بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

آمار(گرایش آمار ریاضی)

عنوان

موجک‌ها و آنالیز فوریه

تدوین

عطیه کبیری کناری

استاد راهنما

دکتر عین‌اله پاشا

شهریور ۱۳۸۹

چکیده:

هدف، در این پایان نامه پردازش و تحلیل سیگنال‌ها با استفاده از آنالیز فوریه و موجک‌ها و همچنین یافتن ارتباط بین موجک‌ها و علم آمار است. در ابتدا تبدیل فوریه و ویژگی‌های آن بیان گردیده، سپس موجک‌ها و تبدیلات آن‌ها معرفی و ایده‌های اصلی نهفته در آن‌ها توسط موجک‌های هار توصیف شده‌اند. در این پایان نامه الگوریتم تجزیه و بازسازی هار جهت پردازش سیگنال‌ها توضیح داده می‌شود و در انتها کاربرد موجک‌ها در علم آمار مطرح می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: اتساع، انتقال، تبدیل فوریه، تجزیه ، صافی، موجک، نمونه‌گیری بالا، نمونه‌گیری پایین.

رده‌بندی موضوعی ۲۰۱۰: موجک، فیلتر؛ ٦٠G٣٥، ٤٠ ٤٢C.

مقدمه

از حدود قرن نوزدهم، مقالات و کتاب‌های زیادی درباره‌ی سری فوریه و تبدیل فوریه نوشته شده است. برعکس، توسعه و بحث موجک‌ها بیشتر در سال‌های اخیر بوده است و موضوع موجک‌ها به یک ابزار عمومی در پردازش سیگنال‌ها و سایر زمینه‌های کاربردی مبدل شده است. هدف در این پایان نامه، ارائه‌ی ایده‌های اساسی مربوط به آنالیز فوریه و موجک‌ها می‌باشد.

هدف اصلی سری فوریه این است که یک سیگنال را به عنوان متغیری از زمان به مولفه‌های فرکانسی‌اش تجزیه کند. مسئله‌ی مشترک در پردازش سیگنال‌ها، حذف اغتشاش‌های ناخواسته است. یک راه صافی کردن اغتشاش ناخواسته تجزیه‌ی سیگنال داده شده به مولفه‌های سینوسی و کسینوسی و سپس حذف ضرایب متناظر با فرکانس‌های ناخواسته است. مسئله‌ی دیگر مرتبط با تحلیل سیگنال، فشرده سازی اطلاعات است. یک روش موثر، توصیف سیگنال بر حسب سری فوریه‌ی $f(t) = \sum_n a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ و حذف آن ضرایبی است که از یک حد تحملی کوچک‌تر هستند.

به طور کلی، یک موجک شبیه یک موج است که در یک دوره‌ی تناوب حرکت می‌کند و تنها روی یک بازه‌ی متناهی ناصفر است. در حوزه‌ی زمان می‌توان یک موجک را به جلو یا عقب انتقال داد، فشرده یا منبسط کرد، همچنین می‌توان با یک اتساع موجک‌های با فرکانس پایین یا بالا به دست آورد. می‌توان از موجک‌ها برای صافی کردن یا فشرده سازی سیگنال‌ها استفاده کرد.ابتدا سیگنال به صورت مجموعی از انتقال‌ها و اتساع‌های موجک بیان می‌شود، سپس ضرایب متناظر با جملات ناخواسته حذف یا تعدیل می‌شوند.

در فصل ۱ تبدیل فوریه و ویژگی‌های آن ارائه شده است، گذشته از این که تبدیل فوریه خود به خود مفید است، بسیاری از موضوعات در فصول بعد در بررسی موجک‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در فصل ۲ تبدیل موجک پیوسته و گسسته معرفی شده است، ابتدا تعریف موجک و مثال‌هایی از آن‌ها آورده شده، سپس CWT (تبدیل موجک پیوسته) و ویژگی‌های آن بیان گردیده و در انتهای فصل DWT (تبدیل موجک گسسته) توضیح داده شده است.

در فصل ۳ با استفاده از موجک هار که ساده‌ترین نوع موجک‌هاست، ویژگی‌های موجک‌ها، مانند تعامد که از جمله مهمترین ویژگی‌های آن‌هاست، بیان شده و کاربرد آن‌ها در تحلیل سیگنال‌ها مورد بحث قرار گرفته است. در فصل ٤ نمونه‌ای از کاربرد موجک‌ها در آمار آورده شده است، این کار توسط جمع‌آوری چندین نمونه دست‌خط و آزمون این که آیا دست‌خط‌ها متعلق به یک نفر هستند یا خیر؟، انجام شده است.

این پایان نامه در ٤ فصل و بر اساس مقاله‌ی زیر تدوین شده است:

Lytle, B. & Yang, C. Detecting Forged Handwriting with Wavelets and Statistics (E. Aboufadel, faculty mentor), Rose Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Issue 1, 2006.

فهرست مطالب

فصل اول: تبدیل فوریه ۱

۱–۱ تبدیل فوریه..۱

۱–۲ ویژگی‌های تبدیل فوریه...۸

۱–۳ تبدیل فوریه‌ی پیچش..۱۵

۱–٤ الحاقی تبدیل فوریه..۱٦

۱–٥ فرمول پلانشرل..۱۸

۱–٦ صافی‌های خطی..۱۹

۱–۷ قضیه‌ی نمونه‌گیری..۲٤

فصل دوم: تبدیل موجک ۳۲

۲–۱ موجک‌های زمان – پیوسته..۳۲

۲–۲ تعریف CWT..۳٤

۲–۳ CWT به عنوان یک عملگر..۳۹

۲–٤ CWT معکوس..٤۲

۲–٥ مقدمه‌ای برتبدیل موجک گسسته..٤٤

فصل سوم: موجک هار ٥۰

۳–۱ ویژگی‌های اساسی تابع مقیاس‌کننده‌ی هار..٥۰

۳–۲ موجک هار.. ۵۵

۳–۳ الگوریتم تجزیه‌ی هار.. ۶۰

۳–٤ الگوریتم بازسازی هار... ٦٤

۳–۵ صافی‌ها و نمودارها... ٦٨

فصل چهارم: موجک‌ها و آمار ۷۳

٤–۱ تشخیص دست خط جعلی توسط موجک‌ها و علم آمار...................... ۷۳

٤–۲ آنالیز دست خط... ۷٤

٤–۳ صافی‌های موجک... ۷٤

٤–٤ پیشگوهای خطی.. ۷۷

٤–۵ الگوریتم به کار رفته در نمونه‌های دست خط.................................... ۷۹

مراجع ۸۲

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۸۳

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۸۷

چکیده ۹۱

فصل ۱

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه را می‌توان شکل پیوسته‌ای از سری فوریه درنظر گرفت. سری فوریه یک سیگنال را روی بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ به مولفه‌هایی که با بسامد صحیح نوسان می‌کنند، تجزیه می‌کند. در مقابل، تبدیل فوریه، سیگنال تعریف شده روی یک بازه‌ی زمانی نامتناهی را به مولفه‌ای با بسامد λ، که λ می‌تواند هر عدد حقیقی یا حتی مختلط باشد، تجزیه می‌کند. موضوعات این فصل در مباحث مربوط به موجک‌ها در فصل‌های بعد به کار خواهند رفت.

۱-۱ تبدیل فوریه

برای به دست آوردن تبدیل فوریه‌ی تابع f، سری فوریه‌ی تابع تعریف شده روی بازه‌ی $-l \le x \le l$ را درنظر گرفته، سپس l را به بی‌نهایت میل می‌دهیم. طبق قضیه‌ای در سری فوریه تابع تعریف شده روی $-l \le x \le l$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, e^{in\pi x/l} \ ,$$

که در آن

$$\alpha_n = \frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{-in\pi t/l} dt.$$

با فرض این که l به بی‌نهایت میل کند و باجایگذاری مقدار α_n در مجموع قبلی بدست می‌آوریم:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-in\pi t/l}\,dt\right)e^{in\pi x/l}\right]$$
$$= \lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{in\pi(x-t)/l}\,dt\right].$$

هدف، به دست آوردن مجموع سمت راست به عنوان فرمول مجموع ریمان یک انتگرال می‌باشد.

با فرض $\lambda_n = n\pi/l$ و $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \pi/l$ رابطه‌ی زیربه دست می‌آید.

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{۱}{۲\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\lambda_n(x-t)}\,dt\right]\Delta\lambda\,. \qquad (۱-۱)$$

فرض کنید:

$$F_l(\lambda_n) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\lambda_n(x-t)}\,dt$$

بنابراین مجموع (۱-۱) برابر است با:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l\,(\lambda_n)\Delta\lambda\,.$$

این عبارت مانند تعریف مجموع ریمان انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}F_l(\lambda)d\lambda$ می‌باشد. وقتی l به بی‌نهایت میل کند، مقدار $\Delta\lambda$ به صفر همگراست. بنابراین رابطه‌ی (۱-۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda$$

وقتی $l \to \infty$، $F_l(\lambda)$ به انتگرال $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt$ تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\lambda(x-t)}dtd\lambda$$

به عبارت دیگر

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda x}dx \qquad (۱-۲)$$

با درنظر گرفتن

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\,(t)e^{-i\lambda t}dt$$

معادله‌ی (۱-۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda\,. \qquad (۱-۳)$$

۱-۱-۱ تذکر: تابع $\hat{f}(\lambda)$، تبدیل فوریه‌ی f نامیده می‌شود و رابطه‌ی (۱-۳) اغلب به عنوان فرمول معکوس فوریه شناخته می‌شود.

۱-۱-۲ قضیه: اگر f، تابع پیوسته‌ی مشتق پذیر با $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$ باشد،آن‌گاه:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda$$

که $\hat{f}(\lambda)$ (تبدیل فوریه‌ی f) به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\,(t)e^{-i\lambda t}dt$$

برهان: برهان در مرجع [7] آمده است.

اگر تابع $f(x)$ نقاط ناپیوستگی داشته باشد، مانند یک تابع پله‌ای، آن‌گاه فرمول (۱-۳) با جایگذاری $f(x)$ با میانگین حدود چپ و راست برقرار است. برقراری فرض $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$ برای اطمینان از همگرایی انتگرال $\hat{f}$ لازم است؛ یعنی

$$\left|\hat{f}(\lambda)\right| \leq \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-i\lambda t}\right|dt$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt < \infty \qquad \text{زیرا}\ \left|e^{-i\lambda t}\right| = ۱$$

۱-۱-۳ مثال: موج مستطیلی زیر را درنظر بگیرید:

$$f(t) = \begin{cases} ۱ & -\pi \leq t \leq \pi \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

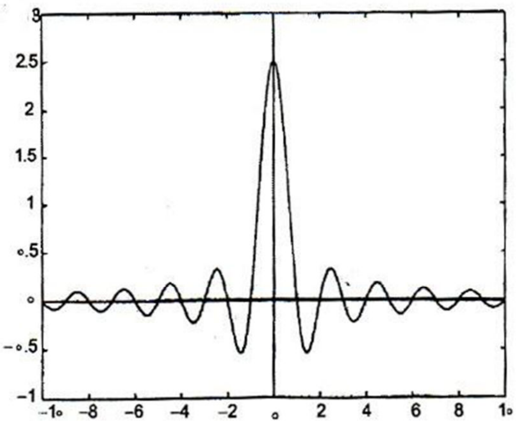
داریم: $f(t)e^{-i\lambda t} = f(t)(\cos\lambda t - i\sin\lambda t)$. چون f زوج است، $f(t)\sin\lambda t$ تابعی فرد است و انتگرال آن روی خط حقیقی مساوی صفر است. بنابراین

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, cos(\lambda t)dt$$

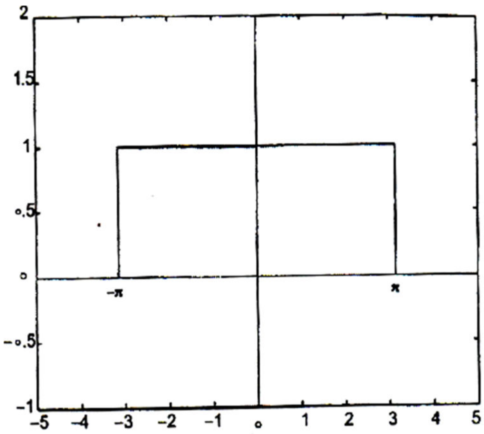
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} cos(\lambda t)dt$$

$$= \frac{\sqrt{۲}\, sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\lambda}$$

در این مثال f، تابعی تکه‌ای ثابت است. چون تابع ثابت با بسامد صفر نوسان می‌کند، انتظار داریم که $\hat{f}(\lambda)$ بزرگ‌ترین مقدارش را وقتی λ نزدیک صفر است اختیار کند، که این موضوع درنمودار $\hat{f}$ به وضوح مشخص است. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب نمودارهایی از f و $\hat{f}$ را نشان می‌دهند.



شکل۲: تبدیل فوریه‌ی موج مستطیلی



شکل۱: موج مستطیلی

۱-۱-٤ مثال: فرض کنید

$$f(t) = \begin{cases} \cos ۳t & -\pi \leq t \leq \pi \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون f تابعی زوج است، لذا $f(t)\sin\lambda t$ تابعی فرد و انتگرال آن روی خط حقیقی مساوی صفر است. بنابراین

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, cos(\lambda t) dt$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} cos\left(۳t\right) cos(\lambda t) dt$$

برای محاسبه‌ی انتگرال فوق از تساوی‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$cos(u+v) = cos\, u\, cos\, v - sin\, u\, sin\, v$$

$$cos(u-v) = cos\, u\, cos\, v + sin\, u\, sin\, v$$

با جایگذاری $u = ۳t$ و $v = \lambda t$ وجمع روابط با یکدیگر و سپس انتگرال‌گیری نتیجه به صورت زیر می‌شود.

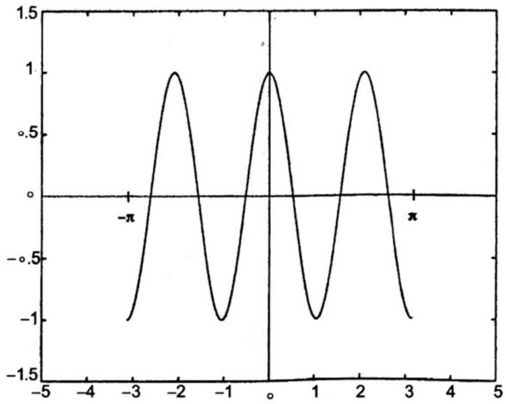
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos\left(۳t\right) cos(\lambda t)\, dt = \int_{۰}^{\pi} cos\left(۳+\lambda\right) tdt + \int_{۰}^{\pi} cos\left(۳-\lambda\right) tdt$$

$$= \frac{۱}{۳+\lambda} sin\left(۳+\lambda\right)\pi + \frac{۱}{۳-\lambda} sin\left(۳-\lambda\right)\pi$$

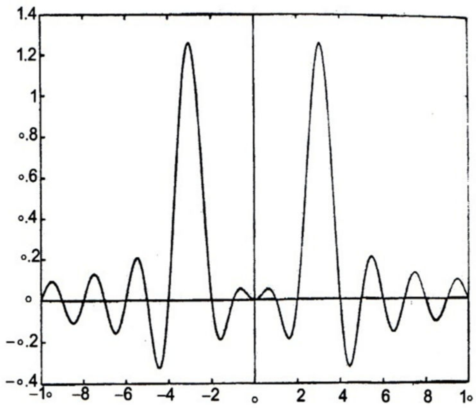
در نتیجه تبدیل فوریه‌ی f به صورت زیر درمی‌آید.

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{۲}\lambda\, sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\left(۹-\lambda^{۲}\right)}.$$

نمودارهایی از f و $\hat{f}$ در شکل‌های ۳ و ٤ نشان داده شده است.



شکل۳: نمودار $cos\left(۳t\right)$



شکل٤: تبدیل فوریه‌ی $cos\left(۳t\right)$

تبدیل فوریه در $\lambda = ۳, -۳$، به نقطه‌ی اوج خود می‌رسد، که با توجه به این که $f(t) = \cos ۳t$ با بسامد ۳ روی بازه‌ی $-\pi \leq t \leq \pi$ نوسان می‌کند، این رفتار قابل انتظار است.

۱-۱-۵ مثال: فرض کنید

$$f(t) = \begin{cases} \sin ۳t & -\pi \leq t \leq \pi \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون f یک تابع فرد است، تنها بخش سینوسی تبدیل در انتگرال شرکت می‌کند.

بنابراین تبدیل f برابر است با:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{-i}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, sin(\lambda t)\, dt = \frac{-i}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} sin\left(۳t\right) sin(\lambda t)\, dt$$

با جایگذاری $u = ۳t$ و $v = \lambda t$ در تساوی‌های $cos(u+v)$ و $cos(u-v)$، در مثال قبل و تفاضل آن‌ها از یکدیگر، انتگرال فوق را محاسبه می‌کنیم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(۳\, t)\sin(\lambda\, t)\, dt = \int_{۰}^{\pi} cos\left(۳-\lambda\right) tdt - \int_{۰}^{\pi} cos\left(۳+\lambda\right) tdt$$

$$= \frac{۱}{۳-\lambda} sin\left(\lambda\pi\right) + \frac{۱}{۳+\lambda} sin\left(\lambda\pi\right) = \frac{۶\, sin(\lambda\pi)}{\left(۹-\lambda^{۲}\right)}$$

بنابراین

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{-۳\sqrt{۲}\, isin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\left(۹-\lambda^{۲}\right)}.$$

۱-۱-۶ مثال: این مثال مربوط به یک موج مثلثی است که فرمول آن به صورت زیر داده شده است:

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \le t \le ۰ \\ \pi - t & ۰ \le t \le \pi \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این تابع زوج است و بنابراین تبدیل فوریه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(t)\, cos(\lambda t)\, dt = \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\pi} (\pi - t)\cos(\lambda t)\, dt$$

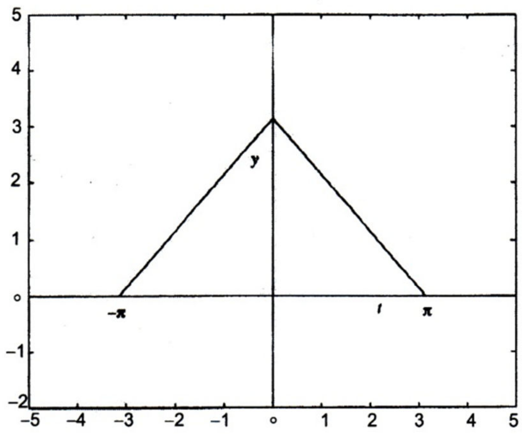
با درنظر گرفتن $\pi - t = u$ و $cos(\lambda t)dt = dv$، انتگرال فوق را به روش جزء به جزء محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\pi} (\pi - t)\, cos(\lambda t)\, dt = \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\frac{۱}{\lambda} sin(\lambda t)\,(\pi - t)|_{۰}^{\pi} + \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\pi}\frac{۱}{\lambda} sin(\lambda t)\, dt$$

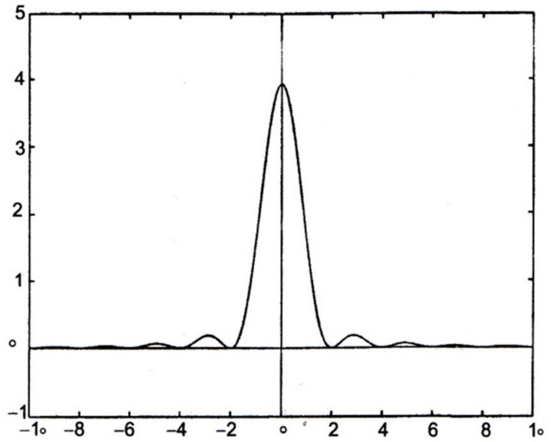
$$= \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}} \frac{\left(۱ - \cos(\lambda\pi)\right)}{\lambda^{۲}}.$$

تبدیل فوریه‌ی مثال‌های ۱-۱-۵ و ۱-۱-٦ با سرعت $۱/\lambda^{۲}$ وقتی $\lambda \to \infty$ نزول می‌کنند، که سریع‌تر از سرعت نزول $۱/\lambda$، در تبدیل فوریه‌ی مثال‌های ۱-۱-۳ و ۱-۱-٤ می‌باشد. نزول سریع‌تر در مثال‌های ۱-۱-۵ و ۱-۱-٦ از پیوستگی توابع آن‌ها نتیجه می‌شود.

.نمودارهای f و $\hat{f}$ در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند



شکل۵: موج مثلثی



شکل٦: تبدیل فوریه‌ی موج مثلثی

۱-۲ ویژگی‌های تبدیل فوریه

در این بخش، اغلب ویژگی‌های اساسی تبدیل فوریه بیان شده است. ابتدا نماد دیگری برای تبدیل فوریه‌ی f به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$

عملگر فوریه‌ی $\mathcal{F}$، تابع f را می‌گیرد و تابع $\hat{f}$ را به عنوان خروجی برمی‌گرداند.

به روش مشابه، عملگر معکوس تبدیل فوریه نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}^{-۱}[f](x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda$$

$\mathcal{F}^{-1}$ معکوس $\mathcal{F}$ است.

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = f \qquad (1-4)$$

برهان:

طبق تعریف $\mathcal{F}$
$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big](x) = \mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}\big](x)$$

طبق تعریف $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}\big]$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

طبق قضیه ۱ − ۱ − ۲
$$= f(x)$$

بعضی از خواص تبدیل فوریه و معکوس آن در قضیه‌ی زیر داده شده‌اند.

۱-۲-۱ قضیه: فرض کنید f و g توابع مشتق‌پذیر و برای $|t|$ بزرگ، $f(t)=0$، در این صورت خواص زیر برقرارند.

۱- تبدیل فوریه و معکوس آن، عملگرهای خطی می‌باشند. یعنی، برای هر ثابت c،

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}(g) \text{ و } \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f],$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f+g] = \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}(g) \text{ و } \mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f]$$

۲- تبدیل فوریه‌ی $t^n f(t)$ به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}$$

۳- معکوس تبدیل فوریه‌ی $\lambda^n f(t)$ به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}^{-1}[\lambda^n f(\lambda)](t) = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n}\left\{\mathcal{F}^{-1}[f](t)\right\}$$

۴- اگر $f^{(n)}$ مشتق nام تابع f باشد، آن‌گاه تبدیل فوریه‌ی آن به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}\big[f^{(n)}\big](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda)$$

۵- معکوس تبدیل فوریه‌ی مشتق nام تابع f به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f^{(n)}\right](t) = (-it)^n \mathcal{F}^{-1}[f](t)$$

٦- تبدیل فوریه‌ی انتقال به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda)$$

۷- تبدیل فوریه‌ی اتساع به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}[f(bt)](\lambda) = \frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right)$$

۸- اگر برای $t<0$، $f(t)=0$، آن‌گاه:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L[f](i\lambda)$$

که $L[f]$ تبدیل لاپلاس f است و به صورت زیر تعریف شده است:

$$L[f](s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts} dt.$$

برهان:

۱- خطی بودن تبدیل فوریه از خطی بودن انتگرال نتیجه می‌شود.

$$\mathcal{F}[f+g](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)+g(t)]\, e^{-i\lambda t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\lambda t} dt$$

$$= \mathcal{F}[f](\lambda) + \mathcal{F}[g](\lambda).$$

$$\mathcal{F}[cf](\lambda) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} cf(t) e^{-i\lambda t} dt$$

$$= c \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

$$= c\, \mathcal{F}[f](\lambda).$$

به روش مشابه معکوس تبدیل فوریه نیز اثبات می‌شود.

۲- با استفاده از معادله‌ی

$$t^{n} f(t) e^{-i\lambda t} = (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \{f(t) e^{-i\lambda t}\}$$

به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

$$= (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \left\{ \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right\}$$

$$= (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} [\mathcal{F}[f](\lambda)].$$

خاصیت ۳ نیز به طور مشابه اثبات می‌شود.

٤- برای تبدیل فوریه‌ی مشتق nام تابع f داریم:

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\lambda) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-i\lambda t} dt$$

حال با درنظر گرفتن $u = e^{-i\lambda t}$ و $dv = f^{(n)}(t) dt$ انتگرال فوق را به روش جزء به جزء محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{(n-1)}(t) e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(t)\, e^{-i\lambda t}dt$$

$$= (i\lambda)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(t)\, e^{-i\lambda t}dt.$$

دلیل برقراری تساوی فوق این است که طبق فرض، f در$+\infty$ و $-\infty$ صفر می‌شود. حال$n-1$ بار دیگر روش جزء به جزء را تکرار می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-i\lambda t}dt = (i\lambda)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}dt$$
$$= (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda).$$

اثبات خاصیت متناظر برای تبدیل فوریه‌ی معکوس به طور مشابه است.

۶- با استفاده از تغییر متغیر $t-a=s$ داریم:

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-i\lambda t}dt$$

$$= e^{-i\lambda a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\lambda s}ds$$

$$= e^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda).$$

۷- با در نظر گرفتن تغییر متغیر$bt=v$ داریم:

$$\mathcal{F}[f(bt)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(bt) e^{-i\lambda t}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b} f(v) e^{-i\lambda \frac{v}{b}}dv$$

$$= \frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\lambda}{b}\right).$$

۸- با استفاده از تعاریف تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}L[f](i\lambda).$$

۱-۲-۲ مثال: برای نشان دادن خاصیت چهارم قضیه‌ی ۱-۲-۱ تابع مثال ۱-۱-۵ را درنظر بگیرید، که تبدیل فوریه‌ی آن برابر است با:

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{-3\sqrt{2}\,i\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\left(9-\lambda^{2}\right)},$$

از طرفی $f'(t)=3\cos 3t$، که تبدیل فوریه‌ی $\cos 3t$ در مثال ۱-۱-٤ محاسبه شده است. بنابراین

$$\hat{f}'(\lambda)=\frac{3\sqrt{2}\,\lambda\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\left(9-\lambda^{2}\right)}. \qquad (1-5)$$

خاصیت چهارم قضیه‌ی ۱-۲-۱ برای $n=1$ به صورت زیر است.

$$\hat{f}'(\lambda)=i\lambda\hat{f}(\lambda),$$

که با توجه به $\hat{f}(\lambda)$ و رابطه‌ی (۱-۵)، تساوی برقرار است.

۱-۲-۳ مثال: در این مثال، خاصیت اتساع بررسی می‌شود. تابع مثال ۱-۱-۵ را درنظر بگیرید، که نمودار آن در شکل ۷ و نمودار $f\left(2t\right)$ در شکل ۸ نشان داده شده است.