دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

روش‌های حساب تغییرات برای حل مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای

استاد راهنما

دکتر محمد جهانشاهی

استاد مشاور

دکتر مجتبی رنجبر

پژوهشگر

وحید عباس نواز

۱۳۹۲

تبریز/ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

مادر عزیزم

و

خواهر مهربانم

سپاس‌گزاری

سپاس خدا را به اندازه همه سپاسی که نزدیکترین فرشتگان و گرامی‌ترین بندگان و پسندیده‌ترین ستایش‌کنندگان او را ستایش کرده‌اند، سپاسی که بر سپاس‌های دیگر برتری داشته باشد مانند برتری که پروردگار نسبت به آفریدگان دارد.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد جهانشاهی که علم و دانش و تخصص خود را صمیمانه و بی‌دریغ به بنده تقدیم نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر که بنده را در جهت آماده‌سازی این پایان‌نامه، مورد راهنمایی‌های ارزشمند خویش قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر ناصر آقازاده که زحمت داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان از خانواده عزیزم که با تحمل دشواری‌ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم.

وحید عباس‌نواز
تبریز/۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

این پایان‌نامه شامل سه فصل می‌باشد. در فصل اول، مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های آتی را بیان می‌نماییم. سپس به معرفی تعاریف و مفاهیم اولیه حساب تغییرات که منشاء این نظریه می‌باشند، می‌پردازیم و معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ را با دو روش بدست می‌آوریم و کابردهای آنرا بوسیله چند مثال از جمله مساله خم کوتاهترین زمان ذکر می‌نماییم.
در فصل دوم، روش‌های تقریبی بدست آمده از حساب تغییرات که شامل روش‌های ریلی-ریتز، گالرکین و کانترویچ می‌باشند، را به کمک قضیه‌ای که جواب‌های یک مساله مقدار مرزی را با اکسترمال‌های یک تابعک متناظر می‌کند، بررسی می‌نماییم.
بالاخره، در فصل سوم با درنظر گرفتن، یک معادله دیفرانسیل تکانشی با شرط مرزی مرکب و بیان شرط $Palais - Smale$ رابطه بین جواب‌های ضعیف و کلاسیک را بررسی نموده و وجود $۲k$ جواب متمایز را برای آن تضمین می‌نماییم.
واژه های کلیدی: حساب تغییرات، مسائل مقدار مرزی، معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای، کمینه‌ها وبیشینه‌ها .

پیشگفتار

بی شک، ریاضیات ملکه علوم است و حساب دیفرانسل و انتگرال همچون جواهری است بر تاج آن.
حساب تغییرات شاخه‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد و در حالت کلی می‌توان آنرا شاخه‌ای از آنالیز محسوب کرد. در ساده‌ترین حالت این نظریه به یافتن تابعی می‌پردازد که مقدار یک انتگرال را اکسترمم کند و نتایج حاصل از آن در حل بسیاری از مسائل ریاضی، فیزیک و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مساله خم کوتاهترین زمان از جمله این مسائل می‌باشد. (خمی که هرگاه جسمی روی آن با سرعت اولیه معین حرکت کند، در کمترین زمان ممکن فاصله بین دو نقطه مفروض راطی کند.)
یونانیان باستان می دانستند، خمی با محیط مفروض، که کمترین مساحت را احاطه کند دایره است و گالیله [۱] (۱۵۶۲-۱۶۴۲) بطور جزئی مساله خم کوتاهترین زمان را بررسی کرد. در سال۱۶۸۶نیوتن [۲] مساله رویه‌های دورانی با مساحت کمینه را مطرح کرد و ویژگی‌های خمی را که جواب مساله است، بدون اثبات ارائه داد. [۳]
با این حال مطالعه سازمان یافته حساب تغیرات زمانی آغاز شد، که یوهان برنولی [۳] مساله خم کوتاهترین زمان را بار دیگر در سال ۱۶۹۶ مطرح ساخت. یاکوب برادر یوهان نیز به حل این مساله همت گماشت و با توجه به اختلاف‌نظرهایی که با برادرش بر سر این موضوع داشت مشاجرات نسبتاً تلخی بین آن‌ها درگرفت. پس از جروبحث‌های که سالها طول کشید، بالاخره یاکوب حل خودش را در سال ۱۷۰۱ منتشرکرد، که سرآغاز تحقیقات اویلر [۴] شد. او در مقاله جامع خود که در سال ۱۷۴۴ گردآوری کرد، یکی از مشهورترین کارهای خود که کشف معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = ۰.$$

بود را ارائه داد، که به نام خود او نامگذاری شد. لاگرانژ [۵] در مقالات خود در سال‌های ۱۷۶۲ و ۱۷۷۰ روش تحلیلی عرضه کرد. وی در انتگرال‌هایی که بررسی می‌کرد. بجای تابع $y = y(x)$ که معرف یک خم بود، تابع $\overline{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ را قرارداد. ($\overline{y} - y = \alpha\eta$ را تغییر تابع y می‌نامیم و آنرا با نماد δy نمایش می‌دهیم که منشاء نام حساب تغییرات است.) از آن پس نظریه‌ای که دردست مطالعه داریم،

[۱] Galilei
[۲] Newton
[۳] Bernouli
[۴] Euler
[۵] Lagrange

حساب تغییرات نامیده شد. در سال ۱۸۷۳ روش تجربی برای یافتن جواب این مساله توسط پلاتو [۶] فیزیک‌دان کور بلژیکی، ابداع شد. [۱۸]
در سال ۱۸۷۹ وایرشتراس [۷] با معرفی تابع $E(x, y, p, y')$ که به نام خود او معروف شد، شرط کافی برای وجود کمینه‌ها و بیشینه‌ها بیان نمود. بعدها دانشمندانی چون، زرملو [۸] ، کنزر [۹] ، آدمار [۱۰] ، هیلبرت [۱۱] ، تونلی [۱۲] ، تسلبخ [۱۳] ، مایر [۱۴] ، داربو [۱۵] و... کارهای سودمندی روی حساب تغییرات انجام دادند و آنرا به نظریه منسجم بدل نمودند. [۳]
ناگفته نماند که در فیزیک نوین اینیشتین [۱۶] در اثر خود راجع به نسبیت عام از حساب تغییرات استفاده گسترده‌ای کرده و شرودینگر [۱۷] آن را برای یافتن معادله موج که یکی از پایه های مکانیک کوانتوم است، بگار گرفت.
در عصر حاضر حساب تغییرات توسعه فراوانی در ریاضیات محض و کاربردی یافته و از آن برای حل بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی بویژه مهندسی برق استفاده می‌شود.
در معادلات دیفرانسیل حل برخی از مسائلی که بدست آوردن جواب های آن‌ها به سایر روش‌ها مشکل یا عملاً غیر ممکن است. به کمک نظریه حساب تغییرات امکان‌پذیر می‌شود و در این راستا روش‌های تحلیلی و عددی متنوعی نیز بوجود آمده است.
در دهه اخیر ریاضیدانانی چون آورنا [۱۸] ، بونانو [۱۹] ، رابینوویتز [۲۰] و ریسری [۲۱] مطالعات عمیقی در زمینه نظریه نقاط بحرانی و حساب تغییرات و کاربردهای آن‌ها در معادلات دیفرانسیل انجام داده‌اند. [۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶] و دانشمندانی مثل گوان [۲۲] [۱۳] ، نیتو [۲۳] [۸، ۱۲] و رودریگز [۲۴] [۱۱] به کمک این نظریه کارهای جدیدی در زمینه بررسی جواب‌های یک معادله دیفرانسیل تکانشی با شرط مرزی مرکب آغاز کرده‌اند. ما نیز در این پایان نامه کوشیده‌ایم، این روند را تشریح و گسترش دهیم. منابع این پایان نامه بیشتر براساس مقالات [۱، ۵، ۶، ۱۹] می‌باشد.

[۶] Plato
[۷] Weierstrass
[۸] Xeremloe
[۹] Kenzer
[۱۰] Ademar
[۱۱] Hilbert
[۱۲] Toneli
[۱۳] Teselbach
[۱۴] Meier
[۱۵] Darboux
[۱۶] Einstein
[۱۷] Schrodinger
[۱۸] Averna
[۱۹] Bonanno
[۲۰] Rabinowitz
[۲۱] Ricceri
[۲۲] Qian
[۲۳] Nieto
[۲۴] Rodriguez

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اساسی و کاربردهای اولیه حساب تغییرات

۱.۱ مقدمه

در این فصل، مفاهیم ریاضی مورد نیاز برای آشنایی با نظریه حساب تغییرات [۱] را بیان می‌نماییم و سپس اصول بنیادین حساب تغییرات، از جمله معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = \text{۰}.$$

که به معادله اویلر-لاگرانژ [۲] مشهور است، را ارائه می‌نماییم و در ادامه، با معرفی عملگرهای تغییراتی δ و $\delta^{\text{۲}}$ و بسط تیلور توابع چند متغیره به اثبات اصل تغییراتی اویلر-لاگرانژ پرداخته و زمینه را برای مطالبی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند، فراهم می‌نماییم.

۲.۱ مقدمات ریاضی

در این قسمت، به بیان تعاریف اولیه ضروری و همچنین فضاهای تابعی که جواب‌های یك معادله دیفرانسیل روی آن تعریف می‌شوند، نظیر فضاهای باناخ، هیلبرت و سوبولوف می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. اگر X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. برای هر $x,y \in X$ نگاشت $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ را معمولا با نماد $f(x,y) =< x,y >$ نمایش داده می‌شود. یک ضرب داخلی می‌نامیم. هرگاه دارای خواص زیر باشد.

$$\text{۱} - \forall x,y,z \in X \qquad < x+y,z >=< x,z > + < y,z > .$$

$$\text{۲} - \forall x,y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad < \alpha x,y >= \alpha < x,y > .$$

[۱] Variational method

[۲] Euler-Lagrange equation

$۳ - \forall x, y \in X \qquad < x, y >= \overline{< y, x >}.$

$۴ - \forall x \in X \qquad < x, x >\geq ۰, < x, x >= ۰ \Leftrightarrow x = ۰.$

ویژگی‌های زیر، به سادگی از خواص فوق نتیجه می‌شوند.

$۱ - \forall x, y, z \in X \qquad < x, y + z >=< x, y > + < x, z > .$

$۲ - \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad < x, \alpha\, y >= \overline{\alpha} < x, y > .$

$۳ - \forall x \in X \qquad < ۰, x >=< x, ۰ >= ۰.$

تعریف ۲.۲.۱. اگر X یک فضای برداری باشد، که روی آن یک ضرب داخلی تعریف شده، آنگاه X را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد. برای هر $x \in X$ ، $(< x, x >)^{\frac{۱}{۲}}$ را با نماد $\|x\|$ نمایش داده و آنرا نرم فضای ضرب داخلی X می‌نامیم.

با توجه به تعریف فوق، روی هر فضای ضرب داخلی یک نرم تعریف می‌شود. لذا هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار است .

تعریف ۴.۲.۱. اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد. دنباله $\{u_n\}$ را کوشی در X می‌نامیم. اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon > ۰ \qquad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \qquad ; \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow \| u_n - u_m \| < \varepsilon.$$

تعریف ۵.۲.۱. فضای X را کامل می‌نامیم، هرگاه هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه ای در X باشد.

فضای نرمدار کامل را باناخ [۳] و فضای ضرب داخلی کامل، را هیلبرت [۴] می‌نامیم و معمولاً فضای هیلبرت را با نماد H نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۲.۱. در این مثال، چند فضای هیلبرت به همراه ضرب داخلی تعریف شده روی آن ها را بیان می‌نماییم:

۱- اگر $\mathbb{C}^n$ مجموعه تمام $n-$تایی های مرتب روی $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه $\mathbb{C}^n$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر است.

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad < x, y >= \sum_{i=n}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

که در آن $x = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$ و $y = (y_۱, y_۲, ..., y_n)$ می‌باشند.

۲- در تعریف فوق اگر $\mathbb{C}^n$ رابه $\mathbb{R}^n$ تغییر دهیم، آنگاه $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری با ضرب داخلی

$$< x, y >= \sum_{i=n}^{n} x_i y_i.$$

خواهد بود.

[۳] Banach space

[۴] Hilbert

۳- فرض کنید $L_2([a,b])$ نشاندهنده تمامی توابع مربع انتگرالپذیر در بازه $[a,b]$ باشد. در این صورت $L_2([a,b])$ یک فضای هیلبرت، با ضرب داخلی زیر است.

$$\forall u, v \in L_2([a,b]), \qquad < u, v >= \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

۴- تعریف فوق را می توان برای توابع دو متغیره با دامنه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ تعمیم داد:

$$< u, v >= \int\int_D u(x,y)v(x,y)dxdy.$$

تعریف ۷.۲.۱. اگر H یک فضای هیلبرت باشد. نگاشت $A : H \longrightarrow H$ را یک عملگر در فضای هیلبرت می‌نامیم و اگر

$$\forall u, v \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \qquad A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v.$$

باشد. آنگاه A یک عملگر خطی است.

تعریف ۸.۲.۱. عملگر A را روی فضای هیلبرت H کراندار می‌نامیم. هرگاه

$$\exists K > 0 \qquad \forall u \in H \qquad ; \|Au\| \leq K\|u\|.$$

تعریف ۹.۲.۱. اگر A یک عملگر، روی فضای هیلبرت H باشد. برای عنصر ثابت v در H ضرب داخلی $< Au, v >$ را می‌توان به عنوان عملگری از u در نظر گرفت، که معمولاً آنرا با $I(u)$ نمایش می‌دهیم و

$$I(u) =< Au, v >$$

را یک تابعک [5] (فانکشنال) خطی، روی H می‌نامیم.

مثال ۱۰.۲.۱. با مشخص بودن u ، v و عملگر A می‌توان تابعک $I(u)$ را بدست آورد. در مثال زیر چند نمونه از این موارد را ذکر می‌نماییم .

۱- $; x \in (1, 2)$

$$u = y(x), \qquad v = x, \qquad A = x^2\frac{d^2}{dx^2} + 5x\frac{d}{dx} + 6.$$

$$Au = Ay = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 6y,$$

چون $I(u) =< Au, v >$ می‌باشد. پس داریم:

$$I(y) =< Ay, x >= \int_1^2 (x^3y'' + 5x^2y' + 6xy)\, dx.$$

۲- $; x \in (x_1, x_2)$

$$u = y(x), \qquad v = 1, \qquad Au = \sqrt{1 + u'^2},$$

[5] Functional

تابعک $I(u)$ بصورت زیر مشخص خواهد شد

$$I(u) =< Ay, ۱ >= \int_{x_۱}^{x_۲} \sqrt{۱ + y'^۲}\, dx.$$

۳ - $;D \subseteq \mathbb{R}^۲$ $\qquad A = \nabla^۲, \qquad v = ۱, \qquad u = u(x),$

در این مورد نیز داریم:

$$I(u) =< Au, v >=< \nabla^۲ u, ۱ >= \int\int_D (u_{xx} + u_{yy})\, dxdy.$$

تعریف ۱.۲.۱۱. اگر X یک فضای برداری حقیقی باشد و $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ نشاندهنده تمام نگاشت‌های خطی از X به $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ یک فضای باناخ است، که آن را فضای دوگان X می‌نامیم و با نماد X^* نمایش می‌دهیم و هر عضو آن را یک تابعک خطی از X به $\mathbb{R}$ می‌نامیم .

تعریف ۱.۲.۱۲. اگر A یک عملگر، روی فضای هیلبرت H باشد و عملگر $A^* : H \longrightarrow H$ وجود داشته باشد، بطوریکه

$$\forall u, v \in H, \qquad < Au, v >=< u, A^* v > .$$

آنگاه A^* را الحاقی A می‌نامیم و اگر $A = A^*$ باشد. آنگاه A را خودالحاق می‌نامیم. پس برای عملگر خودالحاق A داریم:

$$< Au, v >=< u, Av > .$$

مثال ۱.۲.۱۳. خود الحاق بودن عملگر های زیر را بررسی می‌نماییم.
۱- $T = A^* A$ که A^* الحاقی عملگر A می‌باشد.

$$< Tu, v >=< A^* Au, v >=< v, A^* Au >=< Av, Au >=< Au, Av >=< u, A^* Av > .$$

پس T خود الحاق می‌باشد.
۲- $A = \frac{d}{dx}$ و A عملگری روی توابع دیفرانسیل‌پذیر در بازه $[a, b]$ می باشد، که در مرز این بازه صفر می‌شود.
با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$< Au, v >=< \frac{du}{dx}, v >= \int_a^b (\frac{du}{dx}) v\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u(\frac{dv}{dx})\, dx = - < u, \frac{dv}{dx} >= - < u, Av > .$$

پس A خود الحاق نیست.
۳- $A = \frac{d^۲}{dx^۲}$ باهمان مفروضات قسمت (۲)
با دو باراستفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء و با توجه به صفر شدن u و v روی مرزی $[a, b]$ داریم:

$$< Au, v > =< \frac{d^۲ u}{dx^۲}, v >= [u\frac{dv}{dx}]_a^b - \int_a^b (\frac{du}{dx})(\frac{dv}{dx})\, dx = - \int_a^b (\frac{du}{dx})(\frac{dv}{dx})\, dx$$

$$= -[(u\frac{dv}{dx})|_a^b - \int_a^b u(\frac{d^۲ v}{dx^۲})dx] = -[u(b)\frac{dv}{dx}(b) - u(a)\frac{dv}{dx}(a)] + \int_a^b u(\frac{d^۲ v}{dx^۲})dx$$
$$= \int_a^b u(\frac{d^۲ v}{dx^۲})dx =< u, \frac{d^۲ v}{dx^۲} >=< u, Av > .$$

پس $\frac{d^۲}{dx^۲}$ یک عملگر خودالحاق است.

۴- $A = \nabla^۲$ ، برای توابع دیفرانسیل‌پذیری که روی $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ تعریف می‌شوند و روی ∂D صفر می‌شوند. بنا به دستور اول گرین برای توابع اسکالر u و v روی $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ داریم:

$$\int\int_D [v(\nabla^۲ u) + (\nabla v.\nabla u)]\, dxdy = \int_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial n})ds.$$

که در آن n بردار نرمال بر D می‌باشد و با توجه به صفر شدن u و v روی ∂D نتیجه می‌شود

$$\int\int_D v(\nabla^۲ u)\, dxdy = \int_{\partial D} v(\nabla u.n)\, ds - \int\int_D (\nabla v.\nabla u)\, dxdy$$
$$= -\int\int_D (\nabla v.\nabla u)\, dxdy.$$

بنابراین

$$< Au, v >=< \nabla^۲ u, v >= \int\int_D v(\nabla^۲ u)\, dxdy = -\int\int_D (\nabla v.\nabla u)\, dxdy.$$

به طریق کاملاً مشابه و با توجه به خاصیت جابجایی ضرب داخلی نتیجه می‌شود که

$$< u, Av > = \int\int_D u(\nabla^۲ v)\, dxdy$$
$$= -\int\int_D (\nabla u.\nabla v)\, dxdy$$
$$= -\int\int_D (\nabla v.\nabla u)\, dxdy.$$

لذا

$$< Au, v >=< u, Av > .$$

در نتیجه $\nabla^۲$ عملگر خودالحاق می‌باشد.

مثال ۱۴.۲.۱. اگر u و v توابع برداری و Φ یک تابع اسکالر باشد که داخل $D \subset \mathbb{R}^n$ تعریف شده‌اند و روی ∂D صفر می‌شوند و با توجه به ضرب داخلی تعربف شده برای u و v به صورت

$$< u, v >= \int\int\int_D (u.v)\, dV.$$

نشان می‌دهیم که $A^* = -div$ الحاقی $A = grad$ می‌باشد.

با توجه به اتحاد

$$grad\Phi.v = div(\Phi v) - \Phi divv.$$

و قضیه دیورژانس و صفر شدن Φ و v روی ∂D داریم:

$$\begin{aligned} < A\Phi, v > &=< grad\Phi, v > \\ &= \int\int\int_D (grad\Phi.v) dV \\ &= \int\int\int_D div(\Phi v)\, dV - \int\int\int_D (\Phi divv)\, dV \\ &= \int\int_D (n.\Phi v)\, ds + \int\int\int_D \Phi(-divv)\, dV \\ &= \int\int\int_D \Phi(-divv)\, dV \\ &=< \Phi, -divv > \\ &=< \Phi, A^* v > . \end{aligned}$$

تعریف ۱۵.۲.۱. عملگر A را روی فضای هیلبرت H ، مثبت می‌نامیم. هرگاه برای هر

$$u \in H \qquad < Au, u > \geq \circ.$$

باشد و تساوی زمانی برقرار است که $u = \circ$ باشد. همچنین، اگر عدد مثبت K موجود باشد، به طوری که برای هر $u \in H$ داشته باشیم

$$< Au, u > \geq K < u, u > .$$

آنگاه A را مثبت معین می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر Ω یک مجموعه اندازه پذیر لبگ در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. برای هر $p \in [1, +\infty)$ فضای $L^p(\Omega)$ را شامل تمام توابع اندازپذیر لبگ در نظر می‌گیریم. که برای هر $f \in L^p(\Omega)$ ، $\|f\|_p < \infty$ است و $\|.\|_p$ به صورت

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

روی $L^p(\Omega)$ تعریف می‌شود.
اگر k یک عدد صحیح نامنفی و $p \geq 1$ باشد. فضای سوبولف از مرتبه k را با نماد $w^{k,p}(\Omega)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$w^{k,p}(\Omega) = \{u : u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \circ < |\alpha| \leq k\} .$$

تعریف ۱۷.۲.۱. اگر نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ تناظر یك به یك، f و f^{-1} پیوسته باشند. آنگاه f را هومئومورفیسم یا همسانریخت می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۸. معادله دیفرانسیل

$$a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_2(x)\frac{dy}{dx}+(a_3(x)+\lambda)y=0. \qquad (۱.۱)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم

$$p(x)=\exp\int^x\frac{a_2(t)}{a_1(t)}\,dt,$$

$$q(x)=\frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x),$$

$$s(x)=\frac{p(x)}{a_1(x)},$$

آنگاه باجایگذاری این روابط در معادله (۱.۱) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(p\frac{dy}{dx})+(q+\lambda s)y=0.$$

که آنرا معادله اشتورم-لیویل می‌نامیم.

۱.۳ مساله تغییراتی، معادله اویلر-لاگرانژ و مثال‌های اولیه حساب تغییرات

در این قسمت، مفهوم مساله تغییراتی را شرح می‌دهیم و یک شرط لازم برای بدست آوردن جواب آن بیان می‌نماییم و سپس چند مساله خاص که در روند ابداع و تکامل نظریه حساب تغییرات، نقش اساسی داشته‌اند را بیان و حل می‌نماییم .

تعریف ۱.۳.۱. اگر تابع $y(x)$ مقدار تابعک $I(y)$را اکسترمم کند. آنگاه می‌گوییم این تابع $I(y)$ را ایستی می‌کند و $y=y(x)$ رااکسترمال یا نقطه بحرانی $I(y)$ می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۲. اگر تابع $y=y(x)$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد و در شرط مرزی $y(x_1)=y_1$ و $y(x_2)=y_2$ صدق کند. آنگاه $y=y(x)$ را پذیرفتنی می‌نامیم.
و هرگاه $y=y(x)$ پذیرفتنی باشد. آنگاه

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')\,dx.$$

خوش تعریف است.

تعریف ۱.۳.۳. اگر $C^2([a,b])$ مجموعه تمام توابعی، که دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته در بازه $[a,b]$ می‌باشند، درنظر بگیریم و $f(x,y,y')$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته نسبت به هریک از متغیرهای x ، y و y' باشد. آنگاه یک مساله تغییراتی عبارت است از یافتن تابع $y(x)\in C^2([a,b])$ به

طوریکه تابعک

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx.$$

با شرط مرزی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ را اکسترمم کند.

برای بدست آوردن روشی که بتوان جواب یک مساله تغییراتی را مشخص نمود، به طریق زیر عمل می‌نماییم. فرض کنید $y(x)$ جواب مساله باشد با اندکی تغییر در مقدار y مقدار I نیز تغییر خواهد کرد. حال فرض کنید $\eta(x)$ تابعی باشد، که $\eta''(x)$ پیوسته و $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ باشد و اگر α پارامتر کوچکی باشد. آنگاه

$$\overline{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x). \tag{2.1}$$

یک خانواده یک پارامتری از توابع پذیرفتنی خواهد بود. زیرا با توجه به پیوسته بودن $\eta''(x)$ و $y''(x)$ ،

$$\overline{y}''(x) = y''(x) + \alpha\eta''(x).$$

پیوسته خواهد بود و خواهیم داشت

$$\overline{y}(x_1) = y(x_1) + \alpha\eta(x_1) = y_1 + 0\alpha = y_1.$$

$$\overline{y}(x_2) = y(x_2) + \alpha\eta(x_2) = y_2 + 0\alpha = y_2.$$

با قراردادن $y(x)$ در $I(y)$ داریم:

$$I(\overline{y}) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \overline{y}, \overline{y}')dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x))dx.$$

اگرانتگرال سمت راست را $I(\alpha)$ نمایش دهیم، با انتخاب $\alpha = 0$ در رابطه (۲.۱) نتیجه می‌شود که $\overline{y}(x) = y(x)$ می‌باشد و چون $y(x)$ مقدار I را اکسترمم می‌کند، پس با انتخاب $\alpha = 0$ ، I اکسترمم مقدار خود را خواهد گرفت و چون $\overline{y}(x)$ تابعی پذیرفتنی است و f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته نسبت به هر یک از متغیرهای x ، y و y' می‌باشد. لذا اگر I اکسترمم شود، آنگاه $I'(0) = 0$ خواهد شد.
و با استفاده ازقائده زنجیری داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(x, \overline{y}, \overline{y}')dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \overline{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}'}{\partial \alpha})dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\eta'(x)\right] dx.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

اگر $I'(0) = 0$ باشد، آنگاه $\overline{y}(x) = y(x)$ و درنتیجه $\overline{y}'(x) = \overline{y}(x)$ خواهد بود. پس باتوجه به رابطه

فوق نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)]dx=0. \tag{۴.۱}$$

به کمک روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و چون $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)dx &= \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx\\ &=\eta(x_2)\frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_2}-\eta(x_1)\frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_1}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx.\end{aligned} \tag{۵.۱}$$

با جایگذاری رابطه (۱.۲) در رابطه (۶.۱) داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}-\eta(x)\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\right]dx=0.$$

و این زمانی امکان‌پذیر است که

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})=0. \tag{۶.۱}$$

معادله (۶.۱) را معادله اویلر-لاگرانژ می‌نامیم. این معادله در ظاهر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است، ولی پس از محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ و جایگذاری آنها در این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی حداکثر از درجه دو ظاهر می‌شود. لذا برای یافتن اکسترمال‌های تابعک $I(y)$ کافی است، معادله (۶.۱) راحل نماییم.
در بعضی موارد ممکن است، حل معادله (۶.۱) مشکل باشد، لذا می‌توان از معادله دیفرانسیلی که هم ارز با این معادله است استفاده نمود.

لم ۴.۳.۱. *اگر $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ رابه ترتیب با نمادهای f_y و $f_{y'}$ نشان دهیم. آنگاه معادله اویلر-لاگرانژ هم ارز با معادله*

$$f-y'f_{y'}=c.$$

می‌باشد.

برهان. بنا به معادله اویلر-لاگرانژ داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})=0,\\ &f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0.\end{aligned} \tag{۷.۱}$$

چون $f(x,y,y')$ تابعی از x ، y و y' می‌باشد. بنابراین $f_{y'}$ نیز تابعی از این متغیرهاست.

و بنا به قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{d}{dx}f_{y'}(x,y,y') = \frac{\partial f_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = y'f_{yy'} + y''f_{y'y'}. \tag{۸.۱}$$

با جایگذاری رابطه (۸.۱) در رابطه (۷.۱) داریم:

$$f_y - y'f_{yy'} - y''f_{y'y'} = 0. \tag{۹.۱}$$

با ضرب طرفین رابطه (۹.۱) در y' نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} &y'(f_y - y'f_{yy'} - y''f_{y'y'}) = 0,\\ &y'f_y - y'y'f_{yy'} - y''fy'y''f_{y'y'} = 0. \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $y''f_{y'}$ داریم:

$$y'f_y + y''f_{y'} - y''f_{y'} - y'y'f_{yy'} - y'y''f_{y'y'} = 0, \tag{۱۰.۱}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_{y'}}\frac{dy'}{dx} = y'f_y + y'f_{y'}, \tag{۱۱.۱}$$

با جایگذاری رابطه (۱۱.۱) در رابطه (۱۰.۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dx} - (y''f_{y'} + y'y'f_{yy'} + y'y''f_{y'y'}) = 0,\\ &\frac{df}{dx} - [y''f_{y'} + y'(y'f_{yy'} + y''f_{y''})] = 0. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۸.۱) داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dx} - (y''f_{y'} + y'\frac{d}{dx}f_{y'}) = 0,\\ &\frac{df}{dx} - [\frac{dy'}{dx}f_{y'} + (\frac{d}{dx}f_{y'})y'] = 0,\\ &\frac{df}{dx} - (\frac{d}{dx}(y'f_{y'}) = 0,\\ &\frac{d}{dx}(f - y'f_{y'}) = 0,\\ &f - y'f_{y'} = c. \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

که یک معادله دیفرانسیل از مرتبه حداکثر یک می‌باشد و همان طوریه گفته شد در بعضی موارد حل آن نسبت به حل معادله (۶.۱) راحتر است. ولی در بعضی مسائل نیز ممکن است، حل معادله (۶.۱) ارجحیت داشته باشد. بنابراین باتوجه به نوع تابع $f(x,y,y')$ در تابعک $I(y)$ برای یافتن اکسترمالهای

آن می‌توان، از معادله (۶.۱) یا (۱۲.۱) استفاده نمود.

۱.۳.۱ خم کوتاهترین مسیر

فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه مفروض در صفحه $\mathbb{R}^2$ باشند و بخواهیم از بین منحنی‌های گذرنده از این نقاط، منحنی $y = y(x)$ را چنان بدست آوریم، که کوتاهترین طول را داشته باشد.
اگر $y = y(x)$ منحنی دلخواهی باشد، که این دو نقطه را بهم وصل می کند. طول منحنی واصل بین دو نقطه از محاسبه انتگرال

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx,$$

بدست می‌آید. پس کافی است $y = y(x)$ را چنان بدست آوریم که تابعک

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx. \quad (13.1)$$

را با شرط مرزی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ مینیمم کند.

بنا به معادله اویلر لاگرانژ داریم:

$$0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{2\sqrt{1 + y'}}\right) = 0,$$
$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = k,$$
$$y'^2 = k^2 + k^2 y'^2,$$
$$y'^2 = \frac{k^2}{1 - k^2}.$$

با فرض $p = \frac{k^2}{1-k^2}$ داریم:

$$y'^2 = p.$$

لذا $y' = \pm\sqrt{p}$ خواهد بود و همچنین بافرض $c_1 = \pm\sqrt{p}$ نتیجه می‌شود:

$$y'^2 = k(1 + y'^2),$$
$$y' = c_1,$$
$$y = c_1 x + c_2. \quad (14.1)$$

و با اعمال شرط مرزی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ داریم:

$$y_1 = c_1 x_1 + c_2,$$
$$y_2 = c_1 x_2 + c_2,$$