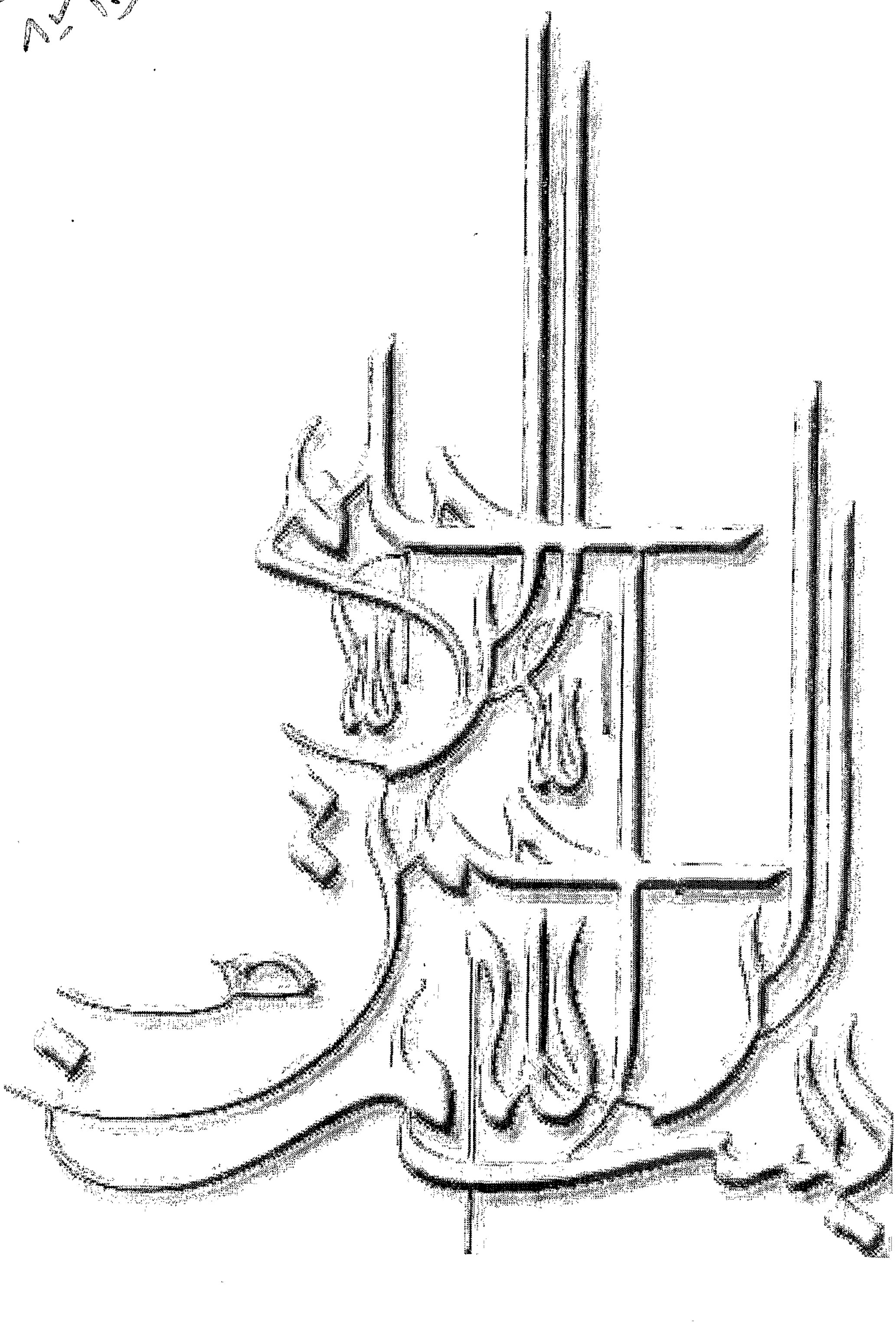
٨٧/١/١٠ ١٩٥٨

جر ١٠ ٨٤



١٠٧٢٢٤

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

فضای $\ell^p(\beta)$

استاد راهنما

دکترحسین امامعلی پور

استاد مشاور

دکترمحمدرضا جبارزاده

پژوهشگر

رسول شهسواری فر

مهر ۱۳۸۷

تقدیم به :

پدر و مادرم

دو بیکران بی همتا، دو زلال اندیش و دو سرو قامتی که گوهر وجودشان، نسیم کلامشان و باران محبتشان را همواره بی هیچ منت و ادعا مرهمی نمودند بر خستگی هایم. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت و ققنوس جوانیشان به پای روشنایی حیات من سوخت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از عشق و محبت بر دستان پر مهرشان بوسه می زنم.

برادران عزیزم و خواهران نازنینم

که همیشه و در همه حال کنارم بودند.

۱۳۸۷ /۱۰/ ۲۱

تقدیر و تشکر

سپاس پروردگار یکتا که نعمت آموختن را به من عطا فرمود. ذات بی همتایی که از ابتدا راه عشق ورزی و دانش اندوزی را بر من رهنمون شد.

از استاد راهنمای ارجمند جناب آقای دکتر حسین امامعلی پور که در نهایت حسن اخلاق، لطف و سعه صدر در تنظیم پایان نامه، اینجانب را ارشاد فرموده و مرا رهین محبت ها و راهنمایهای خویش ساخته اند، تشکر می نمایم.

از جناب آقای دکتر محمد رضا جبارزاده که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند و در اجرای آن از نظرات ارزنده و راهگشای ایشان بهره مند بودم، کمال قدردانی و سپاس را دارم.

از جناب آقای دکتر محمد حسن فاروقی به خاطر تقبل زحمت داوری و بازخوانی متن پایان نامه صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

از اساتید ارجمند آقایان دکتر حمید واعظی و دکتر اصغر رنجبری که در طول دوره تحصیل از محضر علم و اخلاقشان بهره مند بودم از صمیم دل سپاسگذارم.

از دوستان گرانقدر دانشجویان دکتری آقایان سنار خلیل سرباز و محمد رضا عظیمی و دانشجویان کارشناسی ارشد آقایان محمد صالح زرزا ،شهرام میرزایی ،مهدی رادنیا وعباس رزلانسری و نیز سایر دوستان و عزیزانی که مجال نام بردن از تک تک آنها نیست و همچنین از کادر کتابخانه خانم ایزان و خانم زحمتی صمیمانه تشکر و قدر دانی می نمایم. و برای همگان از درگاه ایزد منان آرزوی شادکامی دارم.

رسول شهسواری فر

نام خانوادگی: شهسواری‌فر **نام:** رسول

عنوان: فضای $\ell^p(\beta)$

استاد راهنما: دکتر حسین امامعلی‌پور

استاد مشاور: دکتر محمدرضا جبارزاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۸۷ **تعداد صفحه:** ۷۴

کلمات و اصطلاحات کلیدی: فضای باناخ از سری‌های توانی صوری وابسته به دنباله‌ی β - نقطه محاسبه‌ای کراندار - عملگر ترکیبی - عملگر دوری- عملگر ضربی- بردار دوری- جبر بازتابی - جبر نیم ساده - فضای ایده‌آل ماکسیمال

چکیده:

هدف اصلی در این پایان‌نامه بررسی فضای $\ell^p(\beta)$،فضای همه سری‌های توانی صوری $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n$ ، به طوری‌که $\|f\|^p=\|f\|_\beta^p=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^p|\beta(n)|^p<\infty$ می‌باشد.

نشان می‌دهیم $\ell^p(\beta)$ یک فضای باناخ بازتابی با نرم $\|.\|_\beta$ می‌باشد. شرطی لازم و کافی برای اینکه یک چند جمله‌ای در فضای $\ell^p(\beta)$ دوری باشد را ارائه می‌دهیم و کرانداری تابعک محاسبه‌ای روی این فضا، اکیداً دوری بودن $\ell_p^\infty(\beta)$، فضای ایده‌آل ماکسیمال، فضای دوگان و بازتابی بودن جبر $\ell_p^\infty(\beta)$ را بررسی می‌کنیم. به‌علاوه یک شرط لازم برای کراندار بودن یک عملگر ترکیبی روی $\ell^p(\beta)$، هنگامی که $\ell_p^\infty(\beta)$ اکیداً دوری است، را ارائه می‌دهیم.

****

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان صفحه

****

مقدمه:

موضوع پایان‌نامه، مقاله‌هایی تحت عنوان

۱) On the space $\ell^p(\beta)$

۲) Strictly cyclic algebra of operators acting on banach spaces $H^p(\beta)$

است که توسط بهمن یوسفی ارائه شده‌اند.

مقاله‌ی اول در سال ۲۰۰۰ در مجله‌ی

Rend. Circ. Mat. Palermo serie II XLIX

و مقاله‌ی دوم در سال ۲۰۰۴ در مجله‌ی

Czechos Lovak Mathematical

به چاپ رسیده اند.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم گردیده است که فصل اول شامل مباحثی از آنالیز مقدماتی (فضای برداری، فضای نرمدار، فضای باناخ، معرفی فضاهای هاردی، برگمن، دیریکله ،سری‌های فوریه و قضایایی مربوط به این مباحث)، مقدماتی از آنالیز حقیقی (تعریف $\sigma-$ جبر، فضای اندازه، اندازه، فضای L^p، سری‌های توانی، فضای دوگان، جبر وقضایایی مربوط به این مباحث) و بألاخره مقدماتی از آنالیز تابعی (عملگرهای خطی، تابعک ضربی،عملگر شیفت، عملگر الحاقی، طیف یک عملگر، قضیه‌ی توسیع هان – باناخ، فضای ایده‌آل ماکسیمال، توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره و قضایای مربوط به این مباحث) می‌باشد.

در فصل دوم به تعریف فضای $\ell^p(\beta)$ می‌پردازیم و نقطه‌ی محاسبه‌ای کراندار را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم یک نقطه در $\ell^p(\beta)$ تحت چه شرایطی نقطه‌ی محاسبه‌ای کراندار هست و همچنین شرط لازم و کافی را برای دوری بودن یک چند جمله‌ای در فضای $\ell^p(\beta)$ ارائه می‌دهیم و در بین این مطالب حکم‌های مرتبطی هم بیان و اثبات می‌گردد.

در فصـل سـوم $H^p(\beta)$ را معرفـی و $\ell_p^\infty(\beta)$ را بـه عنـوان زیـر جبـری از $\ell^p(\beta)$ تعریـف می‌کنیم. به ارتباط بین فضای $H^p(\beta)$ و فضاهای هاردی، برگمن و دیریکله اشاره مـی‌کنـیم. همچنین اکیداً دوری بودن $\ell_p^\infty(\beta)$، فضای ایده‌آل ماکسیمال، فضای دوگان را مشخص می‌کنیم به علاوه شرط لازمی برای این که یک عملگر ترکیبی روی $\ell^p(\beta)$ کراندار باشد هنگـامی کـه $\ell_p^\infty(\beta)$ اکیداً دوری است را ارائه می‌دهیم. در این فصل هم قضایایی مرتبط با این مباحـث در طول فصل بیان و اثبات می‌کنیم.

لازم است این مطلب را بیان کنیم، اساس کار مقاله‌های عنوان شده که این پایان‌نامـه بـر طبـق آن‌ها تنظیم گردیده مربوط به مطالبی می‌باشد که در [۱۶] آمده است در واقع بحث‌های جـامع و پایه‌ای در این راستا را باید در [۱۶] جستجو نمود.

****

فصل اول

قضایا و تعاریف مقدماتی

مباحثی از آنالیز مقدماتی

۱-۱ فضای برداری. مجموعه X به همراه دو عمل جمع و ضرب اسکالر که در اصول موضوعه زیر صدق کنند را یک فضای برداری روی میدان F می‌گوییم. اگر $f,g\in X$ آنگاه:

1. $(f+g)+h=f+(g+h) \quad ; h\in X$

2. $f+g=g+f \quad , \quad \forall f\in X \Rightarrow 0\in X \quad ; f+0=f$

3. $\forall f\in X \Rightarrow \exists(-f)\in X \quad ; \quad f+(-f)=0$

4. $\forall \alpha,\beta\in F \quad \Rightarrow \alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f \quad , \quad 1.f=f$

5. $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f \quad , \quad \alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$

مجموعه‌ی $A\subseteq X$ را یک زیرفضای برداری X گوییم هرگاه A با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی Xخود نیز فضایی برداری باشد.

۱-۲ فضای ضرب داخلی. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی(یا فضای یکه ای)نامیم اگر به هر جفت از بردارهای x,y در H یک عدد مختلط مانند (x,y)به نام حاصل ضرب داخلی x,y چنان مربوط شود که قواعد زیر برقرار باشند

1. $\overline{(x,y)}=(y,x)$

2. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \quad ;z\in H$

3. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y) \quad ; \alpha\in F$

4. $(x,x)\geq 0$

5. $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

۱-۳ فضای نرمدار. فضای برداری X یک فضای نرمدار است اگر به هر $x\in X$ عددی حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$، به نام نرم x، چنان مربوط باشد که:

1. $\forall x,y\in X \quad : \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

2. $\forall x\in X,\forall\alpha\in F \quad : \|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

$$3.\ \forall x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0 \quad , \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

از واژه‌ی نرم به معنی تابعی که x را به $\|x\|$ می‌نگارد نیز استفاده می‌شود.

۱-٤ تعریف. یک نیم نرم بر فضای برداری X تابعی حقیقی مانند p بر X است به طوری که به ازای هر x و y در X و هر α در میدان F:

$$1.\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$2.\ p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

۱-۵ تعریف. دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای نرمدار X یک دنباله‌ی کشی نامیده می‌شود اگر $\lim\limits_{m,n \to \infty} \|x_m - x_n\| = 0$.

۱-٦ تعریف. X را فضای کامل گوییم اگر هر دنباله‌ی کشی در X همگرا باشد، فضای نرمدار کامل را فضایی باناخ و فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گوییم.

۱-۷ تعریف. اگر Ω مجموعه‌ای باز باشد، فرض کنیم $f: \Omega \to \mathbb{C}$ تعریف شده باشد گوییم f یک تابع تحلیلی است در صورتی که به ازای هر $z \in \Omega$، $f'(z)$ موجود باشد و می‌گوییم $f \in H(\Omega)$ که $H(\Omega)$ فضای تمام توابع تحلیلی روی Ω می‌باشد.

سری‌های فوریه

به ازای هر $f \in L^1(T)$، T دایره واحد در صفحه مختلط است، ضرایب فوریه‌ی f را با فورمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه تمام اعداد صحیح است. بدین ترتیب به هر $f \in L^1(T)$ تابع $\hat{f}$ بر $\mathbb{Z}$ را مربوط می‌سازیم. سری فوریه‌ی f عبارتست از:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

با استفاده از تعریف ضرایب فوریه برای توابع f و g، خصوصیات زیر به راحتی قابل اثبات می باشند.

۱) $\hat{f}(n)+\hat{g}(n)=(f+g\hat{)}(n)$

۲) $\forall\alpha\in F\Rightarrow\alpha\hat{f}(n)=(\alpha f\hat{)}(n)$

۱–۸ فضاهای هاردی، برگمن و دیریکله. اگر تابع $f=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n\in H(U)$ را در نظر بگیریم که در آن U قرص واحد می‌باشد، فضاهای متشکل از این توابع به ترتیب با نرم‌های زیر را فضاهای هاردی، برگمن و دیریکله می‌نامیم.

در فضای هاردی (H^2):

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty$$

بنابراین:

$$H^2=\left\{f\in H(U):\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty\right\}$$

در فضای برگمن (A^2):

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\hat{f}(n)\right|^2}{n+1}<\infty$$

بنابراین:

$$A^2=\left\{f\in H(U):\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\hat{f}(n)\right|^2}{n+1}<\infty\right\}$$

در فضای دیریکله (D):

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}n\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty$$

یا در بعضی جاها:

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty.$$

بنابراین:

$$D=\left\{f\in H(U);\quad \sum_{n=0}^{\infty}n\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty\ \vee\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty\right\}$$

۱-۹ قضیه. فرض کنیم: (آ) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ به طور مطلق همگرا باشد ؛ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$ ؛ (پ) $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=B$ ؛ (ت) $(n=0,1,2,\ldots)$: $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=AB$، یعنی حاصلضرب دو سری همگرا یک سری همگراست و در واقع اگر دست کم یکی از دو سری به طور مطلق همگرا باشد کافیست.

اثبات. به [۱۰] مراجعه شود.□

۱-۱۰ تعریف. فضاهای باناخ Xو Y را ایزومرفیک ایزومتریک گوییم هر گاه یک تابع یک به یک و خطی مانند f از X به روی Y موجود باشد به طوری که: $(x\in X)$; $\|f(x)\|=\|x\|$ و این نگاشت را نگاشت ایزومرفیسم ایزومتری گوییم.

۱-۱۱ تذکر. در فصل‌های دو و سه از اصطلاحی تحت عنوان هم ارزی برای نماد $\cong$ بین دو فضا استفاده می‌کنیم که منظور از این اصطلاح وجود یک نگاشت ایزومتریک ایزومرفیسم برو بین دو فضا می باشد.

مقدماتی از آنالیز حقیقی

۱-۱۲ تعریف. فرض کنید X یک مجموعه باشد گردایه M از زیر مجموعه‌های X را $\sigma-$ جبر گویند هرگاه:

1. $X\in\mathsf{M}$
2. $if\ \ A\in\mathsf{M}\Rightarrow A^C\in\mathsf{M}$

$$3.\ if\ \ \forall n\ge 1\ :\ A_n \in \mathrm{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{M}$$

اگر M یک σ−جبر در مجموعه X باشد آنگاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گوییم.

۱-۱۳ تعریف. فرض کنید (X,M) یک فضای اندازه‌پذیر بوده و (Y,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه تابع $f:X\to Y$ را اندازه‌پذیر گوییم هر گاه برای هر مجموعه باز $v\in\tau$ داشته باشیم $f^{-1}(v)\in\mathrm{M}$.

۱-۱٤ تعریف. فرض کنید (X,M) یک فضای اندازه‌پذیر باشد تابع مجموعه‌ای $\mu:\mathrm{M}\to[0,+\infty]$ را یک اندازه‌ی مثبت بر σ−جبر M می‌نامند، هرگاه:

۱) به طور شمارا جمع‌پذیر باشد یعنی برای هر گردایه $\{A_i\}$ که اعضای آن جدا از هم هستند و $A_i\in\mathrm{M}$ داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

۲) مجموعه $A\in\mathrm{M}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\mu(A)<\infty$.

۱-۱۵ تعریف. به ازای هر $E\subset X$ که X مجموعه‌ی دلخواهی است، تعریف می‌کنیم $\mu(E)=\infty$، اگر E مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $\mu(E)$ را تعداد نقاط E می‌گیریم، اگر E متناهی باشد. این μ را اندازه‌ی شمارشی بر X گوییم.

۱-۱٦ تعریف. فضای اندازه‌ی (X,M,μ) را σ− متناهی می‌گویند هر گاه بتوان X را به صورت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}Ei$ نوشت به‌طوری‌که: $(i=1,2,\ldots)$ $\quad E_i\in\mathrm{M}\ ,\ \ \mu(E_i)<\infty$.

۱-۱۷ قضیه. هر گاه $f_n:X\to[0,\infty]$ به ازای $n=1,2,3,\ldots$ اندازه‌پذیر بوده و $(x\in X)\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ آنگاه: $\int_X fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu$.

اثبات. به [۱۱] مراجعه شود.□

۱–۱۸ مثال. فرض کنید $f: X \to [0,+\infty]$ و $x_0 \in X$ به طوری که $\{x_0\}$ در سیگما جبر روی X قرار گیرد. داریم:

$$\int_{\{x_0\}} f d\mu = \int_X \chi_{\{x_0\}} f d\mu = \int_X \chi_{\{x_0\}} f(x_0) d\mu = f(x_0) \int_{\{x_0\}} d\mu = f(x_0)\mu(\{x_0\})$$

اگر $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ که در آن $x_i \neq x_j \;;\; \forall i \neq j$ و $\{x_i\}$ها در سیگما جبر روی X باشند داریم:

$$\int_E f d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{x_n\}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\mu(\{x_n\}).$$

در حالت خاص $X = \mathbb{N}$، $x_n = n$ و μ اندازه‌ی شمارشی روی $\mathbb{N}$ باشد، اگر فرض کنیم $f(x_n) = a_n$ داریم:

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

نامساوی‌های هولدر و مینکوفسکی

فرض کنیم p و q مزدوج نمایی هم باشند ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) و $1 < p < \infty$. همچنین X یک فضای اندازه با اندازه‌ی μ و f, g توابعی اندازه‌پذیر از X به $[0,\infty]$ باشند. در این صورت:

1) $\int_X fg d\mu \leq (\int_X f^p d\mu)^{1/p} (\int_X g^q d\mu)^{1/q}$

2) $(\int_X (f+g)^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X f^p d\mu)^{1/p} + (\int_X g^p d\mu)^{1/p}$

نامساوی اول را نامساوی هولدر (*Holder*) و نامساوی دوم را نامساوی مینکوفسکی (*Minkowski*) می‌نامند برای اثبات این دو نامساوی به [۱۱] مراجعه شود.

فضاهای L^p

فرض می کنیم X یک فضای اندازه‌ی دلخواه با اندازه‌ی مثبت μ، $0 < P < \infty$ و f یک تابع

اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد در این صورت تعریف می‌کنیم $\|f\|_p=(\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ و آن را نرم L^p برای f می‌نامیم. مجموعه تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط $f: X\to \mathbb{C}$ با شرط $\|f\|_p<\infty$ را با نماد $L^p(\mu)$ نشان داده و آن را فضای L^p می‌نامیم.

سری‌های توانی

هر سری توانی نمایشی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ دارد و برای آن عددی مانند $R\in[0,+\infty]$ چنان نظیر است که سری به ازای هر $r<R$ در $\overline{D}(a;r)$ به طور مطلق و به طور یکنواخت همگراست و اگر $z\notin \overline{D}(a;R)$ واگرا است. R(شعاع همگرایی) از آزمون ریشه به دست می‌آید $\frac{1}{R}=\underset{n\to\infty}{Lim}\sup|c_n|^{1/n}$.

گوییم تابع f تعریف شده در Ω ، Ω ناحیه‌ای در صفحه مختلط می‌باشد، قابل نمایش به وسیله‌ی سری‌های توانی روی Ω است هرگاه به ازای هر قرص $D(a;r)\subset\Omega$ یک سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ موجود باشد به طوری که برای هر $z\in D(a;r)$ به $f(z)$ همگرا باشد.

۱-۱۹ قضیه. اگر f قابل نمایش به وسیله‌ی یک سری توانی در Ω باشد، آنگاه $f\in H(\Omega)$ یعنی f روی Ω تحلیلی است. همچنین f' نیز قابل نمایش به وسیله‌ی سری توانی در Ω می‌باشد. در واقع اگر به ازای هر $z\in D(a;r)$ داشته باشیم $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(Z-a)^n$، آنگاه به ازای این zها نیز داریم:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

اثبات. به [۱۱] مراجعه شود.

فضاهای برداری توپولوژیک

فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوری که:

۱) هرنقطه X یک مجموعه بسته باشد

۲) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

در این صورت گوییم τ یک توپولوژی برداری بر X است و Xرا فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم.

تبدیلات خطی

۱-۲۰ قضیه. اگر Xو Y فضاهایی باناخ و Λ یک تبدیل خطی کراندار و یک به یک از X به Y باشد آنگاه $\delta > 0$ای وجود دارد به طوری که ($x \in X$) $\|\Lambda x\| \geq \delta.\|x\|$.

به عبارت دیگر، Λ^{-1} یک تبدیل خطی کراندار از Y به X می‌باشد.

اثبات. به [۱۱] مراجعه شود.

۱-۲۱ قضیه. اگر Λ یک تبدیل خطی از فضای خطی نرمدار Xبه فضای خطی نرمدار Y باشد آنگاه هر یک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

۱) Λ کراندار است

۲) Λ پیوسته است

۳) Λ در یک نقطه از X پیوسته است.

اثبات. به [۱۱] مراجعه شود.

۱-۲۲ تعریف. اگر Xو Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند، $B(X,Y)$ را گردایه تمام تبدیلات خطی کراندار (یا عملگرها) از X به Y می‌نامیم. به خاطر سادگی $B(X,X)$ را با $B(X)$ نشان می‌دهیم. در $B(X,Y)$ اگر Y را میدان اسکالر بگیریم آنگاه $B(X,Y)$ دوگان

فضای X خواهد شد و با X^* نشان می‌دهیم. عناصر X^* را با x^* و عناصر X را با x نشان می‌دهیم و به جای $x^*(x)$ از نماد $<x,x^*>$ استفاده خواهیم کرد.

۱-۲۳ قضیه. فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند به هر $\Lambda \in B(X,Y)$ عدد $\|\Lambda\| = Sup\{\|\Lambda x\| \ : x \in X \ , \ \|x\| \le 1\}$ را متناظر می‌کنیم.این تعریف فضای $B(X,Y)$ را به یک فضای نرمدار بدل می‌کند. اگر Y یک فضای باناخ باشد، $B(X,Y)$ هم باناخ است.

اثبات. به [۹] مراجعه شود.

۱-۲٤ تعریف. فضای باناخ X را بازتابی گوییم هر گاه φ یک یکریختی یکمتر از X به X^{**} باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $\varphi x \in X^{**}$ منحصر به فردی باشد که $<x,x^*>=<x^*,\varphi x>$. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۹] مراجعه شود.

۱-۲۵ گزاره. هرگاه $1<p<\infty$، برای هر $\varphi \in (L^p)^*$ عضوی چون g از L^q وجود دارد به طوری که برای هر $f \in L^p$، $\varphi(f) = \int fg$ و در نتیجه L^q به طور ایزومتریک با $(L^p)^*$ ایزومرف است همین حکم برای $p=1$ مشروط بر این که μ یک اندازه‌ی $\sigma-$ متناهی باشد برقرار است به علاوه اگر $1 \le p < \infty$ و μ، $\sigma-$ متناهی باشد، L^p بازتابی است.(p و q مزدوج نمایی یکدیگر)

اثبات. به [۱۱] مراجعه شود.

۱-۲٦ قضیه. اگر E_1 و E دو فضای باناخ باشند که E با E_1 هم ارز باشد ($E \cong E_1$) آنگاه E_1^* و E^* هم همارز خواهند بود ($E_1^* \cong E^*$).

اثبات. به [۱] مراجعه شود.

جبر

فضای برداری A روی میدان F(حقیقی یا مختلط) را یک جبر (حقیقی یا مختلط) گوییم هر گاه یک عمل ضرب $(x,y)\to xy$ از $A\times A$ به توی A وجود داشته باشد که در اصول موضوعه‌ی زیر صدق کند. (به ازای هر $x,y,z\in A$ و $\alpha\in F$):

1. $x(yz)=(xy)z$

2. $x(y+z)=xy+xz \quad , \quad (x+y)z=xz+yz$

3. $(\alpha x)y=\alpha(xy)=x(\alpha y)$

اگر بتوان نرمی بر A تعریف کرد که در شرط $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$ صدق کند در آن صورت A را جبر نرمدار گویند.اگر جبر نرمدار A تحت توپولوژی حاصل از متر $d(x,y)=\|x-y\|$ یک فضای توپولوژیک کامل باشد، جبر باناخ نامیده می‌شود به طور خلاصه یک جبر باناخ عبارت است از یک فضای باناخ به انضمام یک عمل ضرب حلقه که در رابطه‌ی $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$ صدق کند.

اگر در جبر A به ازای هر $x,y\in A$، $xy=yx$ آنگاه A را جبر تعویض‌پذیر گوییم.

اگر A دارای عضو یکه باشد آن را با e نشان می‌دهیم و معمولاً فرض می‌شود $\|e\|=1$ البته همواره خواهیم داشت $\|e\|\ge 1$.

۱-۲۷ مثال. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده و $C(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی بر X با اعمال جبری معمولی و نرم $\|f\|=Sup\{|f(x)|\,;\,x\in X\}$ باشد در این صورت $C(X)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر یکه‌دار است.

فرض کنید X یک فضای باناخ و $L(X)$ جبر تمام عملگرهای خطی کراندار از X به X با اعمال جبری معمولی و نرم $\|T\|=Sup\{\|Tx\|\ ;\ x\in X\ ;\ \|x\|\le 1\}$ باشد. در این صورت $L(X)$ یک جبر باناخ غیرتعویض‌پذیر است.