بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی محض

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

چند تساوی و نامساوی برای دنباله های بسل تعمیم‌یافته در فضاهای هیلبرت

مؤلف:

شیوا السادات حسینی محمود آبادی

استاد راهنما:

دکتر اکبر نظری

دی ماه ۱۳۹۳

تقدیم به مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم

پدر و مادر عزیزم

مهربان فرشتگانی که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی است.

آن دو بزرگواری که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر.

توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

برگ برگ این تلاش ناچیز تقدیم قدومشان

ستایش برای خواست آن نخستین بی آغاز و آن واپسین بی انجام

سپاس بی کران یکتای بی همتارا که بنده کوچکش را هستی بخشید و در دریای بی کران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشانشیند و خوشه چینی از علم و معرفت را روزی اش ساخت.

در ابتدا صمیمانه ترین تقدیرها، تقدیم به خانواده عزیزم، که زیبایی زندگیم و هر آنچه که به دست آورده ام مدیون حضور سبز آن هاست.

از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر اکبر نظری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

از اساتید فرزانه جناب آقای دکتر محمد علی ولی و دکتر غلامرضا آقاملایی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند و با حسن دقتشان بنده را در تصحیح آن یاری نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

و در پایان از تمامی اساتیدی که طی این سالیان اندیشیدن را به من آموختند و با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را بارور ساختند سپاسگزارم.

باشد این خردترین بخشی از زحمات آنها را سپاس گوید.

چکیده

قاب های تعمیم‌یافته خصوصیاتی مشابه با قاب ها در فضاهای هیلبرت مختلط دارند، اما تمام خصوصیات آن ها مشابه نمی باشند. برخی از نویسندگان تساوی ها و نامساوی ها برای قاب ها و قاب های دوگان را به ترتیب به تساوی ها و نامساوی هایی برای قاب های تعمیم‌یافته و قاب های تعمیم‌یافته دوگان در فضاهای هیلبرت تعمیم دادند. در این پایان نامه، با استفاده از عملگرهای شبه معکوس چند تساوی و نامساوی جدید برای دنباله‌های بسل تعمیم‌یافته در فضاهای هیلبرت معرفی مورد بررسی قرار گرفته است. این نتایج تعمیم و بهبود نتایجی است که توسط بالان[1]، کاسازا[2] و گاوروتا[3] به دست آمده است.

کلمات کلیدی:

قاب تعمیم‌یافته، دنباله بسل تعمیم‌یافته، عملگر شبه معکوس.

---

[1] R.Balan
[2] P.G.Casazza
[3] P.Gavruta

مقدمه

مفهوم قاب اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط دافین[1] و شیفر[2] برای مطالعه مسائل مربوط به سری های فوریه غیرها رمونیک مطرح شد. بعد از آن در سال ۱۹۸۶ دوبشی[3]، گراسمن[4] و میر[5] قاب ها را به عنوان تعمیمی از پایه های متعامدیکه در فضاهای هیلبرت معرفی کردند. یک قاب مجموعه ای از بردارهای دارای حشو در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می باشد.

قاب ها به طور متداول در پردازش سیگنال، پردازش تصویر، شبکه های عصبی و بسیاری از زمینه های دیگر مورد استفاده قرار می گیرند[۳]. درسالهای اخیر قاب های تعمیم‌یافته توسط سان[6] در فضای هیلبرت مختلط معرفی شدند، که شامل تعمیم های زیادی از قاب ها می باشند. به عنوان مثال، قاب های زیر فضایی، شبه قاب ها و شبه تصویرهای کراندار، قاب های تعمیم‌یافته محسوب می شوند[۱۴]. در فصل اول این پایان نامه برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی را به طور خلاصه و بدون اثبات ارائه می کنیم. در فصل دوم ابتدا به معرفی قاب های تعمیم‌یافته پرداخته و سپس با مشخصه سازی قاب های تعمیم‌یافته خصوصیاتی از قاب ها را که ممکن است به قاب های تعمیم‌یافته در فضای هیلبرت مختلط تعمیم یابند بررسی می کنیم و به بیان خصوصیات مشترک بین قاب ها و قاب های تعمیم‌یافته می پردازیم، و در نهایت نیز عملگر $\mathcal{L}$ را معرفی می کنیم. در فصل سوم ابتدا برخی از تساوی ها و نامساوی ها برای قاب ها و قاب های دوگان را به ترتیب به تساوی ها و نامساوی هایی برای قاب های تعمیم یافته و قاب های تعمیم یافته دوگان در فضاهای هیلبرت مختلط تعمیم می دهیم و سپس با استفاده از عملگر $\mathcal{L}$ و عملگر شبه معکوس آن یعنی، $\mathcal{L}^{\dagger}$ تساوی ها و نامساوی های بیان شده برای قاب های تعمیم‌یافته را به چند تساوی و نامساوی جدید برای دنباله های بسل تعمیم‌یافته در فضاهای هیلبرت مختلط تعمیم می دهیم.

[1] R.J.Duffin
[2] A.C. Schacffer
[3] I.Daubechies
[4] A.Grossmann
[5] Y.Meyer
[6] W.San

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی، به طور خلاصه و بدون اثبات ارائه می شوند. برای مشاهده اثبات قضایا و جزئیات بیشتر به [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۶]، [۸]، [۹] و [۱۲] رجوع کنید.

۱.۱ فضاهای هیلبرت و عملگرها روی فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید E یک فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $<.,.>: E \times E \to \mathbb{C}$ ، در E ضرب داخلی نامیده می شود، اگر برای هر $x, y, z \in E$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، در شرایط زیر صدق کند:

1. $< x, y >=< \overline{y, x} >,$
2. $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >,$
3. $\langle x, x \rangle = o \Leftrightarrow x = o,$
4. $< x, x \geq o.$

تعریف ۲.۱.۱. یک فضای برداری همراه با ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی نامیده می شود.

مثال ۳.۱.۱. $\mathbb{C}$یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $< x, y >= x\bar{y}$ می باشد.

گزاره ۴.۱.۱. در یک فضای ضرب داخلی E به ازای هر $x \in E$، $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ یک نرم روی E است.

تعریف ۵.۱.۱. فضای نرمدار $(E, \|.\|)$ را کامل نامند، هر گاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۶.۱.۱. یک فضای ضرب داخلی، فضای هیلبرت نامیده می شود، اگر بانرم حاصل از ضرب داخلی که در تعریف بالا آمده کامل باشد.

مثال ۷.۱.۱. $\mathbb{C}^n$ یک فضای هیلبرت می باشد.

قضیه ۸.۱.۱. [۱۲] (نامساوی کشی شوارتز)[1].

اگر x و y دو بردار در فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ باشند، آنگاه

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

[1] Cauchy-shwartz inequality

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید E زیرمجموعه ناتهی از فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ باشد. عنصر $x \in \mathcal{H}$ بر S عمود است و به صورت $x \perp E$ نمایش داده می شود، هرگاه

$$\langle x, y\rangle = o, \qquad \forall y \in E.$$

مجموعه همه عناصر عضو $\mathcal{H}$ که بر E عمودند را با $E^{\perp}$ نمایش می دهند که به صورت زیر تعریف می شود:

$$E^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \ x \perp E\}.$$

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید E زیر فضای بسته از فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت

$$\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. دنباله $\{x_j\}_{j\in J}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ کامل نامیده می شود، هرگاه

$$\overline{Span}\{x_j\}_{j\in J} = \mathcal{H}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را جدایی‌پذیر نامند، هر گاه بردارهای $V_1, V_2, \dots$، چنان موجود باشند، به طوری که یک زیرمجموعه چگال در $\mathcal{H}$ تولید کنند.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند، تابع $T: \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{K}$ یک تبدیل خطی نامیده می شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{H},$
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \ \ \forall x \in \mathcal{H}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}.$

مثال ۱۴.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ و $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ دو فضای هیلبرت باشند. دراین صورت تابع $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه $T(x,y) = x + y$ یک تبدیل خطی است.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. تبدیل خطی $T: \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{K}$ کراندار است، هر گاه یک $M \geq o$ چنان موجود باشد، به طوری که،

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. اگر $T: \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{K}$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه،

$$\|T\| = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

در این صورت اگر $\|T\| < \infty$، آنگاه عملگر T کراندار نامیده می شود. در غیر این صورت T یک عملگر بی‌کران نامیده می شود.

مثال ۱۷.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ دو فضای هیلبرت باشند. در این صورت تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ با ضابطه $T(x_1, \dots, x_n) = x_j$ کراندار بانرم $\|T\| = 1$ می باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. مجموعه همه تبدیل های خطی کراندار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ را با نماد $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۹.۱.۱. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از $\mathcal{H}$ به توی خودش تعریف می شود.

تعریف ۲۰.۱.۱. هر تبدیل خطی $f: \mathcal{H} \longmapsto \mathbb{C}$، یک تابعک خطی نامیده می شود.

قضیه ۲۱.۱.۱. [۱۲] (نمایش ریس)[1].

اگر f یک تابعک خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $y \in \mathcal{H}$ منحصر به فردی وجود دارد به طوری که،

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

بعلاوه،

$$\|f\| = \|y\|.$$

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ باشد. عملگر $T^*: \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{K}$ ، یک عملگرالحاقی نامیده می شود، هرگاه

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \qquad y \in \mathcal{K}.$$

قضیه ۲۳.۱.۱. [۱۲] عملگر الحاقی T^* از یک عملگر کراندار T، کراندار می باشد. همچنین،

$$\|T\| = \|T^*\|, \qquad \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

[1]- Riesz representation

قضیه ۲۴.۱.۱. فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. در این صورت $R(T)= \mathcal{H}$ ، اگروتنهااگر T^* از پایین کراندار باشد. همچنین، $R(T^*) = \mathcal{H}$ اگروتنهااگر T از پایین کراندار باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را خودالحاق نامند، هرگاه $T = T^*$.

قضیه ۲۶.۱.۱. [۶] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت مختلط باشد. عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ خودالحاق است اگروتنهااگر

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

قضیه ۲۷.۱.۱. [۱۲] اگر T یک عملگر خودالحاق روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه

$$\|T\| = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathcal{H},\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

لم ۲۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت مختلط باشد. اگر T یک عملگر خطی، کراندار و خود الحاق باشد، آنگاه

$$\langle Tx, x\rangle = o, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

اگر و تنها اگر $T = o$.

قضیه ۲۹.۱.۱. [۶] اگر عملگر کراندار معکوس پذیر T خودالحاق باشد، آنگاه T^{-1} نیز کراندار و خود الحاق خواهد بود.

قضیه ۳۰.۱.۱. [۶] فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و خودالحاق باشد. در این صورت،

1. $kerT = (RanT^*)^{\perp}$.
2. $kerT^* = (RanT)^{\perp}$.
3. $\overline{Ran}T = (kerT^*)^{\perp}$.
4. $\overline{RanT^*} = (kerT)^{\perp}$.

تعریف ۳۱.۱.۱. عملگر T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مثبت نامیده می شود، هرگاه خودالحاق باشد و

$$\langle Tx, x\rangle \geq o\ , \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

قضیه ۳۲.۱.۱. [۱۲] فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر مثبت باشد، در این صورت T دارای یک ریشه دوم مثبت منحصر به فرد، خودالحاق و کراندار مانند $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ است. یعنی $S^2 = T$. همچنین اگر T معکوس پذیر باشد، S نیز چنین است.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند و عملگر $T: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{K}$ خطی، کراندار و با برد بسته باشد. در این صورت عملگر T دارای عملگر شبه معکوس $T^{\dagger}$ با خواص زیر می باشد:

$$TT^{\dagger}T = T, \qquad T^{\dagger}TT^{\dagger} = T^{\dagger},$$
$$(T^{\dagger}T)^* = T^{\dagger}T, \qquad (TT^{\dagger})^* = TT^{\dagger}.$$

گزاره ۳۴.۱.۱. اگر عملگر T کراندار و معکوس پذیر باشد، آنگاه $T^{\dagger} = T^{-1}$.

قضیه ۳۵.۱.۱. [۴] عملگر شبه معکوس T یعنی $T^{\dagger}$ منحصر بفرد است.

قضیه ۳۶.۱.۱. اگر عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ دارای شبه معکوس باشد، آنگاه

$$(T^{\dagger})^* = (T^*)^{\dagger}.$$

چون T دارای شبه معکوس است، T^* نیز شبه معکوس دارد و در نتیجه دارای شبه معکوس $(T^*)^{\dagger}$ می باشد.

اما با توجه به اینکه $T^{\dagger}TT^{\dagger} = T^{\dagger}, TT^{\dagger}T = T$ داریم:

$$T^* = T^*(T^{\dagger})^*T^*, \quad (T^{\dagger})^* = (T^{\dagger})^*T^*(T^{\dagger})^*. \tag{۱}$$

از طرفی،

$$(T^{\dagger})^*T^* = (TT^{\dagger})^* = TT^{\dagger} = ((TT^{\dagger})^*)^* = ((T^{\dagger})^*T^*)^* \tag{۲}$$

به همین ترتیب،

$$T^*(T^{\dagger})^* = (T^{\dagger}T)^* = T^{\dagger}T = ((T^{\dagger}T)^*)^* = (T^*(T^{\dagger})^*)^*. \tag{3}$$

از (۱)، (۲) و (۳) می توان نتیجه گرفت که $(T^{\dagger})^*$ نیز شبه معکوس T^* است. اما شبه معکوس عملگر T^* منحصر به فرد است، بنابراین $(T^*)^{\dagger} = (T^{\dagger})^*$.

مثال ۳۷.۱.۱ . فضاهای هیلبرت $\mathbb{R}$و $\mathbb{R}^2$ رادرنظربگیرید.تعریف کنید:

$$T: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad T(x, y) = x + y.$$

ماتریس نمایش T درپایه های استانداردαو βبه صورت زیر می باشد:

$$[T]_{\alpha,\beta} = A = [1,1].$$

دراین صورت، شبه معکوس ماتریسA یعنی $A^\dagger$به صورت زیراست:

$$A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

قضیه ۳۸.۱.۱. [۴] فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. عملگر T دارای عملگر شبه معکوس $T^\dagger$ است اگروتنهااگر $T(\mathcal{H})$ بسته باشد.

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنید E یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اگر هر $x \in \mathcal{H}$ به صورت $x = y + z$ تعریف شود به طوری که که $y \in E$ و $Z \in E^\perp$، آنگاه عملگر P روی $\mathcal{H}$ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Px = y,$$

عملگر تصویری نامیده می شود و آن را با P نمایش می دهند. به عبارت دیگر عملگر P را تصویری نامند، هر گاه

$$kerP = Ran(P)^\perp.$$

تعریف ۴۰.۱.۱. عملگر $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ خودتوان نامیده می شود، هر گاه $P^2 = P$.

قضیه ۴۱.۱.۱. [۱۲] P یک عملگر تصویر است اگروتنهااگر $P = P^2 = P^*$.

قضیه ۴۲.۱.۱. فرض کنید $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $P \neq o$ و خودتوان باشند. گزاره های زیر معادلند:

۱. P عملگر تصویر است،

۲. $\|P\| = 1$.

تعریف ۴۳.۱.۱. عملگر T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ فشرده نامیده می شود، هر گاه برای هر دنباله کراندار (x_n) در $\mathcal{H}$، دنباله (Tx_n) شامل یک زیر دنباله همگرا باشد.

مثال ۴۴.۱.۱. اگر E زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه عملگر تصویری P یک عملگر فشرده می باشد.

تعریف ۴۵.۱.۱. فرض کنید $\{v_j\}_{j\in J}$ یک زیر مجموعه از زیر فضاهای بسته فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دنباله $\{P_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, v_j)\}_{j\in J}$ یک سیستم از شبه تصویرهای کراندار نامیده می شود، هرگاه ثابت مثبت B چنان موجود باشد که،

$1.\ \sum_{j\in J}\|P_j f\|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H},$

$2.\ \sum_{j\in J} P_j = I,$ در توپولوژی عملگر قوی.

این سیستم خود الحاق و سازگار با تصاویر متعارف می باشد، هرگاه

$1.\ P_j = P_j^*, \qquad \forall j \in J,$

$2.\ P_j o \pi_{v_j} = P_j, \quad \forall j \in J\,.$

تعریف ۴۶.۱.۱. دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ متعامدیکه نامیده می شود، هرگاه

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} o, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

گزاره ۴۷.۱.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک دنباله متعامدیکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

1. $\overline{Span}\{e_j\}_{j\in J} = \mathcal{H},$
2. $\|x\|^2 = \sum_{j\in J}|\langle x, e_j\rangle|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$
3. $x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle\, e_j, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$

تعریف ۴۸.۱.۱. دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه نامیده می شود، هر گاه در شرایط گزاره قبل صدق کند.

مثال ۴۹.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H} = L^2[-\pi,\pi]$. تعریف می کنیم:

$$f_n = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{N},$$

در این صورت دنباله، $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_n\right\}_{j\in J}$، یک پایه متعامدیکه است.

۲.۱ قاب ها

در این بخش به معرفی قاب ها که به عنوان تعمیم هایی از پایه های متعامدیکه درفضاهای هیلبرت محسوب می شوند خواهیم پرداخت. در سرتاسر این بخش $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و I ، J مجموعه های اندیس گذار شمارایی می باشند.

تعریف ۱.۲.۱. دنباله شمارش پذیر $\{f_j\}_{j\in J}$ از عناصر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ نامیده می شود، هرگاه دو ثابت مثبت A و B چنان موجود باشند، به طوری که $o < A \le B < \infty$ و

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

A و B به ترتیب کران های پایین و بالای قاب نامیده می شوندکه لزوماً یکتا نیستند.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ و $\{e_j\}_{j=1}^{2}$ یک پایه متعامد یکه استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ باشد و $f_1 = e_1$ ، $f_2 = e_1 - e_2$ ، $f_3 = e_1 + e_2$. در این صورت دنباله $\{f_j\}_{j=1}^{3}$ تشکیل یک قاب برای $\mathbb{R}^2$ می دهد، زیرا:

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 = \alpha^2 + o + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha^2 + 2\beta^2, \qquad \forall f = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

از طرفی داریم:

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 \le 3\alpha^2 + 2\beta^2 \le 3\alpha^2 + 3\beta^2.$$

در نتیجه،

$$2(\alpha^2 + \beta^2) \le 3\alpha^2 + 2\beta^2 \le 3(\alpha^2 + \beta^2).$$

بنابراین،

$$2\|f\|^2 \le \sum_{j=1}^{3}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 \le 3\|f\|^2.$$

بنابراین $\{f_j\}_{j=1}^{3}$ یک قاب باکران های $A=2$ و $B=3$ می باشد.

تعریف ۳.۲.۱. دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب کیپ برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می شود، هرگاه $A=B$.به عبارت دیگر،

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 = A\|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$. در این صورت،

$$\left\{f_1 = (1, o), f_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), f_3 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\},$$

یک قاب کیپ برای $\mathbb{R}^2$ است، زیرا:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 &= \alpha^2 + o + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{3}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{3}{4}\beta^2 \\ &= \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= \frac{3}{4}\|f\|^2, \quad \forall f = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2, \quad \forall f = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

بنابراین دنباله $\{f_j\}_{j=1}^{3}$ یک قاب کیپ با کران $A = \frac{3}{2}$ است.

تعریف ۵.۲.۱. دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب پارسوال برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می شود، هرگاه $A=B=1$. به عبارت دیگر،

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f, f_j\rangle\right|^2 = \|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، در این صورت

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f, e_j\rangle\right|^2 = \|f\|^2.$$

بنابراین، هر پایه متعامدیکه یک قاب پارسوال است.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت دنباله

$$\{f_j\}_{j\in J} = \left\{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots\right\},$$

تشکیل یک قاب پارسوال برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می دهد، زیرا:

$\{f_j\}_{j\in J}$ دنباله ای است که در آن هر بردار $\frac{e_l}{\sqrt{l}}$، l بار تکرار می شود. در نتیجه،

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f,f_j\rangle\right|^2=\sum_{j\in J} l\left|\langle f,\frac{e_l}{\sqrt{l}}\rangle\right|^2=\|f\|^2,\qquad \forall f\in\mathcal{H}.$$

بنابراین دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب پارسوال با کران $A=1$ است.

تعریف ۸.۲.۱. دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب‌دقیق نامیده می شود، هرگاه با حذف هر یک از عناصرش قاب باقی نماند.

تعریف ۹.۲.۱. دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله‌قاب نامیده می شود، هرگاه یک قاب برای $\overline{Span}\{f_j\}_{j\in J}$ باشد.

ملاحظه ۱۰.۲.۱. تعریف بالا نشان می دهدکه اگر دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه

$$\overline{Span}\{f_j\}_{j\in J}=\mathcal{H}.$$

مثال ۱۱.۲.۱. فرض کنید دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اگر $k\subseteq J$ (زیر مجموعه ی سره) باشد، آنگاه $\{e_j\}_{j\in k}$ درفضای هیلبرت $\mathcal{H}$ کامل نیست، بنابراین نمی تواند قاب باشد. امادنباله $\{e_j\}_{j\in k}$ یک قاب برای $\overline{Span}\{e_j\}_{j\in k}$ است. بنابراین $\{e_j\}_{j\in k}$ یک دنباله قاب است.

قضیه ۱۲.۲.۱. [۴] فرض کنید دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باکران های A و B باشد. همچنین فرض کنید P تصویر متعامدیکه روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت $\{Pf_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای $P(\mathcal{H})$ با کران های A و B است.

تعریف ۱۳.۲.۱. دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ از عناصر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک دنباله بسل با کران بسل B برای $\mathcal{H}$ نامیده می شود، هر گاه ثابت مثبت B چنان موجود باشد، به طوری که ،

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f,f_j\rangle\right|^2\le B\|f\|^2,\qquad \forall f\in\mathcal{H}.$$

مثال ۱۴.۲.۱. فرض کنید دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، در این صورت دنباله $\left\{\frac{e_j}{j}\right\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل با کران بسل $B=\frac{\pi^2}{6}$ است. زیرا به ازای هر $f\in\mathcal{H}$،

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f,\frac{e_j}{j}\rangle\right|^2=\sum_{j\in J}\frac{1}{j^2}\left|\langle f,e_j\rangle\right|^2\le\sum_{j\in J}\frac{1}{j^2}\|f\|^2\|e_j\|^2=\sum_{j\in J}\frac{1}{j^2}\|f\|^2=\frac{\pi^2}{6}\|f\|^2.$$

مثال ۱۵.۲.۱. فرض کنید دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، تعریف می کنیم:

$$f_j = e_j + e_{j+1}, \qquad \forall j \in J.$$

در این صورت $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل است اما قاب نیست، زیرا:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\left|\langle f, e_j + e_{j+1}\rangle\right|^2 &= \sum_{j\in J}\left|\langle f, e_j\rangle + \langle f, e_{j+1}\rangle\right|^2 \\ &\leq \sum_{j\in J}\left(\left|\langle f, e_j\rangle\right| + \left|\langle f, e_{j+1}\rangle\right|\right)^2 \\ &\leq 2\sum_{j\in J}\left|\langle f, e_j\rangle\right|^2 + 2\sum_{j\in J}\left|\langle f, e_{j+1}\rangle\right|^2 \\ &\leq 4\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

نامساوی دوم از رابطه ی $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ نتیجه شده است.

حال تعریف می کنیم:

$$a_k := \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\, e_{n,} \qquad \forall K\in J.$$

درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\|a_k\|^2 = \langle a_k, a_k\rangle &= \langle \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}e_n\, , \sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}e_m\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}(-1)^{n+1}\,(-1)^{m+1}\langle e_n, e_m\rangle = k\,.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\frac{1}{k}\|a_k\|^2 = 1. \qquad (1)$$

همچنین داریم:

$$
\begin{aligned}
\langle a_k, f_j \rangle &= \langle \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} e_n \,, e_j + e_j + 1 \rangle \\
&= \langle \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} e_n \,, e_j \rangle + \langle \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} e_n \,, e_j + 1 \rangle.
\end{aligned}
$$

قرارمی دهیم:

$$
\begin{cases}
o & k > j, \\
(-1)^{k+1} & k = j, \\
o & k < j.
\end{cases}
$$

درنتیجه،

$$
\left| \langle a_j, f_j \rangle \right|^2 = \left| (-1)^{j+1} \right|^2 = 1.
$$

حال بنابه فرض خلف ورابطه(۱)داریم:

$$
\frac{1}{k} \| a_k \|^2 = \sum_{j \in J} \left| \langle a_K, f_j \rangle \right|^2 \geq A \, \| a_k \|^2 \ .
$$

درنتیجه،

$$
A \| a_k \|^2 \leq \frac{1}{k} \| a_k \|^2 \Rightarrow kA \leq 1.
$$

نامساوی بالا زمانی برقراراست که $A = o$ باشدواین تناقض است زیرا کران هیچ وقت نمی تواند صفرباشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید $\{e_j\}_{j \in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و $U: \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ یک عملگر خطی، کراندار و دو سویی باشد. در این صورت دنباله $\{f_j\}_{j \in J} = \{Ue_j\}_{j \in J}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است.

قضیه ۱.۲.۱۷. [۴] اگر $\{f_j\}_{j \in J}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\{f_j\}_{j \in J}$ یک دنباله بسل است. علاوه براین دنباله یکتایی چون $\{g_j\}_{j \in J}$ در $\mathcal{H}$ وجود دارد، به طوری که،

$$
f = \sum_{j \in J} \langle f, g_j \rangle f_j, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.
$$