بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه :

حلقه‌های کاهش یافته

زینب همایونی

استاد راهنما :

دکتر شمس الملوک خوشدل

استاد مشاور :

دکتر محبوبه حسین یزدی

آذر ،۹۰

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم زینب همایونی** دانشجوی رشته **ریاضی محض گرایش جبر** به شماره دانشجویی **۸۸۰۰۰۴۱۷۹ با عنوان:**

"حلقه‌های کاهش‌یافته"

با حضور هیات داوران در روز **یک‌شنبه** مورخ **۱۳۹۰/۹/۲۷** ساعت **۹ صبح** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۸/۵ به حروف هجده و نیم با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر شمس الملوک خوشدل	راهنما	استادیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر محبوبه حسین یزدی	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر احمد خاکساری	داور	دانشیار	پیام نور شیراز	
۴	دکتر مهناز پروانه‌نژاد شیرازی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۰
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی : ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب زینب همایونی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

نام و نام خانوادگی دانشجو

زینب همایونی

تاریخ و امضاء

اینجانب زینب همایونی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

نام و نام خانوادگی دانشجو

زینب همایونی

تاریخ و امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

ماه و سال

آذرماه ۹۰

تقدیم به

مهربان پروردگارم

موهبت های زندگیم

مادر و پدرم، که تار و پود روح بزرگشان را از مهربانی بافته اند. کسانی که مهرشان در دلم گرامی و مقدس است.

همسرم، وجودش افتخار و در رهگذر عمر آرامش لحظه هایم.

سپاس گزاری

سپاس و ستایش خداوند بی‌همتا را که توفیق کسب علم و معرفت، به من عطا فرمود. به رسم ادب و سنت نیکوی سپاس، لازم می‌دانم از کلیه عزیزانی که مرا در تدوین این پایان نامه یاری کردند سپاس گزاری نمایم.

از مادر و پدرم ، این بیکران بی‌همتا، سرو قامتانی که گوهر وجودشان، نسیم کلامشان و باران محبتشان را همواره بی‌هیچ منت و ادعا مرهمی نمودند بر خستگی-هایم.

از همسر مهربانم و خانواده محترمش که در طول تحصیل یاریم نمودند، صمیمانه‌ترین تشکرات را دارم.

از استاد فرزانه و بزرگوارم سرکار خانم دکتر شمس الملوک خوشدل که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و در تمامی مراحل اجرای این پایان نامه همواره از پشتیبانی و رهنمودهای ارزنده ی ایشان بهره‌مند بوده‌ام، سپاس گزارم. تشکر و قدردانی فراوان خدمت استاد ارجمندم آقای دکتر احمد خاکساری که مسئولیت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند.

چکیده

این پایان نامه تشکیل شده از چهارفصل که فصل اول آن به یادآوری مفاهیم اولیه می پردازد. فصل دوم به معرفی حلقه های NCI وحلقه های معکوس پذیرضعیف چپ اختصاص داده شده است. فصل سوم که موضوع اصلی پایان نامه است چند حلقه دیگررا معرفی کرده وشرایطی روی این حلقه ها را بیان میکندکه باحلقه کاهش یافته معادل شوند. درآخرفصل چهارم به بیان ویژگی اینگونه حلقه هاباتوجه به عناصر خودتوان آنها می پردازد.

فهرست مطالب

فصل اول

دراین فصل به بیان چند تعریف، قضیه ومعرفی چند نماد که برای فهم مطالب این پایان نامه نیاز است می پردازیم .

تعریف ۱–۱:

فرض کنید R یک مجموعه غیر تهی و + و . اعمال دوتایی روی R باشند که آن ها را به ترتیب "جمع"و"ضرب" می خوانیم. (.,+,R) را یک حلقه می نامند اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. (+,R) یک گروه آبلی باشد.

۲.عمل ضرب شرکت پذیر باشد یعنی :

$$\forall a, b, c \in R\ , (a.b).c = a.(b.c)$$

۳. عمل ضرب روی جمع توزیع پذیر باشد، یعنی به ازای هر $a, b, c \in R$

$a.(b + c) = a.b + a.c$ (قانون توزیع پذیری چپ)

$(b + c).a = b.a + c.a$ (قانون توزیع پذیری راست)

تعریف ۱–۲:

فرض کنید(.,+,R) یک حلقه باشد. R را یک حلقه جابجایی گویند هرگاه:

$$\forall a, b \in R, \qquad a.b = b.a$$

تعریف ۱–۳:

فرض کنید(.,+,R) یک حلقه باشد. R یک حلقه یکدار است هرگاه عنصری مانند $e \in R$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $a \in R$، $ae = ea = a$.

تعریف ۱–٤:

فرض کنید R یک حلقه باعنصرهمانی ۱باشد.عنصر $u \in R$ معکوس پذیراست هرگاه $v \in R$

موجودباشد به طوری که $vu = uv = 1$.

عنصر v درصورت وجود یکتاست و به آن معکوس ضربی u گوییم.

علامت گذاری: مجموعه یکه های R رابا $U(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱– ۵ :

فرض کنیدR یک حلقه باشد.یک عنصر $a \neq 0$ در R را مقسوم علیه صفرچپ(راست)گویند اگر

یک عنصر$b \neq 0$ در R وجود داشته باشد به طوری که $ab = 0(ba = 0)$.

تعریف ۱–٦ :

فرض کنید R یک حلقه باشد.عضو x از حلقه R پوچتوان نامیده میشود هرگاه عدد طبیعی n

وجود داشته باشد به طوری که $x^n = 0$.

تعریف ۱–۷:

فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ خودتوان نامیده می شود هرگاه $a^2 = a$.

تعریف ۱–۸ :

زیرمجموعه غیر تهی S ازحلقه R زیر حلقه R نامیده می شود هرگاه S با دوعمل + و . از R خود

یک حلقه باشد.

تعریف ۱-۹:

حلقه غیر صفر غیربدیهی باشد.R یک قلمرو صحیح نامیده می شود هرگاه فاقد مقسوم علیه صفر

حلقه اعداد حقیقی، اعداد صحیح، اعداد گویا مثال هایی از قلمروهای صحیح می باشد .

تعریف۱-۱۰:

حلقه یکدار R باخاصیت $1_R \neq 0$ که در آن هرعنصر ناصفر یکه باشد یک حلقه بخشی نامیده می شود.

تعریف۱-۱۱:

فرض کنید R یک حلقه دلخواه وx یک مجهول یا یک متغییر روی R باشد دراین صورت مجموعه:

$R[x]=\{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | a_i \in R, n \in N \cup \{0\}\}$

که متشکل ازهمه چند جمله ای های باضرایب در R است همراه باجمع وضرب تعریف شده به

صورت:

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)+(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) =$$
$$(a_0 + b_0)+(a_1 + b_1)x+\ldots+(a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m$$

که در آن $n \leq m$ و

$$(a_0 + a_1X + \cdots + a_nx^n).(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) = \sum c_{ij}\, x^{i+j}$$
$$0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m$$

که در آن

$$c_{ij}=a_0b_j+a_1b_{j-1}+\cdots+a_ib_0 \cdot$$

یک حلقه می باشد. این حلقه را حلقه چند جمله ای ها روی حلقه R می نامند.

تعریف ۱–۱۲:

فرض کنید R یک حلقه و I یک زیر مجموعه غیرتهی از R باشد. دراین صورت I یک ایده آل چپ (راست) حلقه R است هرگاه :

۱. I زیرگروهی از(R,+) باشد، به عبارت دیگر برای هر $a, b \in I$ داشته باشیم $a\text{-}b \in I$.

I.۲ نسبت به ضرب هرعضو دلخواه ازحلقه R ازچپ (راست) درعناصر I بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $a \in I$, $x \in R$, $xa \in I$ ($ax \in I$) باشد.

تعریف ۱–۱۳:

ایده آل I از حلقه R ایده آل دوطرفه حلقه R است هرگاه هم یک ایده آل راست وهم یک ایده آل چپR *باشد*. وقتی I ایده آل از یک حلقه R باشد، می نویسیم I R

مثال: برای هرعدد صحیح وثابت n , $nZ = \{nx | x \in Z\}$ ایده آلی ازحلقه $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۱–۱٤:

فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده آل I از R پوچ است اگر هرعنصر I پوچتوان باشد.

ایده آل های اول وماکسیمال:

تعریف ۱–۱۵:

ایده آل P از حلقه R را اول می نامند اگر $P \neq R$ و به ازای هر ایده آل A,B در R، $AB \subset P$ نتیجه دهد $B \subset P$ یا $A \subset P$.

قضیه ۱–۱۶:

فرض کنید R یک حلقه باشد.ایده آل P از حلقه R اول است اگرو تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح باشد.

تعریف ۱–۱۷:

ایده آل m از حلقه R ماکسیمال است در صورتی m≠R و به ازای هرایده آل I از R، اگر $m\subset R$ آن گاه ، اگر I=R یا m=I.

گزاره ۱–۱۸:

فرض کنید R یک حلقه و$x\in R$ باشد. در این صورت x یکه است اگر وتنها اگر x در هیچ یک از ایده آل های ماکسیمال حلقه R نباشد.

رادیکال پوچ وجیکوبسون رادیکال :

تعریف۱–**۱۹:** فرض کنید J,I دو ایده آل حلقه R و J⊆I باشد. I ایده آل مینیمال روی J است هرگاه بین J,I ایده آل دیگری قرار نگیرد. اگر J={0} وبین I وJ ایده آل دیگری قرار نگیرد، I را ایده آل مینیمال حلقه گوییم.

قضیه ۱–۲۰:

فرض کنید N مجموعه عناصرپوچ توان حلقه جابجاییR باشد، یعنی

$N=\{x\in R:x^n=0$, n برای یک عددطبیعی$\}$ در این صورت

۱. N یک ایده آل R است .

۲. $\frac{R}{N}$ هیچ عنصرپوچتوان غیرصفرندارد.

علامت گذاری:مجموعه تمام عناصرپوچتوان حلقه R را با N(R) نمایش می دهند.

تعریف ۱–۲۱:

حلقه ای که تنها پوچتوان آن صفر به بیان دیگر N (R)=0 باشد حلقه کاهش یافته[1] نامیده می شود.

مثال :حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{N}$ یک حلقه کاهش یافته است .

قضیه ۱–۲۲:

فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین صورت R کاهش یافته است اگر وتنها اگر برای هر $r \in R$

تساوی هر $r^2 = 0$ ایجاب کند که $r=0$.

اثبات: فرض کنید R کاهش یافته باشد. بنابراین صفر تنها عنصر پوچتوان R است. لذا از $r^2 = 0$

برای هر $r \in R$، صفربودن r نتیجه می شود.

برعکس، فرض کنید $a \in R$ عضوپوچتوان و n کوچکترین عددصحیحی باشدکه $a^n = 0$. بنابراین

$a^{n-1} \neq 0$ چون $a^{n-1}.a^{n-1} = a^n a^{n-2} = 0$. پس $(a^{n-1})^2 = 0$ وبنابه فرض $a^{n-1} = 0$

خواهدبود که این تناقض است.

مثالها:

۱.زیر حلقه یک حلقه کاهش یافته وحاصلضرب حلقه های کاهش خودیک حلقه کاهش یافته است.

۲.حلقه $\mathbb{Z}$ ، هرمیدان وهرحلقه چند جمله ای روی میدان مثال هایی ازحلقه های کاهش یافته هستند.

[1] Reduced ring

۳ . $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ کاهش یافته است. توجه کنید $6\mathbb{Z}$تنها عنصر پوچتوان حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ است.

٤. $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ کاهش یافته نیست . توجه کنید که $\mathbb{Z}$٤+ ۲ عنصرپوچتوان $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ است .

قضیه ۱-۲۳:

فرض کنیدN مجموعه عناصر پوچ توان حلقه جابجایی R باشد دراین صورت $N =\bigcap_{P\lhd_p R} P$

تعریف ۱-۲٤:

اشتراک تمام ایده آل های ماکسیمال حلقه R را با J (R) نمایش می دهیم وآن را رادیکال

جیکوبسون R می نامیم.

تعریف ۱-۲۵:

اگر I , Jدو ایده آل حلقه R باشندآن گاه ایده آل حاصل تقسیم I برJرا با نماد

$(I:J)$ نشان داده وبه صورت $(I:J)=\{x \in R \mid xJ \subseteq I\}$ تعریف می کنیم.

اگر I ایده آل صفر باشددر این صورت $(0:J)$ را پوچ ساز ایده آل J گوییم وبا $Ann_R(J)$

نمایش می دهیم وداریم:

$$(0:J)= \{x\in R \mid xJ = 0 \}= Ann_R (J)$$

همریختی های حلقه ها:

تعریف ۱-۲٦:

فرض کنید R و R' دوحلقه باشد. تابع $f:R \to R'$ را همریختی حلقه ای می نامیم در صورتی که به

ازای هر $x , y \in R$ داشته باشیم :

1. $f(x+y)=f(x)+f(y)$
2. $f(x.y)= f(x).f(y)$

تعریف ۱–۲۷:

همریختی f یک یکریختی (ایزومورفیسم) است هرگاه f یک به یک وپوشا باشد. درصورتی که همریختی f پوشا باشدآن را بروریختی و اگرهمریختی f یک به یک باشد آن را تکریختی (منومورفیسم) گوییم.

مدول ها:

تعریف۱–۲۸:

فرض کنید R یک حلقه ومجموعه غیرتهی M همراه باعمل جمع یک گروه آبلی باشد. M یک R- مدول چپ (راست) است هرگاه نگاشت $R \times M \to M$ ($M \times R \to M$) باضابطه $(r,x) \to rx$, ($(x , r)\to x\, r$) موجود باشد به طوری که:

۱. به ازای هردو عضواز M مثل x, y وهرعضوازR مثلr داشته باشیم

$$r\,(x+y) = rx+ry \quad (\ (x+ y)\, r = xr+yr\ )$$

۲. به ازای هرعضواز M مثل x و هر دو عضوازR مثل s,r داشته باشیم

$$(r+s)x=rx+sx \quad , \qquad (x\,(r+s)=xr+xs\ )$$

۳. به ازای هرعضواز M مثل x و هر دو عضو از R مثل s,r داشته باشیم

$$(rs)x=r(sx) \qquad (\ x\,(rs)=(xr)s\ )$$

علامت گذاری: نماد $_RM$ یعنی M یک R- مدول چپ ونماد M_R یعنی M یک R–مدول راست و $_RM_R$ یعنی M هم R– مدول چپ وهم R– مدول راست است.

تعریف ۱–۲۹:

فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول چپ (راست) و N زیرمجموعه ناتهی از M باشد.

N را زیرمدول M گوییم اگر با تحدید جمع وضرب اسکالر در M به N ، N به یک R- مدول چپ (راست) تبدیل شود.

می توان به راحتی ثابت کرد که زیرمجموعه غیر تهی N از M ، زیر مدول M است هرگاه دارای شرایط زیر باشد.

۱ اگر $x, y \in N$ آن گاه $x - y \in N$ باشد.

۲. اگر $r \in R, x \in N$ آن گاه $rx \in N$ $(xr \in N)$ باشد.

مثال ها:

۱. فرض کنید R یک حلقه و M ، R–مدول چپ (راست) باشد. $\{0\}$ و M دو زیر مدول از M هستندکه زیرمدول های بدیهی M نامیده می شوند.

۲. اگر حلقه R را به عنوان R–مدول چپ (راست)در نظربگیریم زیرمدولهای R دقیقا ایده آل های چپ (راست) R هستند.

تعریف ۱–۳۰ :

فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. مدول M را ساده گوییم اگر

الف) $M\neq\{0\}$ باشد.

ب) تنها زیر مدول های M ، $\{0\}$ و M باشند.

تعریف ۱-۳۱:

فرض کنید R یک حلقه باشد. زیرمدول M_1 از R–مدول M را جمعوند مستقیم M گوییم هرگاه زیرمدولی ازR–مدول M مانند M_2 موجودباشد، به طوری که M جمع مستقیم M_2, M_1 باشد یعنی

$$M=M_1\oplus M_2$$

که این معادل است با اینکه $M=M_1+M_2$ و $M_1\cap M_2=\{0\}$

مثال: $M=\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول جمع مستقیم زیر مدولهای $M_1=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ و $M_2=\{\bar{0},\bar{3}\}$ است.

قضیه ۱-۳۲:

فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر M یک R–مدول ساده باشد، در این صورت ایده آل ماکسیمالی ازR مانندI وجود دارد به طوری که $M\cong\frac{R}{I}$.

قضیه ۱-۳۳.

فرض کنید R یک حلقه باشد. هرR–مدول متناهی تولید شده غیر صفر شامل حداقل یک زیر مدول ماکسیمال است .

تعریف ۱-۳٤:

فرض کنید R یک حلقه و A وB مدول هایی روی حلقه R باشند. تابع $f:A\to B$ یک همریختی R مدولی است مشروط براینکه به ازای هر $r\in R\,,\,a\,,c\,\in A$، داشته باشیم

$$f(a+c) = f(a) + f(c) \quad , \quad f(ra) = rf(a)$$

مدول های پروژکتیو(تصویری) وانژکتیو

تعریف ۱–۳۵:

یک جفت از همریختی های مدول ها مانند $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ را کامل در B گوییم هرگاه Imf=Kerg.

یک دنباله متناهی از همریختی ها ی مدول ها مانند

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

را کامل گوییم هرگاه به ازای $i = 1,2,3,\ldots,n-1$, $\mathrm{Im} f_i = Ker f_{i+1}$.

یک دنباله نامتناهی از همریختی های مدول ها مانند $\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$

را کامل گوییم هرگاه به ازای هر $i \in Z$ ، $\mathrm{Im} f_i = Ker f_{i+1}$.

تعریف ۱–۳۶:

گوییم نمودار

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \end{tikzcd}$$

جابجایی است هرگاه $\varphi'\alpha = \beta\varphi$.

هم چنین، جابجایی بودن نمودار

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$$

$\alpha \qquad \theta$

K

نیز یعنی $\theta\varphi = \alpha$.

تعریف ۱–۳۷ :

فرض کنید R یک حلقه باشد.گوییم مدولP روی حلقه R تصویری است اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \rightarrow & 0 \end{array}$$

از همریختی های R– مدول ها که سطر پایین آن کامل باشد (g بروریختی باشد)

یک همریختی R–مدول هامانند $h: P \rightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تعویض پذیرباشد (یعنی $gh = f$)

تعریف ۱–۳۸:

فرض کنید R یک حلقه باشد. گوییم مدول Jروی حلقه R انژکتیو است اگربه ازای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & \downarrow f & & \\ & & J & & \end{array}$$

از همریختی R–مدول ها باسطر بالای کامل (یعنی g یک تکریختی)یک همریختی از R مدول ها