بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

بخش آمار

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

توزیع نرمال چوله
و آمیخته‌های شکلی از آن

استاد راهنما:

دکتر ماه بانو تاتا

مؤلف:

وهاب بهرامی

شهریورماه ۱۳۸۸

تقدیم به پدرم

می‌بوسم دستان پینه بسته‌اش را،

تقدیم به مادرم

که خاک پایش طوطیای چشمانم

و تقدیم به تو

شاید روزی بخوانی ...

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که در گذر از تمام مراحل و مشکلات زندگی یار و یاور ماست و بهترین هدایت‌گر اوست. در اینجا قبل از هرکس از استادان دلسوز، سخت‌کوش و پرتلاشم **خانم دکتر تاتا**، **آقای دکتر جمالیزاده** و **آقای دکتر عرب‌پور** که افتخار شاگردی آنها را داشتم و طی انجام این مجموعه با راهنمایی‌های روشن‌گرانه خود مددرسان اینجانب در حل بسیاری از مشکلات بوده‌اند، کمال قدردانی و تشکر را دارم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از کمک‌ها و زحمات آقایان **مهندس مهران فضیلتی**، **مهندس محسن محمدی**، **مهندس محسن طاهری نژاد** و **مهندس هومن رنجبر** که در انجام این تحقیق از هیچگونه کمکی به اینجانب دریغ نورزیده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

چکیده

توزیع‌های چوله و بخصوص نرمال چوله در سال‌های اخیر بصورت گسترده‌ای مورد مطالعه قرارگرفته و پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در این زمینه بدست آمده است. اننخاب توزیع نرمال چوله به عنوان تعمیمی از توزیع نرمال در حالاتی که داده‌ها با کمی چولگی همراه هستنند، یک انتخاب منطقی است. در این پایان نامه، توزیع نرمال چوله یک متغیره، چند متغیره و چندین تعمیم از آنها را بررسی می‌کنیم. در فصل اول این پایان نامه توزیع نرمال چوله استاندارد را بررسی می‌کنیم. در فصل دوم در مورد یک حالت تعمیم یافته از این توزیع بحث می‌کنیم. فصل سوم این پایان نامه به توزیع نرمال چوله چند متغیره و چند تعمیم از آن اختصاص یافته است. در فصل چهار آمیخته‌های شکلی از توزیع نرمال چوله چند متغیره را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست

عنوان | صفحه

فصل اول

توزیع نرمال چوله

۱-۱ مقدمه

از گذشته‌های دور، در مباحث آماری خانواده های پارامتری وجزئیات آنها موضوع مورد بحث صاحبنظران بوده و در چند سال اخیر، این مبحث با موفقیت چشمگیری همراه بوده است. قسمت قابل توجهی از این مطالعات خانواده توزیع نرمال چوله[۱] می‌باشد. اولین سوالی که مطرح می شود انگیزه ی معرفی توزیع نرمال چوله می‌باشد، که موارد زیر می توانند جواب قانع کننده‌ای به این سوال باشند :

• در بسیاری از مسائل عملی امکان دارد با جوامعی مواجه شویم که دارای توزیع نرمال نیستند ولی به توزیع نرمال نزدیک می باشند.

• در بیشتر اوقات انتظار داریم که داده‌های ما در شرایط استانداردی مثل استقلال یا نرمال بودن صدق کنند، ولی گاهی ممکن است داده‌های ما فاقد چنین شرایطی باشند.

• بسیاری از توزیع‌های آماری به توزیع نرمال گرایش حدی دارند ولی تنها تعداد محدودی خانواده توزیع‌های پارامتری وجود دارند که توزیع نرمال را به عنوان یک حالت خاص در بر می گیرند و نه در حالت حدی.

هنگامی که اصطلاح نرمال چوله را بکار می‌بریم منظور ما یک کلاس از توزیع‌های پارامتری احتمال است که توزیع نرمال را با اضافه کردن پارامتری به نام پارامتر *شکل*[۲] که بیان کننده‌ی چولگی است، به کلاس دیگری از توزیع‌ها که توزیع نرمال یک حالت خاص از آن می‌باشد تعمیم و از نرمال بودن خارج می‌سازد. از لحاظ عملی توزیع نرمال چوله به عنوان تعمیمی از توزیع نرمال درموقعیت‌هایی کاربرد دارد که داده‌ها دارای مقداری چولگی یا کجی باشند و توزیع نرمال بخوبی روی داده‌ها برازش نشود. همچنین از لحاظ تئوری توزیع نرمال چوله علاوه بر حفظ کردن بسیاری از ویژگی‌های توزیع نرمال، خود دارای خصوصیاتی مهم و جالب توجه است که این توزیع را به یک توزیع پرکاربرد تبدیل کرده است.

---
[۱]. skew-normal
[۲]. shap parameter

توزیع نرمال چوله ابتدا توسط آزالینی[۱] (۱۹۸۵ و۱۹۸٦) معرفی شد. در ادامه آزالینی و دالا واله[۲] (۱۹۹٦) حالت چند متغیره این توزیع را ارائه کردند. همچنین آزالینی و کاپیتانو[۳] (۱۹۹۹) خواص مهم و احتمالی این توزیع را بدست آوردند. در ادامه، این توزیع و کاربردهای آن توسط نویسندگان مختلفی تعمیم و گسترش داده شد که برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توان به مراجعه کرد.

در این فصل توزیع نرمال چوله یک متغیره مورد توجه قرار می‌دهیم. به این ترتیب که در این بخش چند قضیه‌ی مهم را بیان می‌کنیم. در بخش ۱-۲ به تعریف توزیع نرمال چوله یک متغیره پرداخته و در بخش ۱-۳ برخی از خواص مهم این توزیع را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در بخش ۱-٤ به محاسبه‌ی تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال چوله می پردازیم و امید و واریانس این توزیع را بدست می‌آوریم. در نهایت، در بخش ۱-۵ درباره‌ی برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر چولگی این توزیع بحث می کنیم.

قبل از معرفی توزیع نرمال چوله، خانواده توزیع‌های متقارن چوله را در قضیه‌های زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم. وانگ، بویر و جنتون[٤] (۲۰۰٤) به بررسی کامل جزئیات این خانواده از توزیع‌ها پرداختند.

قضیه ۱-۱-۱ : اگر f یک تابع چگالی متقارن حول صفر باشد و تابع π که تابع چولگی است به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$\pi : R \to [0,1]$$
$$0 \le \pi(x) \le 1$$
$$\pi(-x) = 1 - \pi(x)$$

آنگاه تابع $f_\pi(.) : R \to R$ که بصورت زیر تعریف می شود یک تابع چگالی است و به آن توزیع متقارن چوله گوییم :

$$f_\pi(x) = 2f(x)\pi(x)$$

اثبات :

فرض کنید که $X \sim f(x)$ در نتیجه :

---
[۱] . Azzalini
[۲] . Dalla Valle
[۳] . Capitanio
[٤] . Wang, Boyer and Genton

$$1)\quad f(x)\geq 0\ ,\ \ \pi(x)\geq 0\ \ \Rightarrow f_{\pi}(x)\geq 0$$
$$2)\quad X\overset{d}{=}-X\ \ \Rightarrow \pi(X)\overset{d}{=}\pi(-X)=1-\pi(X)$$
$$\Rightarrow E\left[2\pi(X)\right]=1\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}2\pi(x)f(x)dx=1.$$

□

قضیه ۱-۱-۲ : اگر $X_{\pi}\sim f_{\pi}$ و $X\sim f$ و همچنین h یک تابع زوج باشد،آنگاه $h(X_{\pi})\overset{d}{=}h(X)$.

اثبات :

اگر Fو F_{π} به ترتیب تابع توزیع متغیرهای تصادفی Xو X_{π} باشند، آنگاه :

$$F_{|X_{\pi}|}(x)=P\left[|X_{\pi}|\leq x\right]=P\left[-x\leq X_{\pi}\leq x\right]=F_{\pi}(x)-F_{\pi}(-x)$$
$$\Rightarrow f_{|X_{\pi}|}(x)=f_{\pi}(x)+f_{\pi}(-x)=2f(x)\pi(x)+2f(x)\pi(-x)$$
$$=2f(x)\pi(x)+2f(x)(1-\pi(x))=2f(x),$$

و چون $f_{|X|}(x)=2f(x)$ پس $|X_{\pi}|\overset{d}{=}|X|$. بنابراین برای هر تابع زوج h داریم :

$$h(X_{\pi})\overset{d}{=}h(|X_{\pi}|)\overset{d}{=}h(|X|)\overset{d}{=}h(X)$$

□

در ادامه کار آزالینی و کاپیتانیو (۲۰۰۳) تابع چگالی $g(x)$ را به فرم زیر تعریف کردند:

$$g(x)=2f(x)G(w(x)) \tag{۱-۱}$$

به طوری‌که $f(x)$ یک تابع چگالی متقارن حول صفراست و $G:R\rightarrow[0,1]$ تابع توزیع یک متغیرتصادفی پیوسته متقارن حول صفر و $w:R\rightarrow R$ یک تابع فرد می باشد.

قضیه ۱-۱-۳ : خانواده توابع $f_{\pi}(x)$ و $g(x)$ معادل می باشند.

اثبات :

با توجه به خصوصیات G,w داریم :

$$G(w(-s)) = G(-w(s)) = 1 - G(w(s))$$

بنابراین $G(w(.))$ یک تابع چولگی است. فرض کنید H یک تابع توزیع اکیداً صعودی از یک متغیر تصادفی متقارن حول صفر باشد بنابراین، به ازای هرتابع چولگی π می‌توان نوشت $\pi(s) = H(k(s))$ بطوریکه $k(s) = H^{-1}(\pi(s))$. پس با توجه به ویژگی‌های H, π داریم :

$$k(-s) = H^{-1}(\pi(-s)) = H^{-1}(1 - \pi(s)) = -H^{-1}(\pi(s)) = -k(s)$$

بنابراین $k(s)$ یک تابع فرد است.

۱-۲ توزیع نرمال چوله

با جایگذاری $f = \phi$ و $G = \Phi$ و $w(x) = \lambda x$، در رابطه (۱-۱)، که ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد می‌باشند، تعریف زیر را نتیجه می‌گیریم :

تعریف ۱-۲-۱ : متغیرتصادفی Z دارای توزیع نرمال چوله می‌باشد، اگرفرم تابع چگالی آن را که با $\phi(z;\lambda)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر باشد :

$$\phi(z;\lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z) \qquad z, \lambda \in R.$$

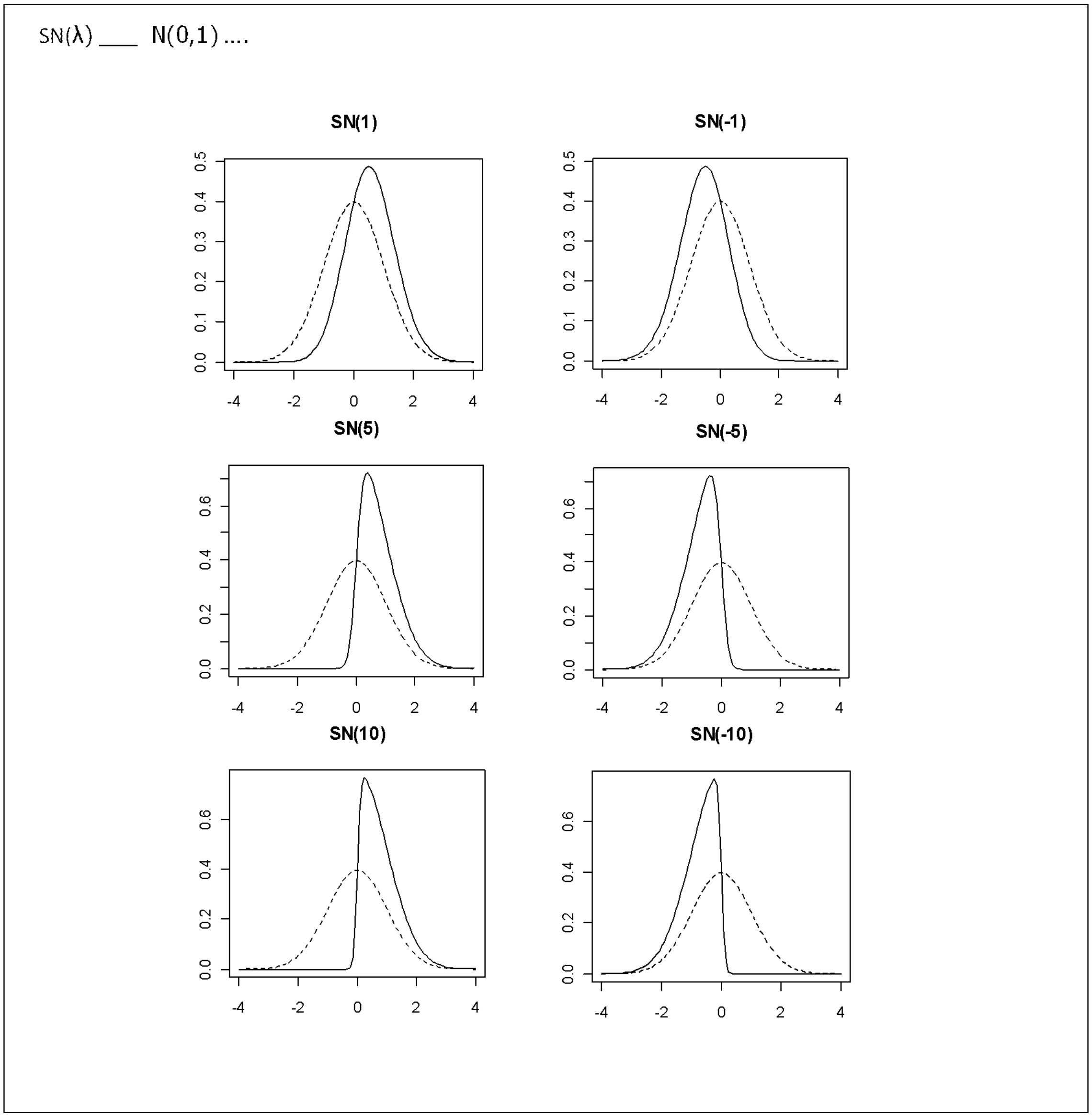
اگر متغیرتصادفی Z دارای توزیع نرمال چوله با پارامتر λ باشد آن را به اختصار با نماد $Z \sim SN(\lambda)$ نشان می‌دهیم. این فرم تابع چگالی برای اولین بار توسط آزالینی (۱۹۸۵) معرفی شد.

لم ۱-۲-۱ : اگر $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ و $Y = \mu + \sigma Z_\lambda$ و $\sigma \in R^+, \mu \in R$ ، آنگاه تابع چگالی Y بصورت زیر است :

$$\phi(z;\lambda,\mu,\sigma) = \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda \times \frac{z-\mu}{\sigma}\right) \tag{۲-۱}$$

اگر شکل تابع چگالی Y بصورت (۱-۲) باشد، می‌نویسیم $Y \sim SN(\mu,\sigma;\lambda)$.

نمودار چگالی نرمال چوله را به ازای مقادیرمختلف (مثبت ومنفی) λ در شکل (١-١) رسم کرده‌ایم.



شکل ١-١ : نمودار تابع چگالی نرمال چوله را به ازای مقادیرمختلف (مثبت ومنفی) λ.

۱-۳ ویژگی‌های توزیع نرمال چوله

قضیه ۱-۳-۱ : اگر $Z \sim SN(\lambda)$ و $X \sim N(0,1)$ آنگاه داریم :

۱. $SN(0)=N(0,1)$

۲. $-Z \overset{d}{=} SN(-\lambda)$

۳. $|Z| \overset{d}{=} |X|$

٤. $Z^2 \sim \chi_1^2$

٥. هنگامی که $\lambda \to +\infty$ آنگاه $Z \overset{d}{=} |X|$

٦. هنگامی که $\lambda \to -\infty$ آنگاه $Z \overset{d}{=} -|X|$

۷. تابع چگالی نرمال چوله قویاً تک مدی است.

اثبات :

۱. با استفاده از تعریف تابع چگالی نرمال چوله و اینکه $\Phi(0)=\frac{1}{2}$ به سادگی اثبات می شود.

۲. با استفاده از تعریف تابع چگالی نرمال چوله و اینکه $\phi(-z)=\phi(z)$ به سادگی اثبات می شود.

۳. اثبات با استفاده از قضیه ۱-۱-۲ بدیهی است.

٤. با توجه به قضیه ۱-۱-۲ داریم $Z^2 \overset{d}{=} X^2$. چون $X^2 \sim \chi_1^2$ ، پس $Z^2 \sim \chi_1^2$.

٥. هنگامی که $\lambda \to +\infty$ داریم :

$$\phi(z;\lambda)=2\phi(z)\Phi(\lambda z)=\begin{cases}2\phi(z) & z>0\\ 0 & z<0\end{cases} \tag{۱-۳}$$

که تابع چگالی(۱-۳) تابع چگالی $|X|$ می‌باشد، در نتیجه $Z \overset{d}{=} |X|$.

٦. همانند قسمت ٥ اثبات می شود.

۷. تابع چگالی f قویاً تک مدی است اگر و تنها اگر لگاریتم آن مقعر باشد.

برای اینکه ثابت کنیم لگاریتم تابع چگالی مقعر است باید ثابت کنیم که $\frac{d^2 \log \phi(z;\lambda)}{dz^2} \leq 0$ بنابراین داریم :

$$\log \phi(z;\lambda) = \log 2 + \log \phi(z) + \log \Phi(\lambda z)$$
$$\frac{d \log \phi(z;\lambda)}{dz} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\lambda \phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} = \frac{\phi'(z)\Phi(\lambda z) + \lambda \phi(z)\phi(\lambda z)}{\phi(z)\Phi(\lambda z)}$$

و همچنین :

$$\frac{d^2 \log \phi(z;\lambda)}{dz^2} = \frac{\phi''(z)\phi(z) - (\phi'(z))^2}{\phi^2(z)} + \frac{\lambda^2 \phi'(\lambda z)\Phi(\lambda z) - \lambda^2 \phi^2(\lambda z)}{\Phi^2(\lambda z)}$$

و با توجه به اینکه توزیع نرمال، یک توزیع تک مدی است داریم :

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \phi(z) = \frac{\phi''(z)\phi(z) - (\phi'(z))^2}{\phi^2(z)} \leq 0 \qquad \forall z \in R$$

در نتیجه داریم :

$$\phi''(z)\phi(z) - (\phi'(z))^2 \leq 0 \qquad \forall z \in R,$$
$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Phi(z) = \frac{\phi'(z)\Phi(z) - \phi^2(z)}{\Phi^2(z)} \leq 0 \qquad \forall z \in R$$

در نتیجه :

$$\phi'(z)\Phi(z) - \phi^2(z) \leq 0 \qquad \forall z \in R$$

با استفاده از روابط بالا داریم :

$$\frac{d^2 \log \phi(z;\lambda)}{dz^2} = \frac{\phi''(z)\phi(z) - (\phi'(z))^2}{\phi^2(z)} + \frac{\lambda^2 \phi'(\lambda z)\Phi(\lambda z) - \lambda^2 \phi^2(\lambda z)}{\Phi^2(\lambda z)} \leq 0.$$

در نتیجه توزیع نرمال چوله قویاً تک مدی می‌باشد.

□

قضیه زیر بیان می‌کند که متغیر تصادفی نرمال چوله را می‌توان به صورت تابعی از دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد نوشت.

قضیه ۱-۳-۲ : اگر U,V متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند و

$$Z = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}|U| + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}V \qquad \lambda \in R$$

آنگاه متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال چوله با پارامتر λ است.

اثبات :

ابتدا فرض کنید $a = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ و $b = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} P(Z_\lambda \le z) &= E\left[P(Z_\lambda \le z) \,\big|\, |U|\right] \\ &= \int_0^{+\infty} P\left\{V \le (z-au)/b\right\} 2\phi(u)du \\ &= 2\int_0^{+\infty} \Phi\left\{(z-au)/b\right\} \phi(u)du \end{aligned}$$

حال به کمک رابطه $a^2 + b^2 = 1$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}P(Z_\lambda \le z) &= 2\phi(z)\int_0^{+\infty} (2\pi b^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{(u-az)^2}{2b^2})du \\ &= 2\phi(z)\left\{1-\Phi(-\frac{a}{b}z)\right\} \\ &= 2\phi(z)\Phi(\lambda z) \end{aligned}$$

قضیه ۱-۳-۳ : اگر X,Y متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه داریم :

$$X \,|\, (Y < \lambda X) \sim SN(\lambda)$$

اثبات :

$$f_{X|(Y<\lambda X)}(x) = \frac{f_X(x)P\left(Y < \lambda X \,|\, X = x\right)}{P\left(Y < \lambda X\right)} = 2\phi(x)\Phi(\lambda x)$$

در نتیجه $X\left|\left(Y<\lambda X\right)\right.\sim SN(\lambda)$.

□

قضیه ۱-۳-٤ : اگر $(X_1,X_2)\overset{d}{=}N_2(0,0,1,1,\rho)$ ، $X_{(1)}=Min(X_1,X_2)$ و $X_{(2)}=Max(X_1,X_2)$ داریم :

۱. اگر $|\rho|\neq 1$، آنگاه : $X_{(1)}\sim SN(-\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$ و $X_{(2)}\sim SN(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$.

۲. اگر $\rho=1$،آنگاه : $X_{(1)}\overset{d}{=}X_{(2)}\overset{d}{=}X_1\overset{d}{=}X_2$.

۳. اگر $\rho=-1$،آنگاه : $X_{(2)}\overset{d}{=}|X_1|, X_{(1)}\overset{d}{=}-|X_1|$

٤. $|X_{(1)}|\overset{d}{=}|X_{(2)}|\overset{d}{=}|X_1|\overset{d}{=}|X_2|$

اثبات :

۱.

$$X_1+X_2\sim N(0,2(1+\rho))\quad\Rightarrow V=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2(1+\rho)}}\sim N(0,1)$$

$$X_1-X_2\sim N(0,2(1-\rho))\quad\Rightarrow U=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2(1-\rho)}}\sim N(0,1)$$

$$Max(X_1,X_2)=\frac{X_1+X_2}{2}+\frac{|X_1-X_2|}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1-\rho}{1+\rho}}}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2(1+\rho)}}+\frac{\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}}{\sqrt{1+\frac{1-\rho}{1+\rho}}}\frac{|X_1-X_2|}{\sqrt{2(1-\rho)}}$$

پس اگر $\lambda=\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$ آنگاه داریم $Max(X_1,X_2)=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}V+\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}|U|$ و با استفاده از قضیه ۱-۳-۲ اثبات کامل می شود.

اثبات $X_{(1)}\sim SN(-\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$ مشابه اثبات $X_{(2)}\sim SN(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$ است.

۲. اگر $\rho = 1$ آنگاه $X_1 \overset{d}{=} X_2$. بنابراین $X_{(1)} \overset{d}{=} X_{(2)} \overset{d}{=} X_1 \overset{d}{=} X_2$.

۳. اگر $\rho = -1$ آنگاه $X_1 \overset{d}{=} -X_2$. بنابراین $X_{(1)} \overset{d}{=} -|X|$ و $X_{(2)} \overset{d}{=} |X|$.

۴. اثبات از قسمت‌های بالا نتیجه می‌شود.

□

نتیجه ۱-۳-۱ : اگر X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند $(\rho = 0)$، داریم :

$$Max(X_1, X_2) \sim SN(1)$$
$$Min(X_1, X_2) \sim SN(-1)$$

قضیه ۱-۳-۵ : اگر

$$(X_1, X_2) \overset{d}{=} N_2(0,0,1,1,\rho)$$
$$Z \sim SN(\lambda)$$
$$X_{(1)} = Min(X_1, X_2)$$
$$X_{(2)} = Max(X_1, X_2)$$
$$\rho = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

آنگاه :

۱. اگر $\lambda \le 0$ آنگاه $Z \overset{d}{=} X_{(1)}$.

۲. اگر $\lambda > 0$ آنگاه $Z \overset{d}{=} X_{(2)}$.

اثبات :

۱. داریم :

$$\rho = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

با استفاده از اثبات قسمت ۱ قضیه ۱-۳-٤ قبل داریم :

$$\lambda \le 0 \Rightarrow |\lambda| = -\lambda = \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \Rightarrow X_{(1)} \sim SN\left(-\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right) \Rightarrow Z \stackrel{d}{=} X_{(1)}$$

۲. با استفاده از اثبات قسمت ۱ قضیه ۱-۳-٤ قبل داریم :

$$\lambda > 0 \Rightarrow |\lambda| = \lambda = \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \Rightarrow X_{(2)} \sim SN\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right) \Rightarrow Z \stackrel{d}{=} X_{(2)}$$

□

قضیه ۱-۳-٦ : اگر $(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} N_2(0,0,1,1,\rho)$، آنگاه:

$$Z \stackrel{d}{=} X_1 \big| (X_2 > 0) \sim SN\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

اثبات :

فرض کنیم که $Y_1, Y_2 \stackrel{iid}{\sim} N(0,1)$.

می دانیم که $(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (Y_1, \rho Y_1 - \sqrt{1-\rho^2} Y_2)$، پس

$$f_Z(z) = \frac{P(X_2 > 0 | X_1 = z)\phi(z)}{P(X_2 > 0)} = 2\phi(z) P(\rho z - \sqrt{1-\rho^2} Y_2 > 0) = 2\phi(z)\Phi\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} z\right)$$

بنابراین $Z \sim SN\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$.

□

قضیه ۱-۳-۷ : اگر $Y_1, Y_2 \stackrel{iid}{\sim} N(0,1)$ و $X = \begin{cases} Y_1 & Y_2 < \lambda Y_1 \\ -Y_1 & Y_2 \ge \lambda Y_1 \end{cases}$، آنگاه $X \sim SN(\lambda)$.

اثبات :

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= f_{Y_1|(Y_2<\lambda Y_1)}(x)\,\mathrm{P}(Y_2<\lambda Y_1) \\
&\quad + f_{-Y_1|(Y_2\geq\lambda Y_1)}(x)\,\mathrm{P}(Y_2\geq\lambda Y_1) \\
&= \phi(x)\Phi(\lambda x)+\phi(-x)[1-\Phi(-\lambda x)] \\
&= 2\phi(x)\Phi(\lambda x)
\end{aligned}
$$

□

۱-٤ گشتاورها

در این بخش تابع مولد گشتاور توزیع نرمال چوله، امید ریاضی و واریانس آن را بدست آورده و سپس چند قضیه درباره‌ی گشتاورهای این توزیع بیان می‌کنیم.

برای بدست آوردن تابع مولد گشتاور توزیع نرمال چوله از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱-٤-۱ : اگر $Y \sim N(0,1)$ ، آنگاه به ازای ثابت های دلخواه $h,k\in\mathbb{R}$ داریم:

$$E[\Phi(hY+k)]=\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right)$$

اثبات :

اگر $X \sim N(0,1)$ مستقل از Y باشد، آنگاه :

$$E[\Phi(hY+k)]=\mathrm{P}(X<hY+k)=\mathrm{P}(X-hY<k)=\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right)$$

□

قضیه ۱-٤-۱ : اگر $Z \sim SN(\lambda)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Z بصورت زیر است :

$$M_Z(t)=2\exp(\frac{t^2}{2})\Phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})$$

اثبات :

$$M_Z(t)=E(e^{tZ})$$