بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم– گروه ریاضی

کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر جابجایی)

کوهمولوژی موضعی روی محمل غیربسته تعریف شده نسبت به یک زوج ایده‌آل

پژوهشگر

سمیرا عبّاسی هولاسور

استاد راهنما

دکتر محرم آقاپور نهر

استاد مشاور

دکتر ولی‌ا... خلیلی

تابستان ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا تعمیمی از مفهوم مدول کوهمولوژی موضعی که آن را مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج ایده‌آل (I, J) می نامیم را مطرح می‌کنیم سپس ویژگی‌های مختلف آن‌را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه برخی از قضایای صفر شدن و صفر نشدن را برای این مدل تعمیم یافته از کوهمولوژی موضعی ارائه می‌دهیم، سپس به بررسی ارتباط بین مدول کوهمولوژی موضعی معمولی و مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج ایده‌آل می‌پردازیم. در پایان، آخرین مدول کوهمولوژی موضعی $H_{I,J}^{dimM}(M)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برخی نتایج در مورد ایده‌آل‌های اول چسبیده از مدول کوهمولوژی موضعی $H_{I,J}^{dimM}(M)$ را به‌دست می آوریم.

هم‌چنین نشان می‌دهیم که مدول خارج قسمتی L از M موجود است، به‌طوری‌که

$$H_{I,J}^{dimM}(M) \cong H_{I}^{dimM}(L)$$

سپس تعمیمی از قضیه‌ی صفر شدن لیختن‌بام—هارتشورن را برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی از یک مدول با تولید متناهی نسبت به یک زوج ایده‌آل را ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:

ایده‌آل‌های اول چسبیده، مدول کوهمولوژی موضعی، آخرین مدول کوهمولوژی موضعی، همبافت چک، صفر شدن و صفر نشدن.

نمادگذاری

در سراسر این رساله R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و نوتری می باشد، مگر این‌که در جایی غیر از آن ذکر شود.

از نمادهای $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ به ترتیب برای نمایش دادن اعداد طبیعی و اعداد صحیح نامنفی استفاده خواهیم کرد.

هم چنین فرض کنیم $Max(R)$، $Spec(R)$، $Min(R)$، $Min(I)$، $Ass_R(M)$ و $Att_R(M)$ به ترتیب مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول R، مجموعه ی ایده‌آل‌های اول مینیمال R، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل I، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی R–مدول M و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول متصل به R–مدول M باشند.

پیشگفتار

نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی ابزاری ضروری و معتبر در جبر جابجایی و هندسه‌ی جبری می‌باشد.

در این پایان‌نامه تعمیمی از مفهوم کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج ایده‌آل را مطرح می‌کنیم و ویژگی‌های مختلف آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و جابجایی و I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند، زیر مجموعه‌ی

$$W(I,J)=\{\mathfrak{p}\in Spec(R)\mid \exists n \quad s.t \quad I^n\subseteq \mathfrak{p}+J\}$$

از ایده‌آل‌های اول R را در نظر می‌گیریم. (تعریف ۱.۲.۲ و قسمت (۱) نتیجه‌ی ۴.۲.۲ را ببینید.) $W(I,J)$ تحت تخصیص بسته است اما در کل زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از $Spec(R)$ نیست.

برای R–مدول M، زیر مدول (I,J)–تابدار $\Gamma_{I,J}(M)$ از M را در نظر می‌گیریم که شامل همه‌ی عناصری از M مانند x می‌باشد که $Supp(Rx)\subseteq W(I,J)$.

علاوه بر این برای عدد صحیح i، i–امین فانکتور کوهمولوژی موضعی $H^i_{I,J}$ نسبت به (I,J) در واقع i–امین فانکتور مشتق شده‌ی راست از $\Gamma_{I,J}$ می‌باشد.

$H^i_{I,J}(M)$ را i–امین مدول کوهمولوژی موضعی از M نسبت به (I,J) می‌نامیم. (به تعریف ۱.۱.۲ و ۶.۱.۲ مراجعه کنید.)

توجه داشته باشید که اگر $J=0$ آنگاه $H^i_{I,J}$ با فانکتور کوهمولوژی موضعی معمولی H^i_I برابر خواهد شد.

ساختار سازمان یافته‌ی این پایان‌نامه به شرح زیر است:

در فصل اول به بیان تعاریف و قضایای اولیه از جبر جابجایی و جبر همولوژی و مقدماتی از جبر کوهمولوژی موضعی معمولی که در این پایان‌نامه مورد نیازند، می‌پردازیم.

در فصل دوم به بیان ویژگی‌های اساسی فانکتورهای کوهمولوژی موضعی $H^i_{I,J}$ و زیر مجموعه‌ی

از $W(I,J)$ از $Spec(R)$ می‌پردازیم.

در فصل سوم تعمیمی از همبافت چک‌ها را ارائه می‌دهیم. در حقیقت نشان می‌دهیم که مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به (I,J)، همچون همولوژی‌ها از تعمیم همبافت چک‌ها به‌دست آمده‌اند.

در فصل چهارم برخی از روابط بین فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج ایده‌آل و فانکتور کوهمولوژی موضعی معمولی را مطرح می‌کنیم.

در فصل پنجم که در واقع قسمت اصلی این مقاله می‌باشد به بحث پیرامون صفر شدن و صفر نشدن $H^i_{I,J}$ می‌پردازیم. به‌عنوان یکی از قضایای اصلی این بخش نشان می‌دهیم که برای R–مدول با تولید متناهی M تساوی

$$inf\{\ i \ \mid \ H^i_{I,J}(M) \neq 0 \ \} = inf\{depthM_{\mathfrak{p}} \ \mid \ \mathfrak{p} \in W(I,J) \ \}$$

برقرار است. همچنین در قضیه‌ی (۹.۱.۵) یک نوع تعمیم از قضیه‌ی لیختن‌بام–هارتشورن را ارائه می‌دهیم.

در فصل ششم به بحث پیرامون آخرین مدول کوهمولوژی موضعی $H^{dimM}_{I,J}(M)$ می‌پردازیم. در این فصل ابتدا برخی نتایج در مورد ایده‌آل اول چسبیده از $H^{dimM}_{I,J}(M)$ را بیان می‌کنیم سپس به‌عنوان یک نتیجه ثابت می‌کنیم که اگر $H^{dimM}_{I,J}(M) \neq 0$ آنگاه مدول خارج قسمتی L از M موجود است، به‌طوری‌که $H^{dimM}_{I,J}(M) \cong H^{dimM}_{I}(L)$. هم‌چنین یک نوع تعمیم از قضیه‌ی صفر شدن لیختن‌بام–هارتشورن برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی از یک مدول با تولید متناهی را نسبت به یک زوج ایده‌آل ارائه می‌دهیم.

در پایان نشان می‌دهیم که $H^{dimM}_{I,J}(M)$ خارج قسمتی از $H^{dimM}_{\mathfrak{m},J}(M)$ است، که این مطلب در واقع تعمیمی از نتیجه‌ی هارتشورن [۱۰] می‌باشد.

در تدوین این پایان نامه از مقالات زیر استفاده شده است:

1) R. Takahashi, Y. Yoshino, T. Yoshizawa, *Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals*, J. Pure Appl. Algebra. 213 (2009), 582-600.

2) Lizhong Chu, *Top local cohomology modules with respect to a pair of ideals*, Proc.

Amer. Math. Soc, 139 (2010), 777-782.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

این فصل مشتمل بر دو بخش است. بخش اول را به تعاریف و قضایای اولیه از جبر جابجایی و جبر همولوژی که در این پایان نامه مورد نیازند، اختصاص می‌دهیم و در بخش دوم به مقدماتی از جبر کوهمولوژی موضعی معمولی می‌پردازیم.

۱.۱ مقدماتی از جبر جابجایی و جبر همولوژی

۱.۱.۱ تعریف.

فرض کنید M، R–مدولی دلخواه باشد. مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر M را با نماد $Z(M)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت

$$Z(M) := \{r \in R \ \mid \ \exists m \in M \ \ , \ \ m \neq \circ \ \ , \ rm = \circ\}.$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنید N، R–زیر مدولی از M و I ایده‌آلی از R باشد، تعریف می‌کنیم:

$$(N{:}_M I) := \{m \in M \mid \ Im \subseteq N \ \}.$$

$(N :_M I)$، R–زیرمدول M و شامل N می‌باشد.

۳.۱.۱ تعریف.

منظور از پوچساز R–مدول M، $(\circ :_R M)$ است که آن را با $Ann_R(M)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ann_R(M) := \{r \in R \mid \ \forall m \in M \quad rm = \circ\}.$$

۴.۱.۱ قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول.

فرض کنید $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$، $(n \geq 2)$، ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند که حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند. هم‌چنین فرض کنید S زیر گروهی جمعی از R باشد که نسبت به ضرب بسته است، دراین صورت اگر $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ باشد، آنگاه iی موجود است که $1 \leq i \leq n$ و $S \subseteq \mathfrak{p}_i$.

برهان: به[۱۸؛ قضیه‌ی (۶۱.۳)] مراجعه شود. □

۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. تعریف می‌کنیم:

$$r(I) := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ که به طوری باشد موجود } n \in \mathbb{N} \text{ چون عددی}\}$$

$r(I)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R است که شامل I می‌باشد. این ایده‌آل را رادیکال ایده‌آل R می‌نامیم. به‌ویژه ایده‌آل $r(\circ)$ را رادیکال پوچ R می‌نامیم وباعلامت $\mathfrak{n}_R$ نمایش می‌دهیم.

۶.۱.۱ قضیه.

فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه ی جابجایی R باشد، در این‌صورت

$$r(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Min(I)} \mathfrak{p}$$

برهان: به[۱۸؛ لم (۴۸.۳)] مراجعه شود. □

۷.۱.۱ قضیه.

فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند، گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) $I \subseteq r(I)$.

۲) $r(r(I)) = r(I)$.

۳) $r(IJ) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$.

۴) $r(I + J) = r(r(I) + r(J))$.

۵) $r(I) = R \Longleftrightarrow I = R$.

٦) $r(I^n) = r(I)$.

۷) اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی اول باشد، آنگاه $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$.

برهان: به[۱٦؛ تمرین (۳)] مراجعه شود. □

۸.۱.۱ قضیه.

اگر R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی دلخواه از R باشد، آنگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $(r(I))^n \subseteq I$.

برهان: به[۱۸؛ قضیه‌ی (۲۱.۸)] مراجعه شود. □

۹.۱.۱ لم.

فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی باشد و I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند در این‌صورت:

$$IJ = JI \subseteq I \cap J$$

برهان: به[۱۸؛ تبصره‌ی (۲۸.۲)] مراجعه شود. □

۱۰.۱.۱ تعریف.

فرض کنید R یک حلقه و E زیر مجموعه‌ای از R باشد. تعریف می‌کنیم:

$$V(E) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \ \mid \ E \subseteq \mathfrak{p}\}$$

اگر ایده‌آل I از R توسط زیرمجموعه‌ی E از R تولید شود آنگاه $V(E) = V(I)$. به سادگی ثابت می شود $V(0) = Spec(R)$ و $V(R) = V(1) = \emptyset$. اگر $\{E_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد آنگاه $V(\bigcup_{i \in I} E_i) = V(\sum_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$. هم‌چنین اگر I و J دو ایده‌آل از R باشند آنگاه $V(I) = V(r(I))$ و $V(I \bigcap J) = V(IJ) = V(I) \bigcup V(J)$.

۱۱.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی باشد و $\mathfrak{Q}$ ایده‌آل سره‌ای از R باشد، شرایط زیر هم‌ارزند:

۱) $\mathfrak{Q}$ ایده‌آل $\mathfrak{m}$−اولیه است.

۲) $r(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{m}$.

۳) $\exists n \in \mathbb{N}$ به طوری که $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{Q}$.

۴) $V(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{m}$.

برهان: به[۱۸؛ تمرین (۱۷.۱۵)] مراجعه شود. □

۱۲.۱.۱ قضیه و تعریف.

فرض کنید N زیر مدول سره‌ای از M باشد، تجزیه‌ی اولیه‌ی N عبارت است از اشتراک تعداد متناهی از زیرمدول‌های اولیه‌ی M که برابر N باشد:

$$N = N_۱ \cap \cdots \cap N_n \quad ; \quad r(\circ :_R M/N_i) = \mathfrak{p}_i$$

این تجزیه را تجزیه‌ی اولیه‌ی مینیمال گوئیم اگر

۱) $\mathfrak{p}_۱, \cdots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اول متمایز باشند.

۲) به‌ازای هر عدد طبیعی j که $۱ \leq j \leq n$ داشته باشیم $\bigcap_{i \neq j} N_i \nsubseteq N_j$

ومی‌گوئیم N تجزیه پذیر است اگر تجزیه‌ای اولیه داشته باشد.

شایان ذکر است که مجموعه‌ی $\mathfrak{p}_۱, ..., \mathfrak{p}_n$ از هر تجزیه‌ی اولیه‌ی مینیمال N مستقل است واگر $N = N_۱ \cap \cdots \cap N_n$ به طوری که $r(\circ :_R M/N_i) = \mathfrak{p}_i$ یک تجزیه‌ی اولیه ی مینیمال برای زیر مدول صفر باشد مجموعه‌ی $\mathfrak{p}_۱, \cdots, \mathfrak{p}_n$ را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی M می‌نامیم و آن را با نماد $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ دراین‌صورت $\mathfrak{p} \in Ass_R M$ اگروتنهااگر عضوی از M مانند x موجود باشد که $\mathfrak{p} = (\circ :_R x)$. لذا اگر $\mathfrak{p} \in Ass_R M$ آنگاه همریختی یک به یکی مانند $f : R/\mathfrak{p} \longrightarrow M$ موجود است.

برهان: به[۱۸؛ قضیه‌ی (۱۸.۴) و(۱۷.۴)] مراجعه شود. □

۱۳.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اوّلی‌از R و $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل‌هایی دلخواه از R باشند. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) iی موجود است که $1 \leq i \leq n$ و $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۲) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۳) $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

برهان: به[۱۸؛ لم (۵۵.۳)] مراجعه شود. □

۱۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M، R–مدول و R حلقه‌ای نوتری باشد دراین‌صورت $Ass_R(M) \neq \emptyset$ اگروتنهااگر $M \neq 0$.

برهان: به[۱۸؛ نتیجه‌ی (۳۵.۹)] مراجعه شود. □

۱۵.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M، R–مدولی ناصفر و R حلقه‌ای نوتری باشد دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) هر عضو ماکسیمال از مجموعه‌ی $\{(0 :_R x) \mid 0 \neq x \in M\}$ یک ایده‌آل اوّل وابسته به M است و به‌خصوص $Ass_R(M) \neq \emptyset$.

۲) $Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p}$.

برهان : به[۱۸؛ نتیجه‌ی (۳۶.۹)] مراجعه شود. □

۱۶.۱.۱ قضیه.

اگر $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ رشته‌ای دقیق از R–مدول‌ها وR–همریختی‌ها باشد، آنگاه

$$Ass_R(M) \subseteq Ass_R(N) \subseteq Ass_R(M) \cup Ass_R(L)$$

برهان: به[۱۵؛ قضیه‌ی (۶.۳)] مراجعه شود. □

۱۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنید M یک R–مدول باشد. مقصود از محمل M، مجموعه‌ی

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) \ \mid \ M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

است. این مجموعه را با $Supp_R(M)$ (و یا $Supp(M)$) نشان می‌دهیم.

۱۸.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R–مدول باشد. دراین‌صورت $Supp_R(M) = \emptyset$ اگروتنهااگر $M = 0$.

برهان : به [۱۸؛ لم (۱۵.۹)] مراجعه شود. □

۱۹.۱.۱ لم ناکایاما.

فرض کنید M یک R–مدول متناهی مولد، I ایده‌آلی از R و $I \subseteq Jac(R)$ به‌طوری‌که $IM = M$ در این‌صورت $M = 0$.

برهان: به [۱۸؛ لم (۲۴.۸)] مراجعه شود. □

۲۰.۱.۱ لم.

فرض کنید M یک R–مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد، در این‌صورت $\mathfrak{a}M = M$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{a} + Ann_R M = R$.

برهان: به راحتی با عضوگیری نتیجه می شود. □

۲۱.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق و کوتاهی از R–مدول ها و R–همریختی ها باشد در این‌صورت

$$Supp_R(N) = Supp_R(L) \bigcup Supp_R(M)$$

برهان: به [۲ ؛ فصل ۲ بخش ۴] مراجعه شود. □

۲۲.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R–مدول متناهی مولد باشد. دراین‌صورت:

۱) $Supp_R(M) = V(Ann_R(M))$.

۲) $Supp_R(M/IM) = V(I + Ann_R(M))$.

برهان: به[۲؛ فصل (۲) (۱۷.۴)] مراجعه شود. قسمت (۲) از قسمت (۱) نتیجه می‌شود. □

۲۳.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R−مدول باشد، دراین‌صورت

۱) اگر M متناهی‌مولد باشد، آنگاه $Ass_R(M)$ مجموعه‌ای متناهی است.

۲) $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$.

۳) مجموعه عناصر مینیمال مجموعه‌های $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ با هم مساویند.

برهان: به[۱۵؛ قضیه‌ی (۵.٦)] مراجعه شود. □

۲۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R−مدول و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $I \subseteq Ann_R(M)$. در این‌صورت M ساختار R/I−مدولی دارد. به‌علاوه زیرمجموعه‌ای از M، R−زیرمدول است اگروتنهااگر R/I−زیرمدول باشد.

برهان: به [۱۸؛ قضیه‌ی (۱۹.٦)] مراجعه شود. □

۲۵.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R−مدول باشد، دراین‌صورت M یک R−مدول نوتری است اگروتنهااگر هر زیرمدول M متناهی مولد باشد.

برهان: به[۱۸؛ لم (۱۳.۷)] مراجعه شود. □

۲٦.۱.۱ تعریف.

بلندی ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را با $ht(\mathfrak{p})$ و یا $ht_R(\mathfrak{p})$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$ht(\mathfrak{p}) = \sup\{n \in \mathbb{N}_\circ \mid$ زنجیری اکید از ایده‌آل‌های اول R به طول n مختوم به $\mathfrak{p}$ موجود باشد $\}$

و $ht(\mathfrak{p}) = \infty$، اگر سوپریمم موجود نباشد.

همچنین بعد حلقه‌ی R را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dimR = sup\{\ ht_R\mathfrak{p}\ \mid\ \mathfrak{p} \in Spec(R)\ \}$$

و $dimR = \infty$، اگر سوپریمم موجود نباشد.

۲۷.۱.۱ تعریف.

بعد R–مدول M را با dim_RM $(dimM)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$dim_RM = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid$ زنجیری اکید به طول n از عناصرمحمل M موجود باشد $\}$

و $dim_RM = \infty$، اگر سوپریمم موجود نباشد.

اگر $M = 0$ آنگاه بنابر قرارداد می‌نویسیم $dim_RM = -1$.

۲۸.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی باشد در این‌صورت $dimR$، حداقل تعداد عناصری از R است که برای تولید یک ایده‌آل $\mathfrak{m}$–اولیه مورد نیازند. به عبارت دیگر

$$dimR = min\{\ i \in \mathbb{N}_0\ :\ \exists a_1, \cdots, a_i \in R\ \ s.t\ \ r(\sum_{j=1}^{i} Ra_j) = \mathfrak{m}\ \}.$$

برهان: به[۱۸؛ نتیجه‌ی (۱۸.۱۵)] مراجعه شود. □

۲۹.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق از R–مدول‌ها وR–همریختی‌ها باشد، به‌طوری‌که $dim_RM < \infty$. دراین‌صورت

$$dim_RN = max\{dim_RL, dim_RM\}$$

برهان: با توجه به قضیه‌ی (۲۱.۱.۱) حکم به‌راحتی به‌دست می آید. □

۳۰.۱.۱ قضیه.

اگرM یک R–مدول متناهی مولد باشد، آنگاه $dim_RM = dim_R\ R/Ann_R(M)$.

برهان: با توجه به قضیه‌ی (۲۲.۱.۱) قسمت (۱))، حکم به‌راحتی به‌دست می آید. □

۳۱.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد و $M\neq 0$ یک R−مدول متناهی مولد باشد و $x\in \mathfrak{m}\setminus Z(M)$، در این‌صورت $dim_R M/xM = dim_R M - 1$.

برهان: به [۱۵؛ فصل ٦، لم ۵] مراجعه شود. □

۳۲.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل از R و M یک R−مدول متناهی‌مولد باشد دراین‌صورت:

۱) $dim_R R/I = dim_R R/r(I)$.

۲) $r(Ann_R(M/IM)) = r(Ann_R(M)+I)$.

برهان: برهان (۱) واضح است و برای اثبات (۲) به [۱۵ ؛ قضیه‌ی (۲.۲)] مراجعه شود. □

۳۳.۱.۱ لم.

فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند، شرایط زیر هم‌ارزند:

۱) $dim_R R/I = dim_R R/J$.

۲) $r(I) = r(J)$.

برهان: با توجه به قضیه‌ی (۲۸.۱.۱) و (۳۲.۱.۱)، حکم به‌راحتی به‌دست می‌آید. □

۳۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنید M یک R−مدول و I ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت:

$R/I\otimes_R M \cong M/IM$. به ویژه $R\otimes_R M\cong M$.

برهان: به [۱۱؛ قضیه‌ی (۷.۵)] مراجعه شود. □

۳۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و N یک R−مدول باشد. گوئیم N یک R−مدول یکدست است هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق و کوتاه

$\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها، رشته‌ی

$$\circ \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد.

هم‌چنین گوئیم N یک R–مدول یکدست باوفاست هرگاه یکدست بوده و برای هر R–مدول ناصفر M، $M \otimes_R N$ ناصفر باشد.

۳۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنید $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ای باشد گوئیم f همریختی یکدست (یکدست باوفا) است هرگاه R' به عنوان R–مدول یکدست (یکدست باوفا) باشد.

۳۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنید $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ای باشد دراین‌صورت R' با ضرب اسکالر القاء شده توسط همریختی f، ساختار R–مدولی دارد. دراین حالت R' را یک R–جبر می‌نامیم.

۳۸.۱.۱ قضیه.

اگر M یک R–مدول، I ایده‌آلی از R و S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. آنگاه:

۱) $S^{-1}I = S^{-1}R$ اگروتنهااگر $S \bigcap I \neq \emptyset$.

۲) $S^{-1}R = \circ$ اگروتنهااگر $\circ \in S$.

برهان: برای قسمت (۱) به [۱۸؛ لم (۳۱.۵) قسمت (۵)] و برای برهان (۲) به [۱۸ ؛ تبصره‌ی (۴.۵) قسمت (۳)] مراجعه شود. □

۳۹.۱.۱ قضیه‌ی اول یکریختی.

فرض کنید N, M دو R–مدول باشند و $f : M \longrightarrow N$ یک R–همریختی باشد، دراین‌صورت $M/kerf \cong_R Imf$ و به ویژه اگر f یک R–بروریختی باشد آنگاه $M/kerf \cong_R N$.

برهان: به [۱۸؛ قضیه‌ی (۳۳.۶)] مراجعه شود. □

۴۰.۱.۱ قضیه‌ی القائی.

فرض کنید M و M' دو R−مدول و $f : M \longrightarrow M'$ یک R−همریختی باشد و فرض کنید N زیر مدول M و N' زیر مدول M' و $f(N) \subseteq N'$. دراین‌صورت همریختی القائی $f^* : M/N \longrightarrow M'/N'$ با ضابطه‌ی $f^*(x+N) = f(x) + N'$ (برای هر $x \in M$)، به‌دست می‌آید که

۱) اگر f پوشا باشد آنگاه f^* پوشاست.

۲) اگر $f^{-1}(N') = N$ آنگاه f^* یک به یک است.

برهان: به‌راحتی اثبات می شود. □

۴۱.۱.۱ قضیه.

فرض کنید R نوتری و M یک R−مدول متناهی مولد ناصفر باشد، در این‌صورت زنجیر اکید

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

از زیر مدول های M موجود است به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.

برهان: به [۱۵؛ قضیه‌ی (۴.۶)] مراجعه شود. □

۴۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنید N زیر مدول ناصفر M باشد. گوئیم M یک توسیع اساسی از N است (N یک زیرمدول اساسی M است) درصورتی‌که برای هر زیرمدول ناصفر M مانند L، $L \bigcap N \neq 0$ باشد. (مطلب اخیرمعادل با این است که برای هر عضو ناصفر $m \in M$، $r \in R$ ی موجود است به‌طوری‌که $0 \neq rm \in N$).

فرض کنیم R−مدول انژکتیو M توسیع اساسی N باشد دراین‌صورت گوئیم M پوش انژکتیو N است و آن را با $E(N)$ نشان می‌دهیم. برای اطلاعات بیشتر به [۱۹؛ صفحه‌ی ۴۰] مراجعه کنید.