بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

پایداری معادلات تابعی در فضاهای ناارشمیدسی

صادق شکاریان

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

تابستان ۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر علی عبادیان

پایان نامه آقای: **صادق شکاریان** به تاریخ **۸۹/۵/۱۱** شماره **۴-۱۰۶۴-۲**

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/۲ هجده و ۲ (به حروف هجده و ۲) قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر علی عبادیان

۲- داور خارجی: دکتر سعید استادباشی

۳- داور داخلی: دکتر سعید شمس

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

قدردانی و تشکر

خدا را شکر می‌گویم از این که فرصتی دوباره برای آموختن دانستنیهای نو و تمرین تفکر ریاضی‌وار به من اعطا کرد. از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر عبادیان که تکمیل این پایان‌نامه بدون کمکهای ایشان ممکن نبود کمال تشکر را دارم. از داوران محترم آقایان دکتر شمس و دکتر استادباشی که افتخار شاگردی‌شان را نیز دارم، به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان بسیار سپاسگذارم. از تک تک اعضای خانواده‌ام که محبتشان مشوق من در انجام این کار بوده سپاسگذارم. از تمامی هم‌کلاسیها و دوستان عزیزم که در این مدت یار و همراه من بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان از ته دلم تشکر فراوانی از همسر مهربانم دارم و این پایان‌نامه را با تمام عشقی که نسبت به آن دارم به همسر عزیزم تقدیم می‌نماییم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه تعمیم پایداری **هایزر–اولام** [1] از معادلات تابعی کشی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

ومعادلات تابعی درجه دوم

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

در فضاهای ناارشمیدسی را بررسی می‌کنیم.

[1] Hyers-Ulam

پیشگفتار

مباحث پایداری از معادلات تابعی درجه دوم، معادلات تابعی کشی و معادلات تابعی از نوع پکسیدر روی فضاهای باناخ و مدول باناخ و همچنین وجود نگاشت‌های خطی منحصربه‌فرد و جمع‌پذیر منحصربه‌فرد و همچنین پایداری از معادلات تابعی درجه دوم و معادلات تابعی کشی در فضاهای ناارشمیدسی توسط هایرز[۲]، راسیاس[۳]، پارک[۴]، مصلحیان[۵] و چخوف[۶] در مراجع [۶]، [۹]، [۱۴]، [۱۶] و [۱۷] بیان شده است. این پایان‌نامه برگرفته از:

"Mohammad Sal Moslehian, The mistocles M. Rassias, *Stability of functional equation in non-Archimedean spaces*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 1 (2007), 325-334."

برای مطالعه مفاهیم و مطالب بنیادی در مورد فضاهای ناارشمیدس مراجع [۵]، [۱۳]، [۲۱] و [۲۲] را ملاحظه کنید.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است:

در فصل اول تعاریف و قضایایی پیش‌نیاز با استفاده از مراجع [۱]، [۲] و [۳] آورده شده است.

فصل دوم شامل سه بخش زیر است:

---

[۲] Hyers
[۳] Rassias
[۴] Park
[۵] Moslehian
[۶] Chekhof

بخش اول: پس از بیان تعاریف، نگاشت‌های δ−خطی و تقریباً‌خطی به بررسی قضیه‌ی مهمی که آقای راسیاس در مورد وجود و یکتایی نگاشت‌های خطی و جمع‌پذیر بیان نموده است، می‌پردازیم و برای حالات $p > ۱$ و $p < ۱$، قضیه را ثابت نموده و در حالت $p = ۱$ مثال نقضی ارائه می‌دهیم. برای این منظور از مراجع [۴]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۲]، [۱۷] و [۲۰] استفاده شده است.

بخش دوم: در این بخش با توجه به تعریف تابع درجه‌ی دوم، وجود یک تابع درجه‌ی دوم منحصربه‌فرد از گروه آبلی G به فضای باناخ X را ثابت نموده، سپس با فرضیات داده شده و تعریف مدول باناخ پایداری از معادلات تابعی را روی فضاهای باناخ و مدول باناخ بررسی می‌کنیم. برای این منظور از مراجع [۷]، [۱۱]، [۱۶]، [۱۸] و [۱۹] استفاده شده است.

بخش سوم: در این بخش پس از بیان تعاریف فضاهای متعامد، نگاشت‌های جمعی متعامد و نگاشت‌های درجه دوم متعامد به بحث و بررسی پایداری متعامد از معادلات تابعی روی مدول‌های باناخ می‌پردازیم. برای این منظور از مراجع [۱۴] و [۱۵] استفاده می‌شود.

فصل سوم شامل دو بخش زیر است:

در بخش نخست، به معرفی فضاهای ناارشمیدسی پرداخته و مفاهیم و تعاریف اساسی در این فضاها بیان خواهد شد برای این منظور از مراجع [۱۳]، [۲۱] و [۲۲] استفاده شده است.

بخش دوم، شامل مقدمه‌ای بر دستگاه اعداد p−ادیکی است. مجموعه‌ی اعداد p−ادیکی به عنوان مثالی از یک فضای ناارشمیدسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و با برخی مفاهیم، نظریه‌ها و قضایای اساسی در این مورد آشنا خواهیم شد. برای این منظور از مراجع [۵] و [۶] استفاده شده است.

فصل چهارم شامل دو بخش زیر است:

در بخش نخست، پایداری معادلات تابعی کشی را در فضاهای ناارشمیدسی کامل بررسی می‌کنیم.

در بخش دوم، پایداری معادلات تابعی درجه دوم را در فضاهای ناارشمیدسی کامل بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و پیش‌نیازها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابجایی با عنصر همانی 1_R باشد. V را یک مدول[1] بر روی R می‌نامیم هرگاه

الف) عملی به نام جمع مانند $(a,b) \to a+b$ روی V موجود باشد که تحت آن V گروهی جابجایی باشد؛

ب) عملی به نام ضرب مانند $(r,a) \to r.a$ از عناصر a در V و r در R موجود باشد به طوری که برای هر $a_1, a_2, a_3 \in V$ و $r_1, r_2, r_3 \in R$ داشته باشیم:

$$(r_1 + r_2).a = r_1 a + r_2 a$$

$$r_1(a_1 + a_2) = r_1 a_1 + r_1 a_2$$

$$(r_1.r_2).a = r_1.(r_2.a)$$

$$1_R.a = a$$

یک مدول روی میدان F را یک فضای برداری[2] می‌نامیم.

---

[1] module
[2] vector space

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم S مجموعه‌ای از بردارهای فضای برداری X باشد. زیرفضای پدید آمده توسط S، بنابه تعریف، عبارت است از اشتراکی از همه‌ی زیرفضاهای X که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه‌ای متناهی از بردارها باشد، یعنی $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ این اشتراک را زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای α_1، ... و α_n نیز می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. یک پایه[۳] برای X مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای X است که فضای X را پدید می‌آورد. فضای X با بعد متناهی است هرگاه یک پایه متناهی داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری بر روی میدان F باشند. یک تبدیل خطی[۴] T از X در Y تابعی از X در Y است به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in F$ داریم:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

یک عملگرخطی[۵] روی X عبارت است از تبدیل خطی از X در Y.

یک تبدیل خطی f از X در میدان اسکالرهای F، یک تابعک خطی[۶] روی X نامیده می‌شود. دسته‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی روی X با اعمال جمع و ضرب معمولی، فضایی برداری تشکیل می‌دهند. این فضا را با X^* نشان داده و آن را فضای دوگان جبری[۷] می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار بر روی میدان F باشد نگاشت خطی $T : X \longrightarrow F$ را کران‌دار[۸] می‌نامیم هرگاه $M > 0$ موجود باشد که:

$$\| T(x) \| \leq M \| x \| \qquad (x \in X)$$

[۳] basis
[۴] linear transformation
[۵] linear operator
[۶] linear functional
[۷] Algebraic dual space
[۸] bounded

دسته‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی کران‌دار روی X را فضای دوگان توپولوژی[۹] X می‌نامیم و آن را با X^* نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی[۱۰] در X گوییم اگر τ دارای خواص زیر باشد:

الف) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$؛

ب) اگر $A_1, \cdots, A_n \in \tau$ آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$؛

ج) به ازای هر $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \tau$، $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$.

در این صورت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک[۱۱] و اعضای τ را مجموعه‌های باز[۱۲] در X گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ گردایه‌ی M از زیرمجموعه‌های، مجموعه‌ی X را یک σ−جبر[۱۳] در X نامیم اگر M دارای خواص زیر باشد:

الف) $X \in M$؛

ب) اگر $A \in M$، آن‌گاه $A^c \in M$ (A^c متمم A در M است)؛

ج) اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, \ldots$، $A_n \in M$ باشد، آن‌گاه $A \in M$.

در این صورت (X, M) را یک فضای اندازه‌پذیر[۱۴] و اعضای M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر[۱۵] در X می‌نامیم.

---

[۹] Topological dual space

[۱۰] topology

[۱۱] topological space

[۱۲] open sets

[۱۳] σ-Algebra

[۱۴] measurable space

[۱۵] measurable sets

تعریف ۸.۱.۱ اگر X یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیک باشند، نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را اندازه‌پذیر[16] نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

تعریف ۹.۱.۱ کوچکترین σ−جبری که شامل مجموعه‌های باز است را σ−جبر بورل[17] می‌نامیم و اعضای آن را مجموعه‌های بورل[18] می‌نامیم.

نکته ۱۰.۱.۱ نگاشت‌های اندازه‌پذیر بورل[19] را نگاشت‌های بورل یا توابع بورل[20] می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ یک متریک[21] روی مجموعه‌ی ناتهی X تابعی مانند $d : X \times X \longrightarrow R$ است که دارای خواص زیر باشد.

الف) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$

ب) $d(x,y) = 0$ اگروتنهااگر $x = y$

ج) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$

د) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

در این صورت جفت (X,d) را فضای متریک[22] گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای متریک (X,d) را تام[23] می‌نامیم هرگاه هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.

---

[16] measurable function
[17] Borel σ-Algebra
[18] Borel sets
[19] Borel measurable
[20] Borel functions
[21] metric
[22] metric space
[23] complete

تعریف ۱۳.۱.۱ فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی[۲۴] می‌نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای $x,y \in H$ یک عدد مختلط مانند (x,y) به نام حاصلضرب داخلی x و y چنان مربوط شده باشد که:

الف) $(y,x) = \overline{(x,y)}$

ب) اگر $x,y,z \in H$ آن‌گاه $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

ج) اگر $x,y \in H$ و α اسکالر باشد آن‌گاه $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$

د) به ازای هر $x \in H$، $(x,x) \geq 0$

ه) $(x,x) = 0$ اگروفقط‌اگر $x = 0$

واضح است که H یک فضای متری نیز می‌باشد حال اگر این فضای متری تام باشد آن‌گاه H یک فضای هیلبرت[۲۵] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱ فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار[۲۶] گوییم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ چنان مربوط شده باشد که:

الف) به ازای هر $x,y \in X$، $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$؛

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد آن‌گاه $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$؛

ج) $\| x \| = 0$ تساوی $x \doteq 0$ را ایجاب نماید.

تعریف ۱۵.۱.۱ فضای خطی نرمدار $(X, \| \|)$ را یک فضای باناخ[۲۷] نامیم هرگاه با متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد.

نکته ۱۶.۱.۱ هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

[۲۴] inner product space
[۲۵] Hilbert space
[۲۶] normed linear space
[۲۷] Banach space

تعریف ۱۷.۱.۱ تبدیل خطی Λ از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y را یک تبدیل خطی کراندار[۲۸] نامیم هرگاه:

$$|\Lambda| = \sup\{\| \Lambda x \| : \| x \| \leq 1 \,,\, x \in X\} < \infty$$

قضیه ۱۸.۱.۱ (باناخ–اشتاین‌هاوس[۲۹]) فرض کنیم X یک فضای باناخ، Y یک فضای نرمدار و $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از تبدیلات خطی کراندار از X به توی Y باشد.
که در آن α در مجموعه اندیس‌گذاری چون A تغییر می‌کند در این صورت مجموعه $\{x \,:\, \sup \| T_\alpha(x) \| = \infty\}$ یک مجموعه‌ی G_δ چگالی در X است و یاعددی مانند $m > 0$ هست به طوری که به ازای هر $\alpha \in A$ داریم:

$$\| T_\alpha \| < m$$

برهان : به قضیه‌ی ۸ در فصل ۵ در مرجع [۲] مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۱.۱ فضای برداری A روی میدان $\mathbb{C}$ را یک جبر مختلط[۳۰] نامیم هرگاه A در $\mathbb{C}$ یک ضرب شرکت‌پذیر و پخش‌پذیر تعریف کند، یعنی به ازای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم:

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x(yz) = (xy)z$$

همچنین به ازای α ی اسکالر، $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$

اگر یک نرم در A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرمدار بدل کرده و در نامساوی ضربی $\| xy \| \leq \| x \| \| y \| \quad (x, y \in A)$ صدق کند، آن گاه A یک جبر مختلط نرمدار[۳۱] می‌باشد اگر علاوه

[۲۸] bounded linear transformation
[۲۹] Banach-Steinnhaus theorem
[۳۰] complex Algebra
[۳۱] normed complex Algebra

بر این، A یک فضای متری تام نسبت به این نرم باشد یعنی A یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه A را یک جبر باناخ[۳۲] می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای باناخ بوده و به هر $t \in [0,\infty)$ یک عملگر مانند $Q(t) \in B(X)$ چنان مربوط شده باشد که:

الف) $Q(0) = I$

ب) به ازای هر $s \geq 0$ و $t \geq 0$، $Q(s+t) = Q(s)Q(t)$

ج) به ازای هر $x \in X$، $\lim\limits_{t\to 0} \| Q(t)x - x \| = 0$

اگر (الف) و (ب) برقرار باشند، $\{Q(t)\}$ را یک نیمگروه[۳۳] می‌نامیم. این نیمگروه‌ها دارای نمایش‌های نمایی‌اند مشروط بر اینکه نگاشت $t \to Q(t)$ در یک فرض پیوستگی صدق نماید.

---

[۳۲] Banach Algebra

[۳۳] semi group

فصل ۲

پایداری

۱.۲ پایداری تبدیلات خطی در فضاهای باناخ

تعریف ۱.۱.۲ یک تساوی تابعی مفروض را پایدار[۱] گوییم هرگاه برای تابعی که تقریباً در یک تساوی تابعی مفروض صدق می‌کند، تابع دیگری به اندازه دلخواه نزدیک به تابع اول، که در تساوی تابعی مفروض صدق می‌کند وجود داشته باشد.

تعریف ۲.۱.۲ معادله‌ی تابعی به صورت $f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)+۲f(y)$ را معادله‌ی تابعی درجه‌ی دوم[۲] می‌نامیم و هر ریشه از معادله‌ی فوق یک تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲ معادله‌ی تابعی به صورت $f(x+y)=f(x)+f(y)$ را معادله‌ی تابعی کشی[۳] گوییم.

(در این بخش فرض می‌کنیم E و E' فضاهای باناخ باشند مگر آنکه فضای دیگری قید شود.)

---

[۱] stabel
[۲] quadratic functional equation
[۳] Cauchy functional equation

تعریف ۴.۱.۲ تبدیل $f : E \longrightarrow E'$ را تقریباً خطی[۴] نامیم هرگاه $k \geq \circ$ و $p \in [\circ, ۱)$ موجود باشند که:

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq k(\| x \|^p + \| y \|^p) \quad (x, y \in E)$$

تعریف ۵.۱.۲ با فرضیات تعریف قبل، فرض کنیم $f(x)$ و $\varphi(x)$ دو تبدیل از E به E' باشند گوییم $f(x)$ و $\varphi(x)$ مجاورند[۵] هرگاه $k \geq \circ$ و $p \in [\circ, ۱)$ موجود باشند که:

$$\| f(x) - \varphi(x) \| \leq k \| x \|^p \quad (x \in E)$$

قضیه ۶.۱.۲ اگر $f(x)$ یک تبدیل تقریباً خطی از E به E' باشد آنگاه تبدیل خطی یکتای $\varphi(x)$ وجود دارد که مجاور $f(x)$ است.

برهان : با توجه به فرض قضیه اگر $y = x$ فرض شود آن‌گاه $k_\circ \geq \circ$ و $p \in [\circ, ۱)$ موجودند که:

$$\| \frac{f(۲x)}{۲} - f(x) \| \leq k_\circ \| x \|^p \qquad (۱)$$

ابتدا برای هر عدد صحیح n ثابت می‌کنیم:

$$\| \frac{f(۲^n x)}{۲^n} - f(x) \| \leq k_\circ \| x \|^p \sum_{i=\circ}^{n-۱} ۲^{i(p-۱)} \quad (x \in E) \qquad (۲)$$

اثبات به استقرا می‌باشد. با فرض $n = ۱$ حکم با توجه به (۱) برقرار است. فرض کنیم حکم برای n برقرار باشد ثابت می‌کنیم برای $n + ۱$ نیز برقرار است. با تعویض x با $۲x$ در (۲) داریم:

$$\| \frac{f(۲^{n+۱} x)}{۲^n} - f(۲x) \| \leq k_\circ \| x \|^p \sum_{i=\circ}^{n-۱} ۲^{i(p-۱)} \quad (x \in E)$$

---

[۴] approximately linear
[۵] near

به کمک (۱)، برای هر $x \in E$ داریم:

$$\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - f(x) \right\| \leq \left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2x)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(2x)}{2} - f(x) \right\| \leq k_0 \| x \|^p \sum_{i=0}^{n} 2^{i(p-1)}$$

به این ترتیب در حالت $n+1$ نیز نامعادله‌ی (۲) برقرار است، بنابراین برای هر n برقرار است. حال می‌دانیم برای هر $p \in [0, 1)$، سری $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(p-1)}$ به $\frac{2}{2-2^p}$ همگراست لذا با توجه به (۲) داریم:

$$\left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\| \leq k \| x \|^p \quad , \quad k = \frac{2k_0}{2 - 2^p} \quad (x \in E) \tag{۳}$$

و چون E' کامل است پس هر دنباله در آن همگراست. قرار می‌دهیم:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \quad (x \in E)$$

پس $\varphi(x)$ خطی است، زیرا با توجه به فرض چون $f(x)$ تبدیل تقریباً خطی است لذا برای هر $x, y \in E$ داریم:

$$\| f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y) \| \leq k_0(\| 2^n x \|^p + \| 2^n y \|^p) = 2^{np} k_0(\| x \|^p + \| y \|^p)$$

با تقسیم طرفین بر 2^n و بامیل دادن $n \to \infty$ داریم:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

بنابراین φ خطی است. باحدگیری از طرفین (۳) و میل دادن $n \to \infty$ داریم:

$$\| \varphi(x) - f(x) \| \leq k \| x \|^p \quad (x \in E) \tag{۴}$$

لذا $\varphi(x)$ مجاور $f(x)$ است. حال باید ثابت کنیم $\varphi(x)$ یکتاست. فرض کنیم $\psi(x)$ تبدیل خطی دیگری باشد که مجاور $f(x)$ است بنابراین $k' \geq 0$ و $p' \in [0, 1)$ وجود دارند که:

$$\| \psi(x) - f(x) \| \leq k' \| x \|^{p'} \quad (x \in E)$$

به کمک (۴) داریم:

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \| \leq k \| x \|^p + k' \| x \|^{p'} \quad (x \in E)$$

چون φ و ψ خطی می‌باشند لذا داریم:

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \| = \frac{\| \varphi(nx) - \psi(nx) \|}{n} \leq \frac{(k \| nx \|^p + k' \| nx \|^{p'})}{n}$$

$$= \frac{k \| x \|^p}{n^{1-p}} + \frac{k' \| nx \|^{p'}}{n^{1-p'}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

بنابراین برای هر $x \in E$ داریم: $\varphi(x) = \psi(x)$. □

تعریف ۷.۱.۲ تبدیل $f : E \to E'$ را یک تبدیل δ−خطی[۶] نامیم هرگاه:

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| < \delta \quad (x, y \in E)$$

قضیه ۸.۱.۲ فرض کنیم $f : E \to E'$ یک تبدیل δ−خطی باشد. دراین صورت حد $L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ برای هر $x \in E$ موجود و $L(x)$ تبدیل خطی است. همچنین برای هر $x \in E$ نامعادله‌ی $\| f(x) - L(x) \| \leq \delta$ برقرار است. به علاوه $L(x)$ تنها تبدیل خطی است که در نامعادله‌ی فوق صدق می‌کند.

برهان : برای هر $x \in E$ نامعادله‌ی $\| f(2x) - 2f(x) \| < \delta$ با توجه به تعریف تبدیل δ−خطی واضح است با جایگزینی x با $\frac{x}{2}$ در این نامعادله و تقسیم طرفین بر ۲ می‌بینیم که:

$$\| (\frac{1}{2}) f(x) - f(\frac{x}{2}) \| < \frac{\delta}{2} \quad (x \in E)$$

حال فرض استقرایی زیر را می‌توانیم بدست آوریم:

$$\| 2^{-n} f(x) - f(2^{-n} x) \| < \delta(1 - 2^{-n}) \quad \forall x \in E \qquad (1)$$

[۶] δ-linear