، آن‌گاه $R \neq (a)$. بنابراین (a) مشمول ایده‌آل ماکسیمال منحصربه فرد M است.

(۲) $\Longrightarrow$ (۳): واضح است.

(۳) $\Longrightarrow$ (۱) : می‌دانیم $N(R)=\cup_{m\in Max(R)} m \trianglelefteq R$. چون $1 \notin N(R)$، لذا $N(R)$ ایده‌آل سره‌ای از R است و لذا ایده‌آل ماکسیمالی از R مانند $\underline{n}$ وجود دارد که $N(R) \subseteq \underline{n}$. حال فرض کنیم $\underline{m}$ ایده‌آل ماکسیمال دلخواهی از R باشد. در این‌صورت

$$\underline{m} \subseteq \cup_{m\in Max(R)} m \subseteq \underline{n}.$$

چون $\underline{m}$ ماکسیمال است، پس $\underline{m}=\underline{n}$. یعنی حلقه‌ی R موضعی است. □

لم ۲۱.۲.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی باشد و $r \in R$. در این‌صورت $r \in J(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، $1-ra$ در R وارون‌پذیر باشد.*

برهان. به [۱۲] لم ۱۷.۳ رجوع کنید. □

تعریف ۲۲.۲.۱. گوییم حلقه R خاصیت برد پایدار یک دارد، هرگاه $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، آن‌گاه $y \in R$ وجود داشته باشد بطوری‌که $a + by \in U(R)$.

نتیجه ۲۳.۲.۱. *اگر حلقه R خاصیت برد پایدار یک داشته باشد، آن‌گاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایدار یک دارد.*

برهان. به [۵] نتیجه ۱.۱.۶ رجوع کنید. □

لم ۲۴.۲.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای با برد پایدار یک باشد و M یک R- مدول راست باشد. اگر M توسط دو زیر مجموعه $\{a_۱, \ldots, a_n\}$ و $\{b_۱, \ldots, b_n\}$ تولید شود، آن‌گاه $U \in GL_n(R)$ وجود دارد بطوری‌که $(a_۱, \ldots, a_n) = (b_۱, \ldots, b_n)U$.*

برهان. فرض کنیم M یک R - مدول راست باشد و $a_۱, a_۲, \cdots, a_n, b_۱, b_۲, \cdots, b_n \in M$. چون $a_۱R + a_۲R + \ldots + a_nR = b_۱R + b_۲R + \ldots + b_nR$، پس $(a_۱, \ldots, a_n)M_n(R) = (b_۱, \ldots, b_n)M_n(R)$. لذا ماتریس‌های A و B از $M_n(R)$ وجود دارند که $(a_۱, \ldots, a_n)A = (b_۱, \ldots, b_n)$ و $(a_۱, \ldots, a_n) = (b_۱, \ldots, b_n)B$. چون حلقه R خاصیت برد پایدار یک دارد، پس بنا به نتیجه ۲۳.۲.۱، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایدار یک دارد. از طرفی چون $BA + (I_n - BA) = I_n$، پس $C \in M_n(R)$ وجود دارد که $B + (I_n - BA)C = U \in GL_n(R)$. بنابراین

$$(b_۱, \ldots, b_n)U = (b_۱, \ldots, b_n)(B + (I_n - BA)C) = (a_۱, \ldots, a_n).$$

□

لم ۲۵.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $x \in R$. اگر برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، $\frac{x}{۱} \in R_{\underline{m}}$، $= ۰$، آن‌گاه $x = ۰$.*

برهان. فرض کنیم $\frac{x}{1} \in R_{\underline{m}}$ $= 0$. پس $r \in R - \underline{m}$ وجود دارد بطوری‌که $rx = 0$ و لذا $r \in Ann(x)$.
در نتیجه برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، $(R - \underline{m}) \cap Ann(x) \neq \emptyset$. بنابراین برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، $Ann(x) \nsubseteq \underline{m}$. لذا $Ann(x) = R$. در نتیجه $x = 0$. $\square$

فصل ۲

حلقه‌های f ـ تمیز و حلقه‌هایی که شامل تعداد زیادی عنصر کامل هستند

۱.۲ حلقه‌های f ـ تمیز

در این بخش ابتدا گزاره‌هایی از حلقه‌های f ـ تمیز را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. عنصر $x \in R$ را کامل می‌نامیم، هرگاه $s, t \in R$ وجود داشته باشند بطوری‌که $sxt = ۱$.
مجموعه عناصر کامل را با علامت $K(R)$ نمایش می‌دهیم.
واضح است که عناصر وارون‌پذیر یکطرفه و دوطرفه در $K(R)$ هستند.

تعریف ۲.۱.۲. الف) عنصر $x \in R$ را fـ تمیز می‌نامیم، هرگاه آن را بتوان به صورت حاصل جمعی از یک عنصر کامل و یک خودتوان نوشت.

ب) حلقه‌ی R را f ـ تمیز می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن fـ تمیز باشد.

گزاره ۳.۱.۲. (۱) *هر تصویر همریخت از یک حلقه‌ی f ـ تمیز، f ـ تمیز است.*

(۲) *حاصلضرب مستقیم $R = \prod R_i$ از حلقه‌های $\{R_i\}$، fـ تمیز است، اگر و تنها اگر هر R_i، f ـ تمیز باشد.*

برهان. (۱) فرض کنیم R یک حلقه‌ی f ـ تمیز باشد و $\psi : R \longrightarrow \frac{R}{I}$ یک همریختی حلقه‌ای باشد.
چون R حلقه f ـ تمیز است، پس برای هر $r \in R$ داریم $r = e + w$ که e یک عنصر خودتوان است و $w \in K(R)$. لذا $s, t \in R$ وجود دارند بطوری‌که $swt = ۱$. بنابراین $r + I = e + w + I \in \frac{R}{I}$.
حال نشان می‌دهیم که $w + I$ یک عنصر کامل از $\frac{R}{I}$ است.

$$swt = ۱ \Longrightarrow (s + I)(w + I)(t + I) = swt + I = ۱ + I.$$

لذا $w + I$ یک عنصر کامل از $\frac{R}{I}$ است. در نتیجه $\frac{R}{I}$ نیز یک حلقه f ـ تمیز است.

(۲) $\Longleftarrow$ فرض کنیم که هر R_i یک حلقه f ـ تمیز باشد. برای $x = (x_i) \in R$ و هر i ، داریم $x_i = e_i + w_i$ که e_i خودتوان و برای $s_i, t_i \in R$، داریم $s_i w_i t_i = ۱$. بنابراین $x = e + w$ که $e = (e_i) \in \prod R_i$

یک عنصر خودتوان است و $w = (w_i) \in K(\prod R_i)$ که $(s_i)(w_i)(t_i) = (۱) \in \prod R_i$. در نتیجه x عنصر f ـ تمیز است.

$\Longrightarrow$: فرض کنیم که $\prod R_i$ یک حلقه fـ تمیز باشد. چون هر R_i تصویر همریختی از $\prod R_i$ است ($\theta_k : \prod R_i \longrightarrow R_k$ با ضابطه $(x_i) \mapsto x_k$ همریختی حلقه‌ای است.)، پس بنا به بند (۱)، R_iها نیز حلقه‌های fـ تمیز هستند.

□

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنیم L یک ایده‌آل از حلقه R باشد. گوییم خودتوان‌ها به پیمانه L بالا برده می‌شوند [۱]، هرگاه برای هر $x \in R$، اگر $x - x^۲ \in L$، آن‌گاه خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد بطوری‌که $(e - x) \in L$.

گزاره ۵.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده شوند، آن‌گاه R حلقه f ـ تمیز است، اگر و تنها اگر $\overline{R} = \dfrac{R}{J(R)}$ حلقه fـ تمیز باشد.*

برهان. $\Longleftarrow$: فرض کنیم R یک حلقه fـ تمیز باشد. پس طبق گزاره‌ی ۳.۱.۲، $\overline{R}$ نیز حلقه f ـ تمیز است.

$\Longrightarrow$: فرض کنیم که $\overline{R}$ حلقه f ـ تمیز باشد. اگر $x \in R$، آن‌گاه $\overline{x} = \overline{e} + \overline{w}$ که $e^۲ - e \in J(R)$ و $\overline{swt} = \overline{۱}$ و $s, t \in R$. چون خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده می‌شوند، پس خودتوان e' از R وجود دارد که $x = e' + w + r$ و $r \in J(R)$. چون $\overline{۱} = \overline{swt}$، پس برای $h \in J(R)$ داریم $swt = ۱ + h \in ۱ + J(R) \subseteq U(R)$. لذا $s_۱, t_۱ \in R$ وجود دارند که $s_۱ w t_۱ = ۱$. بنابراین $s_۱(w + r)t_۱ = ۱ + s_۱ r t_۱ \in ۱ + J(R) \subseteq U(R)$. پس برای $u \in U(R)$ داریم $s_۱(w + r)t_۱ u^{-۱} = ۱$. بنابراین $w + r$ یک عنصر کامل از حلقه R است. در نتیجه x عنصر f ـ تمیز است. □

گزاره ۶.۱.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ی f ـ تمیز باشد. اگر خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده شوند، آن‌گاه برای هر $n \geq ۱$، $\dfrac{R[x]}{< x^{n+۱} >}$ نیز f ـ تمیز است.*

[۱] Idempotents can be lifted modulo L