بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشگاه یزد**

**دانشکده ریاضی**

**گروه ریاضی محض**

**پایان‌نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد**

عنوان:

# گراف‌ها و مشبکه‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر متناهی

استاد راهنما:

**دکتر سیّدمحمّد انوریه**

استاد مشاور:

**دکتر محمّدعلی ایرانمنش**

پژوهش‌گر:

**زهره میرزائی کیچی**

مهر ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و

نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه

متعلق به دانشگاه یزد است.

تقدیم به همه ی کسانی که مرا آموختند حتی به یک کلام یا یک نگاه

و

تقدیم با عشق به بیکران مهر و عطوفت
او که عالم در انتظار و دلتنگی اوست...

## سپاس گزاری

حمد و سپاس خدایی را که افتخار نگارش ذره ای از دریای بی منتهای دانشش را نصیب این بنده ی حقیر کرد.

اکنون که به لطف خداوند و همراهی همه ی کسانیکه همواره پشتیبان و راهنمایم بودند تا در این زمان، در این مرحله از زندگی ام قرار بگیرم، بر حسب وظیفه و به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» تشکر و قدردانی می نمایم

از آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بوده است، مخصوصاً

از خانواده ی عزیزم، به ویژه دو گوهر گرانبهای زندگیم، پدر و مادر عزیزم . . . این دو معلم بزرگوارم . . . که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند و حضورشان آرامش و امید زیستنم بوده است،

از تمام کسانی که در راه کسب دانش راهنمایم بودند، مخصوصاً

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر سیّد محمّد انوریه که در کمال سعه ی صدر از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند،

از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر محمّد علی ایرانمنش به خاطر راهنمایی های سودمندشان، از جناب آقای دکتر دربیدی که مرا در انجام بخشی از این پایان نامه یاری رساندند، و همچنین از جناب آقای پروفسور اشرفی (داور خارجی) و جناب آقای دکتر علیخانی (داور داخلی) که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از تمام کسانی که مرا آموختند، حتی به یک کلام یا یک نگاه.

پروردگارا، حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

پروردگارا، به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته های آنان جامه ی عمل بپوشانم.

پروردگارا، توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران سرافراز عنایت فرما.

زهره میرزائی کیچی

## چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی سه ساختار گرافیکی می‌پردازیم. در ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. پس از آن اولین ساختار گرافیکی یعنی، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $R$ را معرفی و ضمن بیان ویژگی‌های این گراف به بیان مثال‌هایی از این ساختار می‌پردازیم. هم‌چنین با استفاده از این ساختار، مجموعه‌ی $Z(R)$ را به ساختارهای جبری مجهز می‌کنیم. بعد از این بحث دومین ساختار گرافیکی یعنی، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شده‌ی حلقه‌ی $R$ را معرفی و به بیان ویژگی‌های این گراف پرداخته و هم‌چنین مثال‌هایی را از این گراف عنوان می‌کنیم. در نهایت سومین ساختار گرافیکی را، که مشبکه‌ی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $R$ است، معرفی می‌کنیم.



**واژه‌های کلیدی:**

۱: گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $R$

۲: گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شده‌ی حلقه‌ی $R$

۳: مشبکه‌ی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $R$

# فهرست مطالب

# لیست تصاویر

# مقدمه

در این پایان‌نامه به معرفی و بیان ویژگی‌های گراف مقسوم‌علیه صفر، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شده و مشبکه‌ی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $R$ می‌پردازیم و در نهایت با توجه به این ساختارهای گرافیکی، مجموعه‌ی $Z(R)$ را به ساختارهایی جبری مجهز می‌نماییم.

می‌دانیم اعضای $Z(R)$، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی جابجایی $R$، لزوماً تحت عمل جمع بسته نیستند. این امر موجب می‌شود که $Z(R)$ نتواند روی حلقه‌ی $R$ هیچ ساختارجبری تشکیل دهد.

در سال‌های اخیر، مطالعه و بررسی مقسوم‌علیه‌های صفر، با استفاده از ابزارها و روش‌های نظریه‌ی گراف به صورتی جدی‌تر و قوی‌تر دنبال می‌شود. در این پایان‌نامه قصد داریم به بررسی چندی از این نتایج، که در واقع نوعی ارتباط میان نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی حلقه‌هاست، بپردازیم.

ایستوان بک[۱] در مقاله‌ی [۱۶] که در سال ۱۹۸۸ به چاپ رسید، ایده‌ی ایجاد یک گراف از یک حلقه‌ی جابجایی را مطرح کرد. وی گراف خود را با $\Gamma(R)$ نشان داد. سال‌ها بعد، در سال ۱۹۹۹، دیوید اندرسون[۲] به همراه فیلیپ لیوینگستن[۳] در مقاله‌ی [۹]، تعریفی متفاوت را برای گراف $\Gamma(R)$ عنوان کردند. آن‌ها در این گراف رأس‌ها را اعضای ناصفر مجموعه‌ی $Z(R)$ درنظر گرفتند و یالی بین دو عضو متمایز این مجموعه در نظر گرفتند اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب آن دو عضو برابر با صفر باشد. این مقاله مسیر جدیدی را برای مطالعه‌ی گراف مقسوم‌علیه صفر برای نظریه‌پردازان حلقه‌های جابجایی باز نمود. پس از آن گراف «بک» را با $\Gamma_0(R)$ و گراف «اندرسون» و «لیوینگستن» را با $\Gamma(R)$ نشان دادند. آن‌ها ویژگی‌های بسیاری از این

---

[۱] Istvan Beck

[۲] David Anderson

[۳] Philip Livingston

ساختار گرافی را اثبات نمودند. از جمله‌ی نتایج آن‌ها این بود که، $R$ حلقه‌ای متناهی است اگر و فقط اگر $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$. از این مطلب نتیجه می‌شود که در مواردی که حلقه از مرتبه‌ی نامتناهی باشد، گراف نظیر به آن نیز از مرتبه‌ی نامتناهی است. از این‌رو بررسی ساختار گرافی آن دشوار و در بعضی از حالت‌ها غیرممکن است. برای برطرف کردن این مشکل، مولی[۴] در سال ۲۰۰۲ در مقاله‌ی [۲۸]، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شده‌ی حلقه‌ی $R$ را معرفی کرد. هم‌چنین این مفهوم به طور رسمی در سال ۲۰۱۱ در [۳۵] با تعریف رابطه‌ای هم‌ارزی روی اعضای $Z(R)$ (که همان رأس‌های گراف مقسوم‌علیه صفر هستند)، مطرح شد. پس از آن نیکولاس بس[۵]، با تعریف ترتیبی جزئی روی رأس‌های گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شده، ساختار مشبکه‌ی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $R$ را با هدف بررسی مجموعه‌های برشی گراف مقسوم‌علیه صفر، مطرح نمود. در نهایت تحقیقات بسیاری در این زمینه در جهت شناخت مجموعه‌ی $Z(R)$ صورت گرفت.

در این پایان‌نامه سعی می‌کنیم با توجه به گراف مقسوم‌علیه صفرحلقه‌ی $R$ نتایجی را در مورد خود حلقه‌ی $R$ و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی $R$ بیان کنیم.

---

[۴] Mulay

[۵] Nicholas Beath

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

## ۱.۱ نظریه‌ی حلقه‌ها

به دلیل سادگی مطلب، اثبات قضایای این بخش عنوان نشده است. برای اثبات مباحث این بخش مرجع [۲] و برای مباحث جبری در این پایان‌نامه، مراجع [۲، ۳، ۱۲، ۲۵] را پیشنهاد می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.۱.** یک حلقه عبارت است از یک سه‌تایی $(R,+,\cdot)$ به طوری که $R$ یک مجموعه‌ی ناتهی است و

$$+ : R \times R \longrightarrow R$$

$$\cdot : R \times R \longrightarrow R$$

دو عمل دوتایی روی $R$ هستند که به ترتیب جمع و ضرب در $R$ نامیده می‌شوند به طوری که این اعمال در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $(R,+)$ یک گروه آبلی است.

ب) $(R,\cdot)$ یک نیم‌گروه است، یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$،

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

ج) ضرب و جمع با قوانین توزیع‌پذیری به یکدیگر مربوط می‌شوند، یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$ داریم:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

اگر عضوی چون $1 \in R$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$،

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

در این‌صورت $R$ را یک حلقه‌ی یکدار و ۱را عضو یکه‌ی حلقه می‌نامیم. هرگاه عمل ضرب $R$ چنان باشد که به ازای هر $a,b \in R$،

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

آن‌گاه $R$ را یک حلقه‌ی جابجایی می‌نامیم.

**مثال ۲.۱.۱.** ۱. مجموعه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ با جمع و ضرب معمولی اعداد، حلقه‌های جابجایی و یکدارند. در حالی‌که مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج تحت اعمال جمع و ضرب معمولی، حلقه‌ای جابجایی است که یکدار نیست.

۲. (حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی $n$). فرض‌کنیم $n$ عددی طبیعی و $x, y \in \mathbb{Z}$ هستند. اگر $n|x-y$، آن‌گاه می‌نویسیم $x \equiv y$ (به پیمانه‌ی $n$). رابطه‌ی $\equiv$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. رده‌ی هم‌ارزی $x$ را با $\overline{x}$ نشان می‌دهیم و $\mathbb{Z}_n$ را به عنوان مجموعه‌ی تمام رده‌های هم‌ارزی درنظر می‌گیریم. به ازای هر $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$، اعمال $+$ و $\cdot$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}, \qquad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}.$$

در این‌صورت $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

قرارداد می‌کنیم $\mathbb{Z}_n = \{۰, ۱, \ldots, n-۱\}$.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض‌کنیم $a$ و $b$ عضوهای ناصفری از حلقه‌ی $R$ هستند به طوری‌که $ab = ۰$. در این صورت $a$ را یک مقسوم‌علیه صفر چپ و $b$ یک مقسوم‌علیه صفر راست می‌نامیم. چنان‌چه $R$ یک حلقه‌ی جابجایی باشد، عضو ناصفر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر می‌نامیم هرگاه عضو ناصفری مانند $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری‌که $ab = ۰$. به عبارت‌دیگر در یک حلقه‌ی جابجایی بین مقسوم‌علیه‌های صفر چپ و راست تمایزی وجود ندارد.

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی $R$ و هم‌چنین مجموعه‌ی عضوهای ناصفر از مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی $R$ را به ترتیب با $Z(R)$ و $Z(R)^*$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۴.۱.۱.** در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ مقسوم‌علیه‌های صفر دقیقاً اعدادی هستند که نسبت به عدد $n$ اول نیستند.

**نتیجه ۵.۱.۱.** اگر $p$ عددی اول باشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}_p$ مقسوم‌علیه صفر ندارد.

**تعریف ۶.۱.۱.** یک حلقه‌ی جابجایی را که مقسوم‌علیه صفر ندارد، یک دامنه‌ی صحیح می‌نامیم.

**مثال ۷.۱.۱.** ۱. حلقه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ دامنه‌ی صحیح هستند.

۲. حلقه‌ی $\mathbb{Z}[\sqrt{۲}] = \{a + b\sqrt{۲} | a, b \in Z\}$ یک دامنه‌ی صحیح است.

۳. به ازای هر عدد اول $p$، $\mathbb{Z}_p$ یک دامنه‌ی صحیح است.

۴. اگر $n$ عدد اول نباشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}_n$ دامنه‌ی صحیح نیست.

**تعریف ۸.۱.۱.** مجموعه‌ی پوچساز عضو $x \in R$ را با $ann(x)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ann(x) = \{a \in R \mid ax = ۰\}.$$

**تعریف ۹.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ حلقه‌ای یکدار است. اگر به ازای $a, b \in R$، $ab = ۱$، آن‌گاه $b$ را یک معکوس راست $a$ و $a$ را یک معکوس چپ $b$ می‌نامیم. هرگاه عضوی چون $a \in R$ دارای یک معکوس راست $b$ و یک معکوس چپ $c$ باشد، آن‌گاه $a$ را عضوی وارون‌پذیر (یا یکال، یکه) می‌نامیم. مجموعه‌ی یکال‌های حلقه‌ی $R$ با $U(R)$ نشان داده می‌شود که البته تحت عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهد.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** حلقه‌ی $R$ را یک میدان می‌نامیم هرگاه عضوهای ناصفر آن با عمل ضرب تشکیل یک گروه آبلی بدهند.

**قضیه ۱۱.۱.۱.** هر میدان یک دامنه‌ی صحیح است.

**توضیح ۱۲.۱.۱.** عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ یک دامنه‌ی صحیح است ولی میدان نیست.

**قضیه ۱۳.۱.۱.** هر دامنه‌ی صحیح متناهی یک میدان است.

**تعریف ۱۴.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ یک حلقه است. اگر عدد صحیح و مثبت $n$ موجود باشد به طوری‌که به ازای هر $a \in R$، $na = ۰$، باشد آن‌گاه گوییم $R$ از مشخصه‌ی متناهی است و کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت با این خاصیت را مشخصه‌ی $R$ می‌نامیم و آن را با نماد $char(R)$ نشان می‌دهیم. در غیر این‌صورت گوییم $R$ از مشخصه‌ی صفر است.

**مثال ۱.۱.۱۵.** دامنه‌ی صحیح $\mathbb{Z}$ و میدان‌های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ از مشخصه‌ی صفرند و حلقه‌ی $\mathbb{Z}_m$ از مشخصه‌ی $m$ است.

**تعریف ۱.۱.۱۶.** (مشخصه‌ی یک حلقه‌ی یکدار). اگر عضو یکه‌ی حلقه، یعنی ۱، تحت عمل جمع از مرتبه‌ی متناهی $n$ باشد آن‌گاه $R$ از مشخصه‌ی $n$ است. در غیر این‌صورت گوییم $R$ از مشخصه‌ی صفر است.

**قضیه ۱.۱.۱۷.** (مشخصه‌ی یک دامنه‌ی صحیح). مشخصه‌ی هر دامنه‌ی صحیح برابر با صفر یا برابر با یک عدد اول است.

**تعریف ۱.۱.۱۸.** فرض‌کنیم $R$ یک حلقه و $S$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی آن است. در این‌صورت $S$ را یک زیرحلقه‌ی $R$ گوییم هرگاه $S$ نسبت به اعمال جمع و ضرب تعریف‌شده در $R$، خود یک حلقه باشد. در چنین حالتی می‌نویسیم $S \leqslant R$.

واضح است که $R$ و $\{0\}$ زیرحلقه‌های $R$ هستند. اگر $S$ زیرحلقه‌ای از $R$ باشد و $S \neq R$، آن‌گاه $S$ را یک زیرحلقه‌ی حقیقی (سره) از $R$ می‌نامیم. در حالتی که $S$ زیرحلقه‌ی $R$ نباشد، می‌نویسیم $S \nleqslant R$.

**مثال ۱.۱.۱۹.** برای هر عدد صحیح و مثبت $n$، مجموعه‌ی $n\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$، یک زیرحلقه‌ی $\mathbb{Z}$ است.

**قضیه ۱.۱.۲۰.** فرض‌کنیم $R$ یک حلقه و $S$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی آن است. در این‌صورت $S$ یک زیرحلقه‌ی $R$ است اگر و فقط اگر

۱. برای هر $a, b \in S$ نتیجه شود $a - b \in S$ (یعنی $(S, +)$ یک زیرگروه $(R, +)$ باشد)،

۲. برای هر $a, b \in S$ نتیجه شود که $ab \in S$.

**تعریف ۱.۱.۲۱.** عنصر $e$ در حلقه‌ی $R$ را خودتوان گوییم هرگاه $e^2 = e$.

مفهوم ایده‌آل یک حلقه را اولین بار "ددکیند" به کاربرد. که تعریف آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

**تعریف ۱.۱.۲۲.** زیرمجموعه‌ی ناتهی $I$ از $R$ را یک ایده‌آل $R$ می‌نامیم هرگاه:

۱. $I$ تحت عمل جمع زیرگروه $R$ باشد.

۲. به ازای هر $a \in I$ و هر $r \in R$ داشته باشیم:

(آ) $ar \in I$،

(ب) $ra \in I$.

در این‌صورت می نویسیم $I \lhd R$.

$I$ یک ایده‌آل راست نامیده می‌شود هرگاه شرایط ۱ و ۲- آ برقرار باشند و به همین ترتیب $I$ یک ایده‌آل چپ نامیده می‌شود هرگاه شرایط ۱ و ۲- ب برقرار باشند. واضح است که در یک حلقه‌ی جابجایی تمایزی بین ایده‌آل‌های چپ و راست نیست.

**تعریف ۲۳.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ و $S$ دو حلقه هستند. در این‌صورت تابع $f : R \longrightarrow S$ را یک همریختی حلقه‌ای می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم:

۱. $f(a+b) = f(a) + f(b)$،

۲. $f(ab) = f(a)f(b)$.

توجه داریم که در تساوی‌های ۱ و ۲، عمل‌های سمت چپ در $R$ و عمل‌های سمت راست در $S$ انجام می‌شوند. چون یک حلقه دارای دو عمل است، طبیعی است انتظار داشته باشیم که هر دوی این اعمال تحت آن‌چه که همریختی حلقه‌ای می‌نامیم محفوظ بمانند. به علاوه خاصیت ۱ بیان‌گر این است که هرگاه $R$ و $S$ به عنوان گروه‌های آبلی تحت $+$ در نظر گرفته شوند، آن‌گاه $f$ یک همریختی گروهی از $R$ به $S$ است.

**توضیح ۲۴.۱.۱.** در این پایان‌نامه هرجا صحبت از همریختی می‌شود، منظور همان همریختی حلقه‌ای است.

**تعریف ۲۵.۱.۱.** فرض‌کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی است. در این‌صورت هسته‌ی همریختی $f$، که با $kerf$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$kerf = \{x \in R \mid f(x) = \circ_s\}.$$

**قضیه ۲۶.۱.۱.** اگر $f$ یک همریختی از حلقه‌ی $R$ به حلقه‌ی $S$ باشد، آن‌گاه $kerf$ یک ایده‌آل $R$ است.

**تعریف ۲۷.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ و $S$ حلقه هستند و $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی است. در این‌صورت

۱. $f$ را یک تکریختی می‌نامیم هرگاه $f$ یک‌به‌یک باشد.

۲. $f$ را یک بروریختی می‌نامیم هرگاه $f$ پوشا باشد.

**قضیه ۲۸.۱.۱.** (قضیه اساسی همریختی یا قضیه‌ی اول یکریختی). فرض‌کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک بروریختی است. در این‌صورت یکریختی $g : \dfrac{R}{kerf} \longrightarrow S$ وجود دارد به‌قسمی‌که $f = g\circ\varphi$، که $\varphi$ نگاشت طبیعی از $R$ به $\dfrac{R}{kerf}$ است.

**قضیه ۲۹.۱.۱.** فرض‌کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی است. در این‌صورت تکریختی $g : \dfrac{R}{kerf} \longrightarrow S$ وجود دارد به‌قسمی که $f = g\circ\varphi$. درنتیجه داریم $\dfrac{R}{kerf} \cong f(R) \leqslant S$.

**تعریف ۳۰.۱.۱.** ایده‌آل $M$ از حلقه $R$ را ماکسیمال گوییم اگر $M \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل $I$ از $R$، اگر $R \subseteq I \subseteq M$، آن‌گاه $I = M$ یا $I = R$.

**مثال ۳۱.۱.۱.** $(\circ)$ یک ایده‌آل ماکسیمال از میدان (یا حلقه‌ی تقسیم) $F$ است.

**تعریف ۳۲.۱.۱.** رابطه‌ی $\leqslant$ روی مجموعه‌ی ناتهی $\Omega$، یک رابطه‌ی ترتیبی جزئی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر به ازای هر $a, b, c \in \Omega$، شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $a \leqslant a$ (خاصیت انعکاسی).

ب) $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ نتیجه دهد $a = b$ (خاصیت پادتقارن).

ج) $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ نتیجه دهد $a \leqslant c$ (خاصیت تعدی).

در این‌صورت $(\Omega, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی نامیده می‌شود.

یک زنجیر $C$ در مجموعه‌ی مرتب جزئی $(\Omega, \leqslant)$، زیرمجموعه‌ای از $\Omega$ است به طوری‌که به ازای هر $a, b \in C$ داریم: $a \leq b$ یا $b \leq a$.

عضوی چون $u \in \Omega$ یک کران بالای (کران پائین) $C$ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a \in C$ داشته باشیم $a \leq u$ ($a \geq u$).

همچنین اگر $u$ یک کران بالای (کران پائین) زنجیر $C$ باشد به طوری که برای هر کران بالای (کران پائین) دیگر $v$ از زنجیر $C$ داشته باشیم $u \leq v$ ($u \geq v$)، آن‌گاه $u$، کوچک‌ترین کران بالای (بزرگ‌ترین کران پائین) زنجیر $C$ نامیده می‌شود.

یک **مشبکه** مجموعه‌ی مرتب جزئی است که در آن هر زوج از اعضا هم دارای کوچک‌ترین کران بالا و هم دارای بزرگ‌ترین کران پایین هستند.

عضوی مانند $m \in \Omega$ یک عضو ماکسیمال مجموعه‌ی مرتب جزئی $(\Omega, \leq)$ نامیده می‌شود هرگاه $a \in \Omega$ و $m \leq a$ نتیجه دهد $m = a$.

**لم ۳۳.۱.۱.** (لم زورن). اگر هر زنجیر $C$ در مجموعه‌ی مرتب جزئی $(\Omega, \leq)$ کران بالایی در $\Omega$ داشته باشد، آن‌گاه $(\Omega, \leq)$ دارای عضو ماکسیمال است.

**قضیه ۳۴.۱.۱.** (کرول- زورن). اگر $R$ یک حلقه‌ی یکدار و $A$ یک ایده‌آل حقیقی (سره) از $R$ باشد، آن‌گاه ایده‌آل ماکسیمال $M$ از $R$ وجود دارد به طوری‌که $A \subseteq M$.

**نتیجه ۳۵.۱.۱.** هر حلقه‌ی یکدار دارای یک ایده‌آل ماکسیمال است.

**نتیجه ۳۶.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است. در این‌صورت هر عضو وارون‌ناپذیر از حلقه‌ی $R$ به یک ایده‌آل ماکسیمال تعلق دارد.

**نتیجه ۳۷.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است و $a \in R$. در این‌صورت $a$ یک عضو وارون‌پذیر (یا یکه) از حلقه‌ی $R$ است اگر و فقط اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال $M$ از $R$، داشته باشیم $a \notin M$.

**تعریف ۳۸.۱.۱.** فرض‌کنیم $R$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است. هرگاه $R$ دارای یک ایده‌آل ماکسیمال یکتا باشد، آن‌گاه $R$ را یک حلقه‌ی موضعی می‌نامیم.

**قضیه ۳۹.۱.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند: