دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

اندازه نیم‌گروه خطی عملگرهای ماتریسی روی شبکه‌های باناخ

استاد راهنما:

دکتر محمد جانفدا

استاد مشاور:

دکتر علی اکبر عارفی جمال

نگارش:

حمید رضا خیرآبادی

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

تمامی آنانی که هنوز تکه‌ای از آسمان در چشمانشان

جرعه‌ای از دریا در دستانشان

و تجسمی از خاطره ایثار گلهای سرخ در معبد ارغوانی

دلهایشان به یادگار مانده است.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم و همسر گرامیم

و تقدیم به‌تک ستاره آسمان زندگیم « **نیما**»

سپاس و ستایش بی منتها خدای را سزاست که انسان را آفرید و اسماء را به وی تعلیم نمود، به زیور علم و معرفت بیاراست و به واسطه آن تاج لقد کرمنا بر تارک او نهاد، او این آیت نازل به رسول خاتم را با اقراء آغاز نمود و قلم را دستمایه سوگند خویش قرار داد. حکیمی که انوار هدایت خویش را بر عموم کائنات تابان گردانید و پرتو فیض عمیم را در همه موجودات پدیدار ساخت.

حال که با فضل و عنایت خداوند رحمان موفق به تنظیم و تدوین این رساله شده‌ام، بر خود واجب می‌دانم از تمامی بزرگوارانی که در به فرجام رسانیدن این مهم از سرچشمه بذل و معرفتشان بهره برده‌ام، کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. با اینکه می‌دانم فراتر از توان بیان من است، ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.

از خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادرم و همسرم که همیشه و در تمامی مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند و برادرانم که همواره حامی من بوده‌اند، به خاطر تمام فداکاری‌ها و زحماتشان، سپاسگزارم. همچنین از جناب آقای دکتر محمد جانفدا که در کلاس درس، استاد و در زندگی الگوی اخلاق و رفتار من بوده‌اند، و جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که در انجام این مهم مرا یاری نمودند و نیز از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اسدالله نیکنام و خانم دکتر شیرین حجازیان که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، هم‌چنین از کلیه اساتید محترم گروه ریاضی، که سایر دروس این دوره و دوره کارشناسی را در خدمت ایشان فرا گرفته‌ام و از تمامی دوستانم که بی‌شک دل‌تنگ لحظات با هم بودنمان خواهم شد، کمال تشکر و قدردانی را به جای می‌آورم و برای ایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منّان خواستارم. در پایان امیدوارم این پایان نامه برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود.

حمید رضا خیرآبادی

چکیده

هدف این پایان نامه توصیف اندازه نیم‌گروه‌های پیوسته قوی تولید شده با عملگرهای ماتریسی روی شبکه‌های باناخ با نرم پیوسته مرتب است. ابتدا بعضی تعاریف و مفاهیم مورد نیاز را بیان کرده، سپس به بررسی شبکه‌های باناخ و ویژگیهای آنها می‌پردازیم و در ادامه بحث عملگرها و عملگرهای مثبت را مطرح می‌کنیم. بعد از آن به دلیل نیازی که خواهیم داشت، مختصری درباره پالایه‌ها و فراپالایه‌ها صحبت می‌کنیم. به دنبال آن بحث نیم‌گروه‌ها و مولدها را آورده، نیم‌گروه‌های مثبت را تشریح و درباره شرایط وجود اندازه نیم‌گروه‌های خطی عملگرهای ماتریسی صحبت می‌کنیم. در پایان به بیان مثالهایی از اندازه نیم‌گروه‌ها، از جمله نیم‌گروه‌های تولید شده با عملگرهای ماتریسی می‌پردازیم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نظریه نیم‌گروه‌های عملگرهای کراندار بخشی از آنالیز تابعی را تشکیل می‌دهد و تا حدی مطالب آنالیز تابعی را تحت‌الشعاع خود قرار می‌دهد. این نظریه پس از یافتن قضیه مولد توسط هیل[۱] و یوشیدا[۲] در سال ۱۹۴۸ با سرعت نسبتاً زیادی پیشرفت خود را آغاز کرد و در حال حاضر، کاربردهای اساسی آن در بسیاری از زمینه‌های آنالیز موضوع اصلی ریاضیات را تشکیل می‌دهد. نقطه اوج پیشرفت نظریه نیم‌گروه‌ها ویرایش دوم کتاب *Functional Analysis and semigroups* بود که در سال ۱۹۵۷ توسط هیل و فیلیپس[۳] به چاپ رسید. هیل و فیلیپس نیاز برای توسعه یک نظریه سازگار با تبدیلات نیم گروه‌ها در فضاهای جزئی مرتب را بیان کردند. در این اثناء نظریه نیم‌گروه‌های یک پارامتری از عملگرهای خطی مثبت تدریجاگسترش یافت و در حال حاضر مسئله نیم‌گروه‌ها به یک ابزار مهم در مسائل مختلف از جمله معادلات دیفرانسیلی تابعی، معادلات انتگرو دیفرانسیلی، مکانیک کوانتومی و نظریه کنترل با بعد نامتناهی تبدیل شده است. هم چنین روشهای نیم‌گروه‌ها، به موفقیت‌های بزرگی در حل معادلات خاص رسیده است. آشفتگی نیم‌گروه‌ها نیز یکی از مسایل قدیمی نظریه نیم‌گروه‌ها است که در مقالات و کتابهای بسیار زیادی مورد بررسی واقع شده‌اند.

نظریه عملگرهای مثبت نیز در آغاز قرن نوزدهم شروع شد و درباره عملگرهای انتگرالی و عملگرهای ماتریسی با درایه های نامنفی بحث می‌کرد. عملگرهای مثبت به روشهای بهتر و منظم تری در حال پیشرفت بود و مطالعه آنها منجر به گسترش فضاهای

[۱] Hille

[۲] Yosida

[۳] R. S. Phillips

ریس شد. کتاب *On the decomposition of linear functionals* نوشته ریس [۴] درسال ۱۹۲۸ یکی از کتابها درباره فضاهای ریس بود. نظریه فضاهای ریس به صورت یک اصل موضوعی در سال ۱۹۳۰ توسط فردنتال [۵] و کانترویچ [۶] گسترش یافت و در سالهای ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ مقاله‌هایی درباره عملگرهای مثبت نوشته شد و تحقیق درباره آنها ادامه یافت تا این که کتاب *Banach Lattices and Positive Operators* توسط شفر[۷] در سال ۱۹۷۴ به چاپ رسید و از آن زمان تا به حال پیشرفتهای زیادی در زمینه عملگرهای مثبت و فضاهای ریس حاصل شده است.

این پایان نامه شامل سه فصل است. فصل اول شامل چهار بخش است. بخش اول به مقدمات اختصاص دارد که در آن تعاریف و مفاهیم اولیه درباره فضاهای نرمدار و باناخ بیان شده است. در بخش دوم شبکه‌های باناخ، و در بخش سوم عملگرها به ویژه عملگرهای مثبت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش آخر به دلیل نیازی که داشتیم درباره پالایه‌ها و فراپالایه‌ها صحبت کرده‌ایم. در این فصل تقریبا تمامی قضایا بدون اثبات پذیرفته می‌شوند و تنها مراجع لازم برای اثبات آنها بیان شده است.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول مفاهیم C_0- نیم‌گروه‌ها، مولد و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در بخش دوم قضیه هیل یوشیدا را که قضیه ای اصلی و پرکاربرد است را مطرح می‌کنیم و سپس آشفتگی را که مسأله‌ای قدیمی و پرکاربرد در نظریه نیم‌گروه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش سوم نیم‌گروه‌های مثبت و ویژگیهای آنها را بیان می‌کنیم.

---

[۴] F. Riesz

[۵] H. Freudenthal

[۶] L. V. Kantrovic

[۷] H. H. Schaefer

فصل سوم شامل سه بخش است. در بخش اول درباره وجود اندازه نیم‌گروه‌های عملگرهای خطی کراندار صحبت می‌کنیم که مطالب آن عمدتا از مقاله

[9] G. Greiner,; I. Becker, *On the modulus of one-parameter semigroups.* Springer Verlag New York Inc. Semigroup From Vol. 34, (1986), 185-201.

گرفته شده است.

در بخش دوم به بحث درباره اندازه نیم‌گروه‌های عملگرهای ماتریسی پرداخته‌ایم که مطالب آن از مقاله‌های

[4] P. Charissiadis, *On the modulus of semigroups generated by operator matrices.* Arch. Math., Vol. 58, (1992), 345-353.

[17] M. Stein and J. Voigt, *The modulus of matrix semigroups.* Fachrichtung Mathematik, Technische Universitat Dresden, 01062 Dresden, Germany. Arch. Math., 82, (2004). 311-316

گرفته شده است. در بخش سوم چند مثال از اندازه نیم‌گروه‌ها بیان شده است.

فصل ۱

شبکه‌های باناخ و عملگرهای مثبت

این فصل در چهار بخش آورده شده است. در بخش اول برخی تعاریف و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. سپس دربخش دوم شبکه‌های باناخ و قضیه‌های مربوط به آن را بررسی می‌کنیم. در بخش بعدی عملگرها را معرفی کرده، به بررسی برخی خصوصیات آنها که مورد نیاز ما خواهد بود پرداخته و در ادامه به بررسی عملگرهای مثبت و خواص آنها می‌پردازیم. در بخش آخر مفهوم پالایه و فراپالایه را که از آنها در اثبات قضیه اصلی پایان نامه استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به فضاهای نرمدار و باناخ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ **یک فضای برداری**[۱] عبارت است از یک گروه آبلی و جمعی مانند $(E,+)$ به همراه ضرب اسکالر از میدان F ($F=\mathbb{R}$ یا $F=\mathbb{C}$) به توی E مانند

$$\begin{aligned} . : F \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

که دارای شرایط زیر است.

۱) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$،

۲) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$،

۳) $1x = x$،

۴) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید E فضایی برداری روی میدان F($F=\mathbb{C}$ یا $F=\mathbb{R}$) باشد. تابع $\|.\| : E \longrightarrow [0,\infty)$ یک **نیم نرم**[۲] روی E نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

الف) از $x=0$، داشته باشیم $\|x\|=0$،

ب) به ازای هر $\alpha \in F$ و هر $x \in E$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$،

ج) به ازای هر $x,y \in E$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

تابع فوق را یک نرم گوییم هرگاه علاوه بر شرایط فوق از $\|x\|=0$ داشته باشیم $x=0$.

---

[۱] Vector space

[۲] Seminorm

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری E روی میدان F را یک فضای نرمدار [۳] گویند، اگر یک نرم $||.||$ روی E وجود داشته باشد. فضای نرمدار E با متر $d(x,y)=||x-y||$ یک فضای متریک است. حال اگر این فضای متریک کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی [۴] در آن همگرا باشد، آن‌را یک **فضای باناخ** [۵] گوییم.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید X یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ روی آن باشد و $1 \leq p < \infty$ و f تابع اندازه پذیر مختلط روی X باشد. نرم $||f||_p$ را به صورت $||f||_p=(\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$، تعریف می‌کنیم. $L^p(\mu)$ را برای نمایش مجموعه توابع اندازه پذیر مانند f به کار می‌بریم که $||f||_p < \infty$. لازم به ذکر است که اعضای $L^p(\mu)$ در واقع کلاسهای هم ارزی هستند که در آن f,g در یک کلاس واقعند اگر و تنها اگر $f=g \quad a.e.$. قضیه 3.11 مرجع [14]، نشان می‌دهد که فضای $L^p(\mu)$ فضایی باناخ است.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، فضای همه توابع پیوسته روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. زیرفضای $C_b(X)$ از $C(X)$ شامل همه توابع پیوسته کراندار روی X است. روی این فضا نرم $||.||_\infty$ را به صورت

$$||.||_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد $(C_b(X), ||.||_\infty)$ یک فضای باناخ است. برای $f \in C(X)$، قراردهید $Suppf=\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. این مجموعه را تکیه‌گاه f می‌نامیم. $C_c(X)$ فضای همه توابع پیوسته روی X است که دارای تکیه‌گاه فشرده‌اند. می توان نشان داد که $C_c(X)$ باناخ نیست. واضح است که اگر X فشرده باشد، $C_c(X)=C_b(X)=C(X)$. حال اگر X فضای برداری باشد، فضای همه توابع بی‌نهایت

[۳] Normed space
[۴] Cauchy sequence
[۵] Banach space

بار مشتق‌پذیر با تکیه‌گاه فشرده را با $C_c^\infty(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ تابع مختلط مقدار f را روی بازه $I \subseteq \mathbb{R}$، انتگرال پذیر موضعی گوییم هرگاه f روی I اندازه پذیر بوده و برای هر زیرمجموعه فشرده K از I، $\int_K |f| < \infty$. مجموعه تمام توابع انتگرال پذیر موضعی روی I را با $L^1_{loc}(I)$ نشان می‌دهیم. هم چنین مجموعه تمام توابع انتگرال پذیر موضعی که روی زیرمجموعه های فشرده K از I، $\int_K |f|^p < \infty$ است را با $L^p_{loc}(I)$ نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که $L^p_{loc}(I)$ یک فضای باناخ است.(ر.ک. [15] بعد از مثال 4.7.1).

قضیه ۶.۱.۱ (قضیه همگرایی تسلطی لبگ) : اگر $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در $L^1(\mu)$ باشد به طوری که

۱) $a.e$ $\quad f_n \longrightarrow f$،

۲) تابع $0 \le g \in L^1(\mu)$ وجود داشته باشد چنان که برای هر n، $\quad a.e.$ ، $|f_n| \le g$،

در این صورت

$$f \in L^1(\mu) \quad , \quad \int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n.$$

برهان: به مرجع [۸] قضیه II.2.24، مراجعه کنید.□

۲.۱ شبکه‌های باناخ

در این بخش شبکه‌های باناخ را بیان و درباره ویژگی‌های آنها صحبت می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ مجموعه M را به همراه رابطه $\le$، یک **مجموعه مرتب**[۶] گوییم هرگاه

۱) برای هر $x \in M$، $x \le x$،

---

[۶] Order set

۲) برای هر $x,y \in M$، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$،

۳) برای هر $x,y,z \in M$، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$،

M را یک مجموعه **کلا مرتب** می گوییم هرگاه

$$\forall x,y \in M: \quad x \leq y \quad \text{یا} \quad y \leq x.$$

اگر $x,y \in M$ به طوری که $x \leq y$ باشد، در این صورت

$$[x,y] = \{z \in M : x \leq z \leq y\}$$

را یک **بازه مرتب** [۷] بین x,y می‌نامیم.

$A \subseteq M$ را **کراندار مرتب** [۸] گوییم هرگاه A دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد یا اگر و فقط اگر A مشمول در یک بازه مرتب [x,y] باشد.

$A \subseteq M$ را یک مجموعه**جهتدار رو به بالا** [۹] گوییم هرگاه برای هر $x,y \in A$، $z \in A$ موجود باشد به طوری که $z \geq x \ , \ z \geq y$.

$A \subseteq M$ را یک مجموعه **جهتدار رو به پایین** [۱۰] گوییم هرگاه برای هر $x,y \in A$، $z \in A$ موجود باشد به طوری که $z \leq x \ , \ z \leq y$.

تعریف ۲.۲.۱ E را یک **فضای برداری مرتب**[۱۱] گوییم هرگاه E یک فضای برداری حقیقی و یک مجموعه مرتب باشد که در شرایط ذیل صدق کند،

۱) برای هر $x,y \in E$ به طوری که $x \leq y$، آن‌گاه برای هر $z \in E$، $x + z \leq y + z$.

۲) برای هر $x,y \in E$، که $x \leq y$، آن‌گاه برای هر عدد حقیقی $a \geq 0$ داشته باشیم، $ax \leq ay$.

[۷] Order interval
[۸] Order bounded
[۹] Upward directed
[۱۰] Downward directed
[۱۱] Order vector spase

تعریف ۳.۲.۱ مجموعه مرتب E را یک **شبکه**[۱۲] گوییم هرگاه به ازای هر دو عضو $x, y \in E$، زوج (x,y) دارای sup و inf باشد. در این وضعیت قرار می‌دهیم

$$\inf(x, y) = x \wedge y \quad \text{و} \quad \sup(x, y) = x \vee y.$$

مثال ۴.۲.۱ در $\mathbb{R}^n$ ترتیب نقطه‌ای را در نظر بگیرید. یعنی برای

$$X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)\ ,\ Y = (y_۱, y_۲, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$X \leq Y \equiv x_۱ \leq y_۱, x_۲ \leq y_۲, \ldots, x_n \leq y_n \text{ ،}$$

در این صورت با این ترتیب $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری مرتب است و داریم

$$\sup(X, Y) = X \vee Y = (x_۱ \vee y_۱, x_۲ \vee y_۲, \ldots, x_n \vee y_n)$$

$$\inf(X, Y) = X \wedge Y = (x_۱ \wedge y_۱, x_۲ \wedge y_۲, \ldots, x_n \wedge y_n).$$

بنابراین $\mathbb{R}^n$ یک شبکه است.

این مثال نشان می‌دهد که ممکن است $\max(X, Y)$ و $\min(X, Y)$ موجود نباشد اما $\sup(X, Y)$ و $\inf(X, Y)$، موجود باشند. مثلا فرض کنید $X = (۱, -۱), Y = (-۱, ۱), n = ۲$ در این صورت

$\sup(X, Y) = X \vee Y = (۱ \vee -۱, -۱ \vee ۱) = (۱, ۱)$ اما $\max(X, Y)$ موجود نیست.

مشابها $\inf(X, Y) = X \wedge Y = (۱ \wedge -۱, -۱ \wedge ۱) = (-۱, -۱)$ در حالی که $\min(X, Y)$ موجود نیست.

در حالت کلی فرض کنید $E_۱, E_۲, \ldots, E_n$ هر کدام یک شبکه باشند. بنابراین روی هر کدام از آنها ترتیب معنی دارد. حال برای $E = E_۱ \times E_۲ \times \ldots \times E_n$ مانند مثال قبل ترتیب نقطه‌ای را در نظر بگیرید. E با این ترتیب یک شبکه خواهد بود.

[۱۲] Lattice

تعریف ۵.۲.۱ اگر E یک فضای برداری مرتب باشد به طوری که $(E, \leq)$ یک شبکه شود، E را یک **فضای ریس** [۱۳] گوییم.

مثال ۶.۲.۱ $L^p(\mu)$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که $L^p(\mu)$ با ترتیب نقطه‌ای

$$f \leq g \equiv f(x) \leq g(x) \ a.e.$$

یک فضای ریس است.

تذکر ۷.۲.۱ فرض کنید E یک فضای ریس باشد در این صورت

$$E_+ = \{x \in E, x \geq 0\} \quad \text{و} \quad |x| = x \vee -x \quad \text{و} \quad x_+ = x \vee 0 \quad \text{و} \quad x_- = (-x) \vee 0.$$

E_+ را مخروط مثبت [۱۴] می‌گوییم. واضح است که اگر x, y مثبت باشند و $x \leq y$ باشد، $|x| \leq |y|$.

قضیه ۸.۲.۱ برای عناصر دلخواه x, y, z از یک فضای ریس روابط زیر برقرار است،

الف) $x + y = \sup\{x, y\} + \inf\{x, y\}$.

ب) $x + \inf\{y, z\} = \inf\{x + y, x + z\} \quad , \quad x + \sup\{y, z\} = \sup\{x + y, x + z\}$.

ج) $\inf\{x, y\} = -\sup\{-x, -y\} \quad , \quad \sup\{x, y\} = -\inf\{-x, -y\}$.

د) برای $\alpha \geq 0$ داریم،

$$\alpha \inf\{x, y\} = \inf\{\alpha x, \alpha y\}.$$

$$\alpha \sup\{x, y\} = \sup\{\alpha x, \alpha y\}.$$

هـ) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

و) $|\sup\{x, z\} - \sup\{y, z\}| \leq |x - y|$ و $|\inf\{x, z\} - \inf\{y, z\}| \leq |x - y|$.

ی) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

---

[۱۳] Riesz spase

[۱۴] Positive Cone

برهان: به مرجع [۱] قضیه‌های I.1.3 و II.1.6، مراجعه کنید.□

گزاره **۹.۲.۱** اگر x یک عنصر از یک فضای ریس باشد داریم

$$x = x_+ - x_- \quad , \quad |x| = x_+ + x_-.$$

برهان: بنا بر روابط (الف) و (ج) قضیه قبل و نتیجه بدست آمده داریم

$$x = x + \circ = \sup\{x, \circ\} + \inf\{x, \circ\} = \sup\{x, \circ\} - \sup\{-x, \circ\} = x_+ - x_-،$$

وبنا بر روابط (ب)و(د) قضیه قبل داریم

$$\begin{aligned} |x| = \sup\{x, -x\} = \sup\{۲x, \circ\} - x &= ۲\sup\{x, \circ\} - x = ۲x_+ - x \\ &= ۲x_+ - (x_+ - x_-) = x_+ + x_-. \end{aligned}$$

و برهان تمام است.□

تعریف **۱۰.۲.۱** یک زیرمجموعه A از فضای ریس E، **یک پارچه** [۱۵] گفته می‌شود و آن را با نماد $Solid(A)$ نمایش می‌دهیم هرگاه $| x |\leq| y |$ و $y \in A$، داشته باشیم $x \in A$.

کوچکترین مجموعه یک پارچه شامل A، **پوسته یک پارچه** A، [۱۶]است. در واقع

$$Solidhull(A) = \{x \in E; \exists y \in A, | x |\leq| y |\}.$$

هر زیر فضای I از E که یک پارچه نیز باشد یک **ایده ال مرتب** نامیده می‌شود.

یک ایده ال B از E یک **نوار** [۱۷] گفته می‌شود اگر برای هر $A \subseteq B$، که A دارای یک سوپریمم در E است، داشته باشیم $\sup(A) \in B$.

$x, y \in E$ را **ناسازگار(جدا از هم)** می‌گوییم و با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهیم هرگاه $|x| \wedge |y| = \circ$.

[۱۵] Solid

[۱۶] Solidhull

[۱۷] Band

اگر x, y با هم ناسازگار باشند داریم، $|x+y| = |x| + |y|$. زیرا بنا بر روابط (هـ) و (ی) قضیه قبل و با توجه به اینکه $|x| \wedge |y| = 0$ است داریم

$$\begin{aligned} |x+y| \geq ||x|-|y|| &= |x| \vee |y| - |x| \wedge |y| \\ &= |x| \vee |y| + |x| \wedge |y| \\ &= |x| + |y| \geq |x+y| \end{aligned}$$

لذا داریم $|x+y| = |x| + |y|$.□

فضای ریس E را **مرتب کامل** [۱۸] گوییم هرگاه هر زیر مجموعه ناتهی از بالا کراندار آن دارای sup باشد. هم چنین E را **سیگما مرتب کامل** [۱۹] گوییم هرگاه هر زیر مجموعه ناتهی شمارای از بالا کراندار در آن دارای sup باشد.

گزاره ۱۱.۲.۱ هر فضای ریس مرتب کامل، سیگما مرتب کامل است.

برهان به مرجع [۱۱] گزاره I.1.1.8، مراجعه کنید.□

مثال ۱۲.۲.۱ در مثال ۶.۲.۱، دیدیم که $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$، با ترتیب نقطه‌ای یک فضای ریس است. $L^p(\mu)$ مرتب کامل نیز است.(ر.ک.[۱] صفحه ۱۲). لذا طبق گزاره قبلی، $L^p(\mu)$ سیگما مرتب کامل است.

تعریف ۱۳.۲.۱ یک نیم نرم، مانند ρ روی شبکه E اگر در شرط $\rho(x) \leq \rho(y)$، زمانی که $|x| \leq |y|$ باشد صدق کند یک **نیم نرم شبکه** [۲۰] نامیده می‌شود. به علاوه اگر ρ یک نرم باشد یعنی $\rho(x) = \|x\|$، یک **نرم شبکه** [۲۱] نامیده می‌شود.

[۱۸] Dedckind complete

[۱۹] $\sigma - Dedckindcomplete$

[۲۰] Seminorm lattice

[۲۱] Lattice norm

رابطه اگر $|y| \leq |x|$ آن‌گاه $\|y\| \leq \|x\|$، نتیجه می‌دهد $\||x|\| = \|x\|$. زیرا از این که $|x| \leq x$ باشد داریم $|(|x|)| \leq |x|$ و در نتیجه $\||x|\| \leq \|x\|$. هم‌چنین از این که $|x| \leq |x| = |(|x|)|$ است داریم $\|x\| \leq \||x|\|$، بنابراین $\||x|\| = \|x\|$.

تعریف ۱۴.۲.۱ یک فضای ریس مجهزشده با نرم شبکه یک **فضای ریس نرمدار**[۲۲] نامیده می‌شود.

فرض کنید E یک فضای ریس نرمدار باشد. اگر $(E,\|.\|)$ کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی[۲۳] در آن همگرا باشد، در آن صورت E یک **شبکه باناخ** [۲۴] است.

مثال ۱۵.۲.۱ فرض کنید K یک فضای هاسدورف فشرده باشد و $C(K)$ فضای باناخ همه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی K باشد ترتیب را به صورت زیر تعریف کنید

$$f \leq g \equiv \forall t \in K, \quad f(t) \leq g(t)$$

در این صورت $(C(K),\leq)$ یک فضای ریس است و چون $C(K)$ یک فضای باناخ است یعنی یک فضای نرمدار کامل است، بنابراین $(C(K),\leq)$ یک فضای ریس نرمدار کامل و در نتیجه یک شبکه باناخ است.

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنید E یک شبکه باناخ باشد. تابع پیوسته

$$P : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

را یک تابع زیر خطی می گوییم اگر

۱) برای هر $f, g \in E$، داشته باشیم $P(f+g) \leq P(f) + P(g)$،

۲) برای هر $f \in E, \lambda \geq 0$، داشته باشیم، $P(\lambda f) = \lambda P(f)$.

---

[۲۲] Norm riesz spase

[۲۳] Cauchy sequence

[۲۴] Banach lattice

یک تور در فضای توپولوژیک X، یک نگاشت از مجموعه جهتدار I به توی X است. فرض کنید $(x_i)_{i\in I}$ یک تور باشد. منظور از $x_i \uparrow x$ (به ترتیب، $x_i \downarrow x$) یعنی تور x_i صعودی (به ترتیب، نزولی) است و $x = \sup\{x_i : i \in I\}$. (به ترتیب، $x = \inf\{x_i : i \in I\}$.). یک نرم روی شبکه باناخ E **نرم پیوسته مرتب** [۲۵] نامیده می‌شود اگر برای هر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$، از این که $x_\alpha \downarrow 0$، داشته باشیم $\|x_\alpha\| \downarrow 0$.

فرض کنید برای $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$، که $k = \{1, \ldots, n\}$ و $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$، یک تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$، **سریعا نزولی** [۲۶] گفته می‌شود اگر $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و برای هر $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$،

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^n D^\alpha f(x) = 0.$$

فضای شوارتز $S(\mathbb{R}^n)$، عبارت است از

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{سریعا نزولی است } f\}$$

یک تور $(y_i)_{i\in\tau}$ را **همگرای مرتب** [۲۷] به y می‌گوییم اگر یک تور $(x_i)_{i\in\tau}$ وجود داشته باشد که در شرط $x_i \downarrow 0$ صدق کند و برای هر $i \in I$، $|y_i - y| \le x_i$. و در این وضعیت می‌نویسیم

$$y = o - \lim y_i$$

تعریف بالا را برای یک دنباله نیز می‌توان بیان کرد.

مثال **۱۷.۲.۱** فرض کنید $E = L^p(\mu)$ و دنباله $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ چنان باشد که برای تقریبا همه $t \in X$، $f_n(t) \longrightarrow 0$ زمانی که $n \longrightarrow \infty$ و یک $0 \le g \in L_p(\mu)$ وجود داشته باشد به طوری که $|f_n| \le g$، در این صورت $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرای مرتب به صفر است. کافی است

[۲۵] Order continouse norm

[۲۶] Rapidly decreasing

[۲۷] Order convergent