



1. 1111

۱۷۶۱۱۰۹۸
۱۸-۱۶



دانشگاه شهید بهشتی کرمان

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی توپر و توخالی ساخته شده
از مواد ایزوتروپیک عرضی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سعیدی

مؤلف:

عماد جمعه زاده

شهریور ۸۷

۱۰۸۸۲۱

۱۳۸۷ / ۱۲ / ۲۷

مجلس شورای اسلامی
گروه مهندسی مکانیک



دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

گروه مکانیک

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: عماد جمعه زاده

استاد راهنما: آقای دکتر علیرضا سعیدی

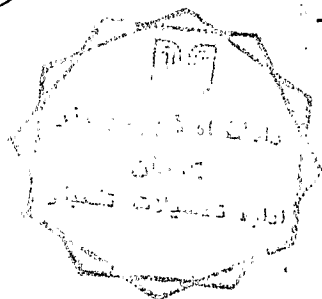
داور ۱: آقای دکتر غلامحسین برادران

داور ۲: آقای دکتر محمد علی حاج عباسی

۱۳۸۷ / ۱۱ / ۲۷

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی یا نماینده دانشکده: آقای دکتر مهران عامری

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه است



(ج)

تقدیم به:

اولین آموزگاران زندگی ام،

پدر و مادرم

به پاس قطره‌ای از دریای بزرگی‌شان.

و تقدیم به:

خواهر و برادرم (زهرا و علی) که همواره با مساعدت و تشویق‌های خود

مرا در امر تحصیل، پشتیبان و یاریگر بوده‌اند.

تشکر و قدردانی:

از دست و زبان که بر آید کز عهده شکرش بدر آید

اتمام و تحریر این پایان نامه را بعد از فضل خدا، مدیون راهنمایی های عالمانه و همکاری بی شائبه استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سعیدی می دانم که همواره با نظرات دقیق و محققانه خود، روشنی بخش راه تحقیقم بوده اند.

همچنین به عنوان دانش آموخته این دانشگاه بر خود واجب می دانم از توجه دلسوزانه اساتید محترم بخش مهندسی مکانیک بخصوص جناب آقای دکتر حاج عباسی، جناب آقای دکتر برادران و جناب آقای دکتر فولادی که همیشه پاسخگوی اینجانب بوده و هستند، تشکر و قدردانی کنم.

از دانشجویان و دوستان عزیز آقایان مهندس سید حسن میرطلایی، رضا واقفی، حجت کوهکن، میثم محمدی، مسعود اسماعیلی، مهدی آخوندی زاده، کیهان شهریاری و امین کیمیایی فر که به هر نوعی اینجانب را مساعدت کرده اند، تشکر و قدردانی می شود.

در این پایان‌نامه، آنالیز ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی توپر و توخالی ساخته شده از مواد ایزوتروپیک عرضی مورد تحلیل قرار گرفته است. ورق قطاعی مورد نظر دارای تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های در جهت محیطی می‌باشد. معادلات حاکمه حرکت با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول بدست آمده و سپس این معادلات وابسته به هم بصورت دو معادله مستقل جدا شده‌اند. معادلات مستقل دارای پاسخ عمومی بر حسب توابع بسل و توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم هستند. با داشتن پاسخ عمومی معادلات و ارضاء شرایط مرزی در لبه(های) در جهت شعاعی، یک دستگاه معادلات همگن برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی حاصل می‌گردد. فرکانس طبیعی بی‌بعد برای مقادیر مختلف زاویه دهانه، نسبت‌های متفاوت ضخامت به شعاع و شعاع داخلی به خارجی و شرایط مرزی گوناگون در جداول آورده شده است. همچنین شکل مودهای مربوط به ورق قطاعی توخالی با زاویه دهانه ۶۰° و ۹۰° برای تمامی شرایط مرزی ممکن در جهت شعاعی ترسیم شده است.

فصل اول: مقدمه و مروری بر کارهای انجام شده

- ۱-۱. مقدمه..... ۲
۲-۱. مروری بر کارهای انجام شده..... ۳

فصل دوم: یافتن معادلات حاکمه ارتعاشات ورق قطاعی

- ۱-۲. مقدمه..... ۸
۲-۲. معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوطه..... ۹
۳-۲. معادلات حاکمه ورق قطاعی..... ۱۴

فصل سوم: جداسازی معادلات حاکمه حرکت ورق قطاعی

- ۱-۳. مقدمه..... ۱۹
۲-۳. بدست آوردن معادلات جدا شده..... ۱۹
۳-۳. تعریف تابع φ ۲۱
۴-۳. حل معادلات..... ۲۳
۱-۴-۳. حالت اول $\omega_n^2 > K^2 \bar{A} / I_3$ ۲۴
۲-۴-۳. حالت دوم $\omega_n^2 < K^2 \bar{A} / I_3$ ۲۶
۵-۳. تحلیل ارتعاشی ورق قطاعی توپر..... ۲۸
۱-۵-۳. حالت اول $I_3 \omega_n^2 - K^2 \bar{A} > 0$ ۲۸
۲-۵-۳. حالت دوم $I_3 \omega_n^2 - K^2 \bar{A} < 0$ ۳۳
۶-۳. بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی ورق قطاعی توپر..... ۳۵
۷-۳. منفرد شدن..... ۳۶
۱-۷-۳. حالت اول $0 < \beta < 1$ و $I_3 \omega^2 - k^2 \bar{A} > 0$ ۳۶
۲-۷-۳. حالت دوم $\beta > 1$ و $I_3 \omega^2 - k^2 \bar{A} > 0$ ۳۷
۸-۳. تحلیل ارتعاشی ورق قطاعی توخالی..... ۳۷

فصل چهارم: نتایج عددی و نتیجه‌گیری

- ۱-۴. مقدمه..... ۴۰
۲-۴. معرفی پارامترهای بی بعد..... ۴۰
۳-۴. بررسی صحت روابط ارائه شده..... ۴۱
۴-۴. پارامترهای عددی..... ۴۱
۵-۴. نتایج عددی ارتعاشات ورق قطاعی توپر ساخته شده از مواد ایزوتروپیک عرضی..... ۴۱

| | | |
|------|---|----|
| ۴-۶. | نتایج عددی ارتعاشات ورق قطاعی توخالی ساخته شده از مواد ایزوتروپیک عرضی..... | ۴۳ |
| ۴-۷. | بحث و نتیجه گیری..... | ۶۹ |
| | مراجع..... | ۷۴ |

فصل اول

مقدمه و مروری بر کارهای انجام شده

۱-۱. مقدمه

امروزه با پیشرفت علوم و تکنولوژی، تقاضا جهت دستیابی به موادی با استحکام بیشتر، وزن و هزینه کمتر افزایش یافته است. از این رو محققین در تلاش هستند که یا مواد قدیمی را بهبود بخشند یا اینکه مواد جدیدتری بسازند. دانشمندان با پیشرفت‌های صورت گرفته و استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی موفق به تولید مواد جدیدی به منظور جایگزینی با مواد سنتی شده‌اند. این مواد که به مواد مرکب^۱ مشهورند در مقایسه با مواد سنتی دارای استحکام بیشتر و وزن کمتر می‌باشند. مهم‌ترین مزیت مواد مرکب آن است که با توجه به نیازها، می‌توان خواص آنها را کنترل کرد. بطور کلی مواد کامپوزیتی دارای مزایای زیر می‌باشند:

- مقاومت مکانیکی نسبت به وزن بالا
- مقاومت در برابر خوردگی بالا
- خصوصیات خستگی بهتر نسبت به فلزات
- پایداری حرارتی بالا نسبت به فلزات
- خواص عایق حرارتی خوب
- عایق‌های صوتی خوب

این خصوصیات باعث شده که استفاده از این مواد در یکی دو دهه گذشته بطور گسترده‌ای در صنایع مختلف از جمله صنایع هواپیما سازی، صنایع خودرو سازی، صنایع کشتی سازی، صنایع پزشکی، صنایع ورزشی و غیره افزایش یابد.

ورق‌ها یکی از مهمترین سازه‌های مهندسی بشمار می‌روند که برای تحمل بار مورد استفاده قرار می‌گیرند. ورق‌ها سازه‌های دو بعدی مهندسی هستند که بعلت وزن کم از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه می‌باشند. بعلت تحمل نیروهای برشی و ممانهای خمشی و پیچشی و همچنین سفتی خمشی^۲ بالا، ورق‌ها در مقایسه با تیرها تحمل بار بیشتری را دارند. بدلیل استفاده زیاد از ورق‌ها در تولید سازه‌ها و ماشین آلات، تحلیل و

^۱ Composite materials

^۲ Bending stiffness

آنالیز آنها یکی از اهداف بسیاری از مهندسين بوده است. با توجه به استفاده از مواد کامپوزیتی در تهیه و ساخت ورق‌ها، تحلیل استاتیکی، دینامیکی و کمانشی ورق‌های کامپوزیتی امری ضروری به نظر می‌رسد. ورق‌های کامپوزیتی از جمله سازه‌هایی هستند که کاربرد وسیعی در مهندسی مکانیک و صنایع مختلف از قبیل هوا و فضا، خودروسازی، نظامی، هسته‌ای و پزشکی دارند. توسعه اینگونه ورق‌ها در زمینه‌های مختلف، مطالعه و بررسی دقیق‌تر رفتار مکانیکی آنها را سبب شده است. با توجه به اینکه استفاده از صفحات دایروی و قطاعی که با مواد کامپوزیتی تقویت شده‌اند دارای کاربردهای عملی فراوانی می‌باشند، در این پایان‌نامه ورق قطاعی^۱ را مورد آنالیز ارتعاشاتی قرار داده‌ایم که دارای لایه‌هایی از جنس ایزوتروپیک عرضی^۲ باشد.

۲-۱. مروری بر کارهای انجام شده

تاریخچه مطالعه ارتعاشات ورق‌ها به دهه هجدهم میلادی برمیگردد. اولین بار اوبلر^۳ [۱] در سال ۱۷۶۶ تحلیل ریاضی را بر روی ارتعاشات ورق‌ها انجام داد. از آن زمان تا به حال تحقیقات زیادی برای تحلیل ارتعاشات ورق‌های مستطیلی و یا گرد متقارن محوری^۴ صورت گرفته است [۲-۸]. اما تحلیل ورق‌های قطاعی بعلت نیاز به استفاده از مختصات قطبی در تحلیشان و همچنین وابسته بودن به جهت محیطی θ ، کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. بعضی مقالات به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌های قطاعی توپر و توخالی بر اساس روش‌های تحلیلی و عددی پرداخته اند که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

هوانگ^۵ و همکارانش [۹] در سال ۱۹۹۳ حل تحلیلی را برای ارتعاشات ورق‌های قطاعی نازک ارائه دادند. در این مقاله، با استفاده از تئوری کلاسیک ورق^۶ معادلات ارتعاشات آزاد ورق قطاعی توپر با استفاده از روش انرژی بدست آمده و پاسخ معادلات بر حسب توابع بسل بسط داده شده است. سپس آنها در سال‌های ۱۹۹۴ و ۱۹۹۵ [۱۰، ۱۱] تحلیل ارتعاشات ورق قطاعی ایزوتروپیک را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول^۷ ارائه

^۱ Sector plate

^۲ Transversely isotropic

^۳ Euler

^۴ Axisymmetric circular plates

^۵ Huang

^۶ Classical plate theory

^۷ First order shear deformation theory

دادند. در این دو مقاله هم ارتعاشات ورق قطاعی توپر در نظر گرفته شده و هم ارتعاشات ورق قطاعی توخالی مورد تحلیل قرار گرفته است. برای اطمینان از صحت فرمول‌ها و روش حل ارائه شده در این پایان‌نامه، نتایج بدست آمده با نتایج موجود در این دو مقاله مقایسه شده است.

لی و لیو^۱ [۱۲] در سال ۱۹۹۹ با استفاده از روش عددی DQM^۲ تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی توخالی نسبتاً ضخیم^۳ را با بکارگیری میدان جابجایی تئوری برشی مرتبه اول بدست آوردند. در این مقاله فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نشیر و همکارانش [۱۳] در سال ۲۰۰۱ تحلیل استاتیکی ورق‌های توپر را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از تابع لایه مرزی توانستند معادلات کوپله ورق را جدا کنند.

ژبنوی وانگ و یونژیانگ وانگ^۴ [۱۴] در سال ۲۰۰۴ با استفاده از فرم جدیدی از روش DQM^۵ تحلیل ارتعاشات ورق‌های قطاعی توپر ایزوتروپیک را ارائه دادند. در این روش حل معادلات با میدان تغییر مکان تئوری کلاسیک با روش عددی حل شده و فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر مختلف زاویه دهانه^۶ آورده شده‌اند. ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی توپر که در جهت شعاعی ارتوتروپیک هستند توسط هوانگ و هو^۷ [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته است. ورق قطاعی در لبه‌های محیطی دارای تکیه‌گاه‌های ساده است و معادلات حاکمه ورق با استفاده از روش فروبنیوس^۸ حل شده‌اند.

کیانگ و ژیان^۹ [۱۶] در سال ۲۰۰۷ با استفاده از روش نوار منحنی المان P^{۱۰} ارتعاشات ورق‌های توپر و توخالی را ارائه داد. در این روش حل برای بیان تابع جابجایی در هر المان از تعدادی توابع شکل ثابت و تعدادی توابع شکل متغیر استفاده شده است. همچنین معادلات حاکمه با استفاده از روش کلاسیک بدست

^۱ Liew and Liu

^۲ Differential quadrature method

^۳ Moderately thick

^۴ Xinwei Wang and Yongliang Wang

^۵ New version of DQM

^۶ Sector angle

^۷ Huang and Ho

^۸ Frobenius method

^۹ Qiang and Jian

^{۱۰} Curve strip Fourier p-element

آمده‌اند. اقدام و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۰۷ یک حل بسته برای تحلیل خمشی ورق‌های قطاعی توخالی نازک دور تا دور گیردار ارائه دادند. شایان ذکر است که حل بسته ارائه شده در این مقاله با روش عددی EKM^۱ بدست آمده است.

تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های قطاعی توخالی ساخته شده از مواد FGM^۲ در سال ۲۰۰۸ توسط نی و زوانگ^۳ [۱۸] با استفاده از روش عددی DQM^۴ مورد بررسی قرار گرفته است. اقدام و محمدی [۱۹] در سال ۲۰۰۸ با استفاده از روش EKM تحلیل استاتیکی ورق‌های قطاعی نسبتاً ضخیم ارتوتروپیک را مورد بررسی قرار دادند.

در این پایان‌نامه تحلیل دقیق ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی توپر و توخالی ساخته شده از لایه‌های ایزوتروپیک عرضی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. ابتدا در فصل دوم با در نظر گرفتن میدان تغییر مکان ثنوری برشی مرتبه اول، معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوطه بدست آمده‌اند. سپس با استفاده از روابط کرنش-تغییر مکان در مختصات قطبی و بدست آوردن ممان‌ها و نیروهای برشی منتهجه و جایگذاری این معادلات در معادلات حرکت، معادلات حاکمه حرکت بدست آمدند. با در نظر گرفتن ورق قطاعی که دارای لایه‌های متقارن ایزوتروپیک عرضی نسبت به صفحه $x-y$ می‌باشد، معادلات کششی و خمشی ورق از یکدیگر جدا شده و ما به تحلیل ارتعاشات خمشی ورق پرداخته‌ایم. معادلات حاکمه حرکت این چنین ورقی، سه معادله کوپل شده بر حسب جابجایی w و توابع چرخش^۵ ψ_r و ψ_θ می‌باشند.

در فصل سوم با انجام یکسری عملیات جبری و مشتق‌گیری، سه معادله کوپل شده حاکمه حرکت تبدیل به دو معادله جدا شده می‌شوند. اولین معادله از معادلات جدا شده، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه چهار بر حسب جابجایی w است و دومین معادله، معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم بر حسب تابع جدید φ است. با در نظر گرفتن تکیه‌گاه‌های ساده برای لبه‌های در جهت محیطی و نوشتن بسط فوریه در جهت

^۱ Extended Kantorovich method

^۲ Functionally graded material

^۳ Nie and Zhang

^۴ Differential quadrature method

^۵ Rotation functions

محیطی θ برای توابع w و φ ، دو معادله پاره‌ای جدا شده تبدیل به دو معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر می‌شوند. این معادلات دارای حل تحلیلی بر حسب توابع بسط و توابع بسط اصلاح شده می‌باشند که با توجه به علامت یکی از ضرایب، می‌توانند تغییر کنند. همچنین چگونگی اعمال شرایط مرزی دلخواه در راستای شعاعی برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی ورق قطاعی توپر و توخالی توضیح داده شده است. نتایج عددی حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق قطاعی گرد توپر و توخالی در فصل چهارم ارائه شده است. این نتایج بصورت فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده برای دوازده مسئله مختلف در جداول این فصل آورده شده است. همچنین شکل موده‌های ورق قطاعی توخالی ساخته شده از مواد ایزوتروپیک عرضی برای تمامی شرایط مرزی ممکن در جهت محیطی در انتهای فصل چهارم آورده شده است.

فصل دوم

یافتن معادلات حاکمه ارتعاشات ورق قطاعی

۱-۲. مقدمه

معمولاً اگر نسبت ضخامت ورق به بعد دیگر ورق (قطر ورق برای ورق‌های دایره‌ای و طول برای ورق‌های مستطیلی) کمتر از یک به بیست باشد، ورق نازک شناخته می‌شود. در حقیقت در عمل بسیاری از ورق‌ها از این معیار تبعیت می‌کنند. برای تحلیل ارتعاشی چنین ورق‌هایی استفاده از تئوری کلاسیک (کیرشهف)^۱ برای بدست آوردن فرکانس طبیعی^۲ اول معقول بنظر می‌رسد هر چند که فرکانس‌های طبیعی بعدی اختلاف نسبتاً زیادی با حل‌های سه‌بعدی الاستیسیته دارند.

به دلیل دقیق نبودن استفاده از این تئوری برای تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم، بکارگیری تئوری‌های دقیق‌تر امری ضروری بنظر می‌رسد. تئوری برشی مرتبه اول به علت در نظر گرفتن اثر جابجایی حاصل از برش و اینرسی دورانی، می‌تواند جایگزین مناسبی برای تئوری کلاسیک در تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم باشد. در نظر گرفتن این اثرات باعث می‌شود که فرکانس‌های طبیعی حاصل از این تئوری نسبت به نتایج تئوری کلاسیک دارای مقادیر عددی کمتری باشند. اگر چه در تئوری برشی اثرات کشیدگی و یا چرخش در جهت ضخامت در نظر گرفته نمی‌شوند، اما تاثیر این پارامترها در فرکانس‌های طبیعی پایین ورق‌های نسبتاً ضخیم، بسیار ناچیز است. برای در نظر گرفتن این پارامترها و بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی دقیق‌تر باید از تحلیل‌های سه‌بعدی الاستیسیته استفاده کرد.

تئوری کلاسیک ورق که برای ورق‌های نازک با تغییر شکل‌های کوچک مورد استفاده قرار می‌گیرد، دارای فرضیاتی به شکل زیر است:

- خیز صفحه میانی در مقایسه با ضخامت ورق کوچک است.
- از تنش قائم در جهت ضخامت (σ_z) صرف‌نظر می‌شود.
- مقاطع مسطح که قبل از بارگذاری عمود بر صفحه میانی بوده‌اند، بعد از تغییر شکل نیز بصورت مسطح و عمود بر سطح مقطع باقی می‌مانند.

^۱ Classical or Kirchhoff plate theory

^۲ Natural frequency

• صفحه میانی بعد از تغییر شکل بدون کرنش باقی می ماند.

• از اثر اینرسی دورانی صرف نظر می شود.

فرض سوم این تئوری نشان دهنده این حقیقت است که تئوری کلاسیک سختی برشی ورق را در جهت ضخامت بینهایت فرض می کند و در نتیجه اثر تغییر شکل برشی را در این جهت در نظر نمی گیرد. صرف نظر کردن از این اثر و اثر اینرسی دورانی باعث شده که استفاده از این تئوری برای تحلیل ورق های نسبتاً ضخیم و بخصوص ورق های کامپوزیتی که دارای مدول برشی کمی می باشند، انتخاب مناسبی نباشد.

با توجه به مطالب ذکر شده در این فصل، برای تحلیل ارتعاشات ورق قطاعی مورد نظر از تئوری برشی مرتبه اول یا تئوری ورق میندلین^۱ استفاده شود. این تئوری علاوه بر در نظر گرفتن اینرسی دورانی ورق، فرضیه سوم تئوری کلاسیک را اینطور اصلاح کرده است که مقاطع مسطح و عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل بصورت مسطح باقی می ماندند اما لزوماً عمود بر سطح مقطع نمی باشند.

۲-۲. معادلات حرکت^۲ و شرایط مرزی مربوطه

با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه اول برای یک ورق قطاعی، میدان تغییر مکان را می توان بصورت

زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= u(r, \theta, t) + z \psi_r(r, \theta, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= v(r, \theta, t) + z \psi_\theta(r, \theta, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) &= w(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

که در آن u_r ، u_θ و u_z بترتیب مولفه های جابجایی ورق در راستاهای r ، θ و z بوده، ψ_r و ψ_θ توابع چرخش صفحه میانی در جهات θ و r ، توابع u و v جابجایی صفحه میانی در راستای r و θ و همچنین t نشان دهنده زمان می باشد. با استفاده از روابط کرنش-تغییر مکان در مختصات قطبی، مولفه های کرنش حاصل از میدان تغییر مکان تئوری برشی مرتبه اول بصورت زیر بدست می آیند:

^۱ First order shear deformation or Mindlin plate theory

^۲ Equations of motion

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_1 + z\kappa_1 & \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_2 + z\kappa_2 & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_3 + z\kappa_3 \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_4 + z\kappa_4 & 2\varepsilon_{rz} &= \varepsilon_5 + z\kappa_5 & 2\varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_6 + z\kappa_6 \end{aligned} \quad (2-2)$$

که پارامترهای ε_1 تا ε_6 و κ_1 تا κ_6 عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{,r} & \varepsilon_2 &= \frac{u + v_{,\theta}}{r} & \varepsilon_3 &= 0 \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{r} w_{,\theta} + \psi_{,\theta} & \varepsilon_5 &= w_{,r} + \psi_r & \varepsilon_6 &= \frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,\theta} - \frac{v}{r} \\ \kappa_1 &= \psi_{r,r} & \kappa_2 &= \frac{\psi_r + \psi_{\theta,\theta}}{r} & \kappa_3 &= 0 \\ \kappa_4 &= 0 & \kappa_5 &= 0 & \kappa_6 &= \frac{1}{r} \psi_{r,\theta} + \psi_{\theta,r} - \frac{1}{r} \psi_{\theta} \end{aligned} \quad (3-2)$$

و اندیس کاما که قبل از یک متغیر مستقل آمده، نشاندهنده مشتق نسبی نسبت به آن متغیر است.

برای ورق ساخته شده از مواد ایزوتروپیک عرضی^۱ و فرض اینکه صفحه ایزوتروپیک صفحه $x-y$ باشد، معادله

مشخصه بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu_z/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu_z/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_z/E & -\nu_z/E & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

که در آن E و ν به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در صفحه ایزوتروپیک $x-y$ هستند. همچنین

E_z ، G_z و ν_z مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون در صفحات عمود بر صفحه ایزوتروپیک می‌باشند.

با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای برای ورق مورد نظر، روابط تنش- کرنش را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) \quad (2-5-الف)$$

^۱ Transversely isotropic

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}) \quad (2-5-5)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (2-5-6)$$

$$\sigma_{\theta z} = G_z(2\varepsilon_{\theta z}) \quad (2-5-7)$$

$$\sigma_{rz} = G_z(2\varepsilon_{rz}) \quad (2-5-8)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)}(2\varepsilon_{r\theta}) \quad (2-5-9)$$

با جایگذاری روابط کرنش (۲-۲) در معادلات (۲-۵)، تنش‌های موجود در ورق بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + z(\kappa_1 + \nu\kappa_2)) \quad (2-6-الف)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + z(\kappa_2 + \nu\kappa_1)) \quad (2-6-ب)$$

$$\sigma_{\theta z} = G_z(\varepsilon_4 + z\kappa_4) \quad (2-6-پ)$$

$$\sigma_{rz} = G_z(\varepsilon_5 + z\kappa_5) \quad (2-6-ت)$$

$$\sigma_{r\theta} = G_z(\varepsilon_6 + z\kappa_6) \quad (2-6-ث)$$

برای بدست آوردن معادلات حرکت ورق، از اصل همیلتون استفاده می‌شود. بر اساس این اصل داریم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt = 0 \quad (7-2)$$

که در آن T انرژی جنبشی ورق، U انرژی کرنشی ورق و V انرژی پتانسیل حاصل از کار نیروهای خارجی و سمبل δ نشاندهنده اپراتور تغییرات می‌باشند. تغییرات انرژی جنبشی ورق بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV dt = - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV dt \quad (8-2)$$

با جایگذاری میدان تغییر مکان (۱-۲) در تغییرات انرژی جنبشی (۸-۲) خواهیم داشت:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iiint_A [(I_1 \ddot{u} + I_2 \dot{\psi}_r) \delta u + (I_1 \dot{v} + I_2 \dot{\psi}_\theta) \delta v + (I_2 \ddot{u} + I_3 \dot{\psi}_r) \delta \psi_r + (I_2 \dot{v} + I_3 \dot{\psi}_\theta) \delta \psi_\theta + I_1 \ddot{w} \delta w] dA dt \quad (9-2)$$

که در معادلات بالا پارامترهای جرمی I_1 ، I_2 و I_3 عبارتند از:

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (10-2)$$

h ضخامت ورق می‌باشد. همچنین برای یک جامد الاستیک خطی تغییرات انرژی کرنشی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (11-2)$$

با جایگذاری کرنش‌های (2-2) در معادله (11-2) و استفاده از قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta U = & \iint_A [N_{rr} \delta u_{,r} + M_{rr} \delta \psi_{r,r} + N_{\theta\theta} (\delta u + \delta v_{,\theta}) / r + M_{\theta\theta} (\delta \psi_r + \delta \psi_{\theta,\theta}) / r + N_{r\theta} (\delta u_{,\theta} / r + \delta v_{,r} - \delta v / r) \\ & + M_{r\theta} (\delta \psi_{r,\theta} / r + \delta \psi_{\theta,r} - \delta \psi_{\theta} / r) + \hat{Q}_r (\delta w_{,r} + \delta \psi_r) + \hat{Q}_\theta (\delta w_{,\theta} / r + \delta \psi_{\theta})] r dr d\theta = \\ & - \iint_A [(N_{rr,r} + N_{r\theta,\theta} / r - N_{\theta\theta} / r + N_{rr} / r) \delta u + (N_{r\theta,r} + N_{\theta\theta,\theta} / r + 2N_{r\theta} / r) \delta v \\ & + (M_{rr,r} + M_{r\theta,\theta} / r - M_{\theta\theta} / r + M_{rr} / r - \hat{Q}_r) \delta \psi_r + (M_{r\theta,r} + M_{\theta\theta,\theta} / r + 2M_{r\theta} / r - \hat{Q}_\theta) \delta \psi_\theta \\ & + (\hat{Q}_{r,r} + \hat{Q}_{\theta,\theta} / r + \hat{Q}_r / r) \delta w] r dr d\theta + \int_\Gamma (N_{rr} n_1 + N_{r\theta} n_2) \delta u d\Gamma + \int_\Gamma (N_{r\theta} n_1 + N_{\theta\theta} n_2) \delta v d\Gamma \\ & + \int_\Gamma (M_{rr} n_1 + M_{r\theta} n_2) \delta \psi_r d\Gamma + \int_\Gamma (M_{r\theta} n_1 + M_{\theta\theta} n_2) \delta \psi_\theta d\Gamma + \int_\Gamma (\hat{Q}_r n_1 + \hat{Q}_\theta n_2) \delta w d\Gamma \end{aligned} \quad (12-2)$$

در روابط بالا پارامترهای N و \hat{Q} مقادیر نتیجه‌های تنش و M نتیجه ممان می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(N_{rr}, N_{\theta\theta}, N_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}) dz \quad (13-2 \text{ الف})$$

$$(M_{rr}, M_{\theta\theta}, M_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}) z dz \quad (13-2 \text{ ب})$$

$$(\hat{Q}_r, \hat{Q}_\theta) = K^2 \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}) dz \quad (13-2 \text{ پ})$$