دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

هندسه توپولوژی

عنوان پایان نامه:

ناورداهای توپولوژیکی برای سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر

استاد راهنما: دکتر حسین خورشیدی

استاد مشاور: دکتر محمدکاظم توسلی

پژوهش و نگارش: فرشته بهادری خلیلی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

معادلات هامیلتون راهکاری بود که توسط هامیلتون برای بررسی حرکت اجسامی پیشنهاد شد که بررسی آنها توسط معادلات نیوتن دشوار و یا امکان ناپذیر بود. بنابر این حل این معادلات از دیرباز مورد توجه فیزیکدانان بوده است. در حالت‌های پیچیده برای بررسی و حل این معادلات از هندسهٔ همتافته کمک می‌گیریم. این هندسه ابتدا برای بررسی سیستم‌های نجومی به وجود آمد. و پس از آن با ظهور مفاهیمی مانند براکت پواسن، نقش هندسهٔ همتافته بیشتر نمایان شده است. ثابت شده است که معادلات حرکت در حالت‌های خاص را می‌توان توسط معادلات هامیلتونی روی مدارهای هم‌الحاقی جبر لی دلخواه بیان کرد.

در این پایان‌نامه به بررسی حالت استکلف روی جبر لی $so(۴)$ می‌پردازیم. در فصل اول به مفاهیم و مقدماتی از هندسهٔ همتافته پرداخته و قضایایی را در این مورد بیان می‌کنیم. در فصل دوم ضمن تعریف مفهوم اتم و ملکول از نظر توپولوژیکی حالت‌های مختلف این نوع اتم‌ها را بیان می‌نماییم. در فصل سوم به تعریف تابع بوت پرداخته و تعمیم لم مورس را برای این نوع توابع بیان می‌کنیم. همچنین نقاط بحرانی نگاشت ممان را نیز بر اساس هسیان تابع هامیلتونی و انتگرال مکمل آن بیان می‌کنیم.در فصل چهارم ضمن معرفی مقدماتی از فیزیک کلاسیک و مکانیک کوانتمی، به بررسی نقش فضاهای همتافته در فیزیک می‌پردازیم. در فصل پایانی نیز حالت استکلف روی جبر لی $so(۴)$ را توصیف کرده و انواع ملکول‌های ممکن را برای این حالت به‌دست می‌آوریم .

واژه‌های کلیدی: سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر، معادلات اویلر، ناورداهای توپولوژیکی، سطوح هم‌انرژی.

فهرست مطالب

فصل ۱

هندسهٔ همتافته

۱.۱ فضاهای همتافته

در این فصل به تعریف فضای برداری همتافته پرداخته و قضیه‌هایی را نیز برای این فضاها بیان می‌نماییم.

یاد آوری می‌کنیم اگر $\mathbb{F}$ یک میدان و V فضای برداری روی آن باشد، یک فرم دوخطی پادمتقارن روی فضای برداری V نگاشت دو خطی $\omega : V \times V \longrightarrow R$ است که برای هر u, v داشته باشیم

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u).$$

در جبر خطی ثابت می‌شود که اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد می‌توان با انتخاب یک پایه برای V یک نمایش ماتریسی Ω برای فرم دوخطی ω روی V با استفاده از معادلهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\omega(u, v) = u^t \Omega v$$

اگر $\Omega = (\omega_{ij})$ و a^i ها مختصات u و b^j ها مختصات v باشند، آنگاه

$$\omega(u, v) = \sum \omega_{ij} a^i b^j \quad u, v \in V$$

فرم دو خطی ω را ناتباهیده می‌گوییم هرگاه برای هر $u \neq ۰$ ، بردار $v \neq ۰$ موجود باشد به طوری که

$$\omega(u, v) \neq ۰$$

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای همتافته فضای برداری Vاست که با یک فرم دوخطی پادمتقارن ناتباهیده ω مجهز شده باشد.

به فرم تعریف شده ساختار همتافته روی V می‌گوییم.

لم ۲.۱.۱. *اگر (V, ω) یک فضای همتافته باشد آنگاه بعد V زوج است.*

برهان. اگر یک پایه $e_۱, ..., e_n$ را روی فضای همتافته V ثابت در نظر بگیریم،آنگاه فرم ω به طور یکتا توسط ماتریس $\Omega = (\omega_{ij})$ تعریف می‌شود که $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. از آنجا که این ماتریس ناتباهیده و پادمتقارن است، داریم

$$det\Omega = det\Omega^T = det{-\Omega} = (-۱)^n det\Omega$$

که در آن $n = dimV$ □

قضیه ۳.۱.۱. *(فرم استاندارد برای نگاشت‌های دوخطی پادمتقارن) فرض کنیم ω یک نگاشت دوخطی پادمتقارن روی فضای برداری V باشد. در این صورت یک پایهٔ $u_1, ..., u_k, e_1, ...e_n, f_1, ..., f_n$ از V موجود است به طوری که*

$$\Omega(u_i, v) = 0 \quad \forall v$$

$$\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j) \quad \forall i, j$$

$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

[۵]

ملاحظه ۴.۱.۱. *پایهٔ به‌دست آمده در قضیه فوق الزاما یکتا نیست.*

ملاحظه ۵.۱.۱. *با نماد ماتریسی و با توجه به پایهٔ به‌دست آمده در قضیه ۳.۱.۱، داریم:*

$$\Omega(u, v) = u \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix} v$$

از قضیهٔ ۳.۱.۱ می‌توان گزارهٔ زیر را نتیجه گرفت.

گزاره ۶.۱.۱. *در فضای همتافته (V, ω) از بعد $2n$ پایه‌های $e_1, ...e_n, f_1, ..., f_n$ موجودند به طوری که ماتریس فرم ω به شکل زیر است.*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف ۷.۱.۱. به پایه‌های به‌دست آمده در گزارهٔ ۶.۱.۱ پایهٔ کانونی یا همتافته می‌گویند.

تعریف ۸.۱.۱. زیرفضای L از فضای V را همتافته می‌گویند اگر فرم ω روی L ناتباهیده باشد.

تعریف ۹.۱.۱. زیرفضای L از فضای همتافته V را ایزوتروپیک می‌گویند اگر فرم ω روی L برابر با صفر باشد. یعنی $\omega(u, v) = 0$ برای هر u, v . زیرفضای ایزوتروپیک ماکسیمال را زیرفضای لاگرانژی می‌گویند.

با توجه به ماتریس به‌دست آمده از پایه‌های کانونی به وضوح زیرفضای ایزوتروپیک L لاگرانژی است، اگر و تنها اگر بعد آن برابر با n باشد.

به عنوان مثال، زیرفضای تولید شده توسط e_1, f_1 از پایهٔ کانونی، زیرفضای همتافته و زیرفضای تولید شده

توسط $e_1, ..., e_n$ زیرفضای لاگرانژی است.

زیرفضاهای همتافته و لاگرانژی را می‌توان بر اساس فضاهای متعامد نیز توصیف کرد.

تعریف ۱۰.۱.۱. در فضای همتافته V ، u, v را متعامد گوییم اگر $\omega(u,v) = 0$.

بر این اساس اگر E یک زیرفضا از فضای برداری V باشد، فضای متعامد $E^\perp$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E^\perp = \{u|\omega(u,v) = 0 \quad \forall v \in E\}$$

از آنجا که $v \perp u$ و $u \perp v$ معادلند، داریم $(E^\perp)^\perp = E$.

همان طور که مشاهده می‌کنیم، مفهوم متعامد در فضای همتافته با مفهوم متعامد در فضای اقلیدسی متفاوت است: در فضای همتافته E و $E^\perp$ نیازی نیست الزاما متمم یکدیگر باشند. به عنوان مثال هر v بر خودش عمود است($\omega(u,v) = -\omega(v,u)$). بنابر این اگر $dimE = 1$ آنگاه $E \subseteq E^\perp$.

به وضوح تحدید ω به E ناتباهیده است اگر و تنها اگر $E \cap E^\perp = 0$ لذا می‌توان گفت زیرفضای E از فضای همتافته V همتافته است اگر و تنها اگر شرط $E \cap E^\perp = 0$ برقرار باشد. از آنجا که $(E^\perp)^\perp = E$ ، E همتافته است اگر و تنها اگر $E^\perp$ همتافته باشد.

همچنین زیرفضای E لاگرانژی است اگر و تنها اگر $E = E^\perp$.

تعریف ۱۱.۱.۱. تبدیل خطی $g : (V,\omega) \longrightarrow (V',\omega')$ را همتافته گوییم اگر ساختار همتافته را حفظ کند. یعنی داشته باشیم

$$g^*(\omega) = \omega'$$

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعهٔ تمام تبدیلات همتافته $g : V \longrightarrow V$ تشکیل یک گروه می‌دهند که به آن گروه همتافته می‌گویند و با نماد $Sp(2n, \mathbb{R})$ نشان می‌دهند که در آن $2n = dimV$.

لم ۱۳.۱.۱. *هر دو فضای همتافته از بعد یکسان یکریخت همتافته هستند.*[۵]

گزاره ۱۴.۱.۱. *اگر g یک تبدیل همتافته باشد، آنگاه*

۱) *دترمینان تبدیلات همتافته برابر با ۱ است.*

۲) *اگر $P(\lambda) = det(g - \lambda I)$ چند جمله‌ای مشخصهٔ تبدیل همتافتهٔ g باشد، آنگاه:*

$$p(\lambda) = \lambda^{2n} P(\frac{1}{\lambda})$$

همچنین اگر λ یک مقدار ویژه برای g باشد آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ نیز یک مقدار ویژه از همان مرتبه است.

برهان. ۱) برای اثبات قسمت اول کافی است $2n$–فرمی $\tau = \omega \wedge \omega \wedge ... \omega$ (فرم حجمی تولید شده توسط ω)را در نظر بگیریم. از آنجا که ω ناتباهیده است، τ نیز ناصفر و از مرتبهٔ ماکسیمال روی V می‌باشد. بنابر این τ می‌تواند به عنوان فرم حجمی در نظر گرفته شود. تبدیل همتافته g، ω و هر توانی از آن و در نتیجه τ را حفظ می‌کند. یعنی $g^*\tau = \tau$. در نتیجه برای $v_1, ..., v_n \in V$ داریم

$$\tau(v_1, ..., v_n) = g^*\tau(v_1, ..., v_n) = \tau(g(v_1), ..., g(v_n)) = (detg)\tau(v_1, ..., v_n)$$

$$\longrightarrow detg = 1$$

۲)با استفاده از تعریف تبدیل همتافته داریم $g^T \Omega g = \Omega$ پس:

$$g = \Omega^{-1} g^{-1T} \Omega$$

(توجه دارید که طبق گزارهٔ ۶.۱.۱ می‌توانیم فرض کنیم که $\Omega = J$). بنابر این

$$P(\lambda) = det(g - \lambda I) = det\Omega^{-1}(g^{-1})^T J - \lambda I) = det\Omega^{-1}(g^{-1} - \lambda I)^T \Omega =$$

$$det(g^{-1} - \lambda I) = detg^{-1} det(I - \lambda g)$$

از آنجا که $detg = detg^T = 1$ سرانجام داریم

$$P(\lambda) = det(I - \lambda g) = det\lambda(\frac{1}{\lambda} I - g) = \lambda^{2n} det(g - \frac{1}{\lambda} I) = \lambda^{2n} P(\frac{1}{\lambda})$$

□

در گزارهٔ زیر برخی خواص گروه‌های همتافته حقیقی آورده شده است.

گزاره ۱۵.۱.۱. *گروه $Sp(2n, \mathbb{R})$ دارای خواص زیر است:*

۱) $Sp(2n, \mathbb{R})$ یک گروه لی حقیقی نافشرده از بعد $n(2n + 1)$ است.

۲) جبر لی $sp(2n, \mathbb{R})$ متناظر با گروه لی $Sp(2n, \mathbb{R})$، شامل تمام ماتریس‌های A است که در شرط $A^T \Omega + \Omega A = 0$ صدق می‌کنند. اگر پایهٔ فضا کانونی باشد آنگاه

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -A_1{}^T \end{bmatrix}$$

که در آن $A_۱$ یک ماتریس دلخواه $n \times n$ و $A_۲$ و $A_۳$ ماتریس‌های متقارن هستند.

۳) *از نظر توپولوژیکی گروه همتافته $Sp(۲n, \mathbb{R})$ با حاصلضرب مستقیم گروه یکانی $U(n)$ (گروه تبدیلات یکانی روی $\mathbb{C}$) و فضای برداری اقلیدسی $\mathbb{R}^{n(n+۱)}$ همسانریخت می‌باشد.*

۴) *$Sp(۲n, \mathbb{R})$ همبند راهی است.*

۵) *$Sp(۲n, \mathbb{R})$ همبند ساده نیست و گروه بنیادی آن $\mathbb{Z}$ می‌باشد.*

برهان. اثبات این قضیه در مرجع [۲] آورده شده است. □

۲.۱ منیفلدهای همتافته

در این بخش بحث‌های مربوط به فضاهای برداری را به منیفلد دلخواه تعمیم داده و نتایج و قضایای مربوط را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک ساختار همتافته روی منیفلد هموار M، ۲-فرمی دیفرانسیل پذیر ω با ویژگی‌های زیر است

۱) ω بسته است یعنی $d\omega = ۰$.

۲) ω ناتباهیده است.

منیفلد مجهز شده با ساختار همتافته را منیفلد همتافته می‌گویند.

گزاره ۲.۲.۱. *منیفلد همتافته دارای بعد زوج است.*

برهان. نتیجهٔ مستقیم لم ۲.۱.۱ . □

گزاره ۳.۲.۱. *منیفلد همتافته جهت پذیر است.*

برهان. چون ω^n یک عنصر حجم روی M است. (مراجع [۲] و [۵] را برای توضیح بیشتر ملاحظه کنید.) □

ساده ترین مثال برای منیفلدهای همتافته، رویه‌های دوبعدی جهت‌پذیرند. ساختار همتافته آنها همان فرم سطح است.

مثال دیگر فضای همتافته، $\mathbb{R}^{۲n}$ با ساختار همتافته $\omega = d_{p_۱} \wedge d_{q_۱} + \cdots + d_{p_n} \wedge d_{q_n}$ است.

علاوه بر این مثال ها، ۳ ردهٔ مهم از منیفلدهای همتافته به شرح زیر هستند:
فضای کتانژانت، منیفلدهای کالر و مدارهای نمایش هم‌الحاقی از یک جبر لی دلخواه.

مثال ۱.۲.۴. (فضای کتانژانت) فرض کنیم M یک منیفلد هموار(نه الزاما همتافته) باشد و فرض کنیم T^*M کلاف کتانژانت آن باشد. ابتدا ۱ - فرمی α که به آن کنش می‌گویند را روی T^*M به شرح زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم ξ یک بردار مماس در فضای کتانژانت در نقطه $(x,p) \in T^*M$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\xi) = p(\Pi_*(\xi))$$

که در آن، $\Pi_* : T(T^*M) \longrightarrow TM$ دیفرانسیل تابع تصویر

$$\Pi : T^*M \longrightarrow M \quad \Pi(x,p) = x$$

است. به سادگی می‌توان دید (مثلا در مرجع [۲۰]) در مختصات کانونی، α به فرم

$$\alpha = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dqn$$

است وقتی $q_1, \ldots, q_n$ مختصات موضعی روی M و $p_1, \ldots .p_n$ مختصات متناظر آنها روی فضای کتانژانت است.

فرم $\omega = d\alpha$ در تمام شرایط یک فرم همتافته صدق می‌کند.

مثال ۱.۲.۵. (فضاهای مختلط C^n و زیرمنیفلدهای مختلط آن: منیفلدهای کالر) فرم هرمیتی استاندارد $(z,\omega) = \sum z_i \bar{\omega}_i$ را در $\mathbb{C}^n$ در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که قسمت موهومی آن، یک ساختار همتافته روی $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ است. زیرمنیفلد دلخواهی را در $\mathbb{C}^n$ در نظر بگیرید. از آنجا که تحدید یک ساختار هرمیتی به زیرمنیفلد مختلط آشکارا هرمیتی است و قسمت موهومی آن نیز ناتباهیده است، با تحدید قسمت موهومی از ساختار هرمیتی به این زیرمنیفلد، یک ۲ - فرمی بسته به دست می آوریم که آشکارا ناتباهیده است. یادآوری می‌کنیم که ساختار کالر روی یک منیفلد مختلط، یک ساختار هرمیتی است که قسمت موهومی آن یک ۲ - فرمی بسته است. به سادگی می‌توان فهمید که منیفلدهای کالر و زیر منیفلدهای مختلط آنها همتافته هستند. مثالهای منیفلد کالر صفحهٔ تصویری مختلط $\mathbb{C}P^n$و هر زیر منیفلد مختلط آن است.

ساختار همتافته ω روی $\mathbb{C}P^n$ را توضیح می‌دهیم

فرض کنیم $(z_۰ : z_۱ : ... : z_n)$ مختصات همگن در $\mathbb{C}P^n$ باشد. یکی از کارت‌های متناظر $U_۰$ را در نظر گرفته و مختصات مختلط را به روش معمول روی $\mathbb{C}P^n$ تعریف می‌کنیم یعنی

$$\omega_1 = \frac{z_1}{z_0}, ..., \omega_n = \frac{z_n}{z_0}, \quad (z_0 \neq 0)$$

در این کارت ω توسط فرمول زیر تعریف می‌شود.

$$\omega = \frac{i}{۲\Pi}\left(\frac{\sum d\omega_k \wedge d\bar{\omega_k}}{۱ + \sum |\omega_k|} - \frac{(\sum \bar{\omega_k} d\omega_k) \wedge (\sum \omega_k d\omega_k)}{۱ + \sum |\omega_k|^۲}\right)$$

به سادگی می‌توان فهمید که در کارت دیگر U_j این فرمول شکلی مشابه دارد. بنابر این یک فرم بسته ناتباهیده خوش تعریف روی تمام فضای تصویری $\mathbb{C}P^n$ داریم.

مثال ۱.۲.۶. (مدارهای نمایش هم‌الحاقی) جبر لی $\mathfrak{G}$ از گروه لی دلخواه G را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathfrak{G}^*$ فضای دوگان آن باشد و عمل هم‌الحاقی این گروه را روی $\mathfrak{G}^*$ داشته باشیم. برای سادگی، فرض می‌کنیم که با گروه‌های لی ماتریسی سر و کار داریم و بنابر این نمایش الحاقی همان رابطهٔ مزدوج معمولی در ماتریس‌ها است (که در ادامه می‌آید). فرض کنید

$$x, y, a \in \mathfrak{G}, \qquad A \in G, \qquad \xi \in \mathfrak{G}^*$$

یادآوری می‌کنیم که Ad و ad عملگرهای گروه لی و Ad^* و ad^* عملگرهای خطی روی هم‌جبر آن است. بنابر تعریف

$$Ad_A x = A^{-۱} x A, \qquad , ad_a x = [a, x] = ax - xa$$

عملگر $Ad_A^* : \mathfrak{G}^* \longrightarrow \mathfrak{G}^*$ توسط رابطهٔ زیر برای هر y تعریف می‌شود.

$$Ad_A{}^* \xi(y) = \xi(Ad_A{}^{-۱} y)$$

و به طور مشابه

$$ad_a^* \xi(y) = \xi(-ad_a y) = \xi[y, a]$$

حال بردار $\xi \in \mathfrak{G}^*$ و مدار آن تحت عمل هم‌الحاقی G را در نظر بگیرید.

$$O(\xi) = \{\eta = Ad_A{}^*\xi \mid A \in G\}$$

این مدار یک منیفلدهموار است. یک ساختار همتافته روی آن تعریف می‌کنیم. فضای مماس $T_\xi O(\xi)$ را روی مدار در نقطهٔ ξ درنظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان فهمید (مثلا در مرجع [۱۰])

$$T_\xi O(\xi) = \{\eta = ad_a{}^*\xi \mid a \in \mathfrak{G}\}$$

حال دو بردار مماس دلخواه را به فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$\eta_1 = ad^*_{a_1}\xi, \qquad \eta_2 = ad^*_{a_2}\xi$$

و تعریف می‌کنیم

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = \xi([a_1, a_2])$$

ابتدا باید خوشتعریفی تعریف فوق را ثابت کنیم. نقطهٔ η_i می‌تواند به صورت $ad^*_{a_i}\xi$ به روشهای مختلف تعریف شود. به عنوان مثال فرض کنیم

$$\eta_1 = ad^*_{a_1}\xi = ad^*_{a_1+b}\xi$$

در این صورت داریم

$$ad^*_b\xi = ad^*_{a_1+b}\xi - ad^*_{a_1}\xi = 0$$

لذا

$$\xi([a_1 + b, a_2]) = \xi([b, a_2]) + \xi([a_1, a_2]) = -ad^*_b\xi(a_2) + \xi([a_1, a_2]) = \xi([a_1, a_2])$$

که این درستی تعریف فوق را ثابت می‌کند. حال باید بررسی کنیم که ω ناتباهیده و بسته است. ناتباهیدگی به سادگی بررسی می‌شود. فرض کنیم بردار η_1 موجود است به طوری که برای هر بردار η_2 داشته باشیم

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = 0$$

که به طور معادل برای هر $a_2 \in \mathfrak{G}$ خواهیم داشت

$$\omega(\eta_۱, \eta_۲) = \xi([a_۱, a_۲]) = -ad^*_{a_۱}\xi(a_۲) = -\eta_۱(a_۲) = ۰$$

از آنجا که $a_۲$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم $\eta_۱ = ۰$ و این یعنی ω ناتباهیده است. بسته بودن ω در حقیقت از اتحاد ژاکوبی در جبر لی G به‌دست می‌آید اما اثبات استاندارد آن نیاز به مفاهیمی در مورد براکت پواسن دارد که در اینجا بیان می‌کنیم.

در ابتدا گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که امکان تعریف گرادیان یک تابع روی یک منیفلد همتافته را فراهم می‌کند.

گزاره ۷.۲.۱. *اگر (M, ω) یک منیفلد همتافته باشد، یک ساختار تقریبا مختلط J (یعنی $J^۲ = -۱$) و یک متر ریمانی $<.,.>$ روی آن موجودند به طوری که برای هر $u, v \in T_xM$*

$$\omega_x(v, Ju) = < v, u >_x$$

با توجه به متقارن و دوخطی بودن فرم $<.,.>$ داریم

$$\omega_x(Jv, Ju) = \omega_x(v, u)$$

یعنی J یک نگاشت همتافته از فضای برداری همتافته (T_xM, ω_x) می‌باشد. به علاوه

$$J^* = J^{-۱} = -J$$

جایی که J^* نمایش الحاقی J در فضای ضرب داخلی $(T_xM, <.,.>_x)$ است.[۲۰]

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم H تابع هموار روی منیفلد همتافته M باشد. بردار گرادیان اریب $SgradH$ را بر این تابع توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega(v, SgradH) = v(H)$$

که در آن v یک بردار مماس دلخواه است.

در مختصات موضعی $x^۱, ..., x^n$ رابطهٔ زیر را داریم

$$(SgradH)^i = \sum \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

که در آن ω^{ij} مؤلفه های ماتریس معکوس ω هستند.

تعریف ۹.۲.۱. میدان برداری $SgradH$ را میدان برداری هامیلتونی و تابع H را هامیلتونین میدان برداری $SgradH$ می‌نامند.

یکی از ویژگیهای میدان برداری هامیلتونی این است که آنها ساختار همتافته را حفظ می‌کنند.

گزاره ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم $\{g_t\}$ گروه تک پارامتری از دیفئومورفیسمها (شارهای هامیلتونی) متناظر با میدان هامیلتونی باشد آنگاه* [۲]

$$g^*{}_t(\omega) = \omega \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

عکس مطلب فوق نیز برقرار است [۲۴]. یعنی اگر میدان برداری v ساختار همتافته ω را حفظ کند، آنگاه فرم $i_v\omega$ بسته است و بنابر این حداقل به طور موضعی یک تابع f موجود است به طوری که $i_v\omega = df$ یا به طور معادل $v = sgradf$. میدان برداری که در این شرط صدق می‌کند را موضعا هامیلتونی می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم f و g دوتابع هموار روی منیفلد همتافته M باشند. قرار می‌دهیم

$$\{f, g\} = \omega(sgradf, sgradg) = (sgradf)(g)$$

عملگر $\{.,.\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ روی فضای توابع هموار روی M را براکت پواسن می‌نامند.

تعریف ۱۲.۲.۱. تابع هموار f روی منیفلد M را یک انتگرال (مکمل) میدان برداری v می‌گوییم اگر این تابع در طول تمام مسیرهای انتگرال میدان v ثابت باشند.به عبارت دیگر مشتقات f در طول v برابر با صفر باشد.

گزاره ۱۳.۲.۱. *ویژگی‌های براکت پواسن*

براکت پواسن در ویژگیهای زیر صدق میکند:

۱) *روی* $\mathbb{R}$ *دو خطی است*

۲) *پاد متقارن است یعنی*

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

۳) *اتحاد ژاکوبی برای آن برقرار است*

$$\{g,\{f,h\}\} + \{h,\{g,f\}\} + \{f,\{h,g\}\} = 0$$

۴) *در اتحاد لایبنیتز صدق می‌کند*

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}$$

۵) *عملگر* $sgrad$ *یک هومومورفیسم بین جبر لی همه توابع هموار روی منیفلد* M *و میدان‌های برداری آنها برقرار می‌کند. به عبارت دیگر رابطهٔ*

$$sgrad\{f,g\} = [sgradf, sgradg]$$

برقرار است.

۶) *تابع* f *یک انتگرال مکمل از میدان برداری هامیلتونی* $sgradH$ *است اگر و تنها اگر* $\{f,H\} = 0$ (*بویژه هامیلتونی* H *همیشه یک انتگرال مکمل از میدان برداری* $sgradH$ *است.*)[۲]

در بعضی موارد، مثلا هنگامی که مکانیک هامیلتونی را می‌سازیم، به جای ساختار همتافته روی منیفلد، از براکت پواسن به عنوان ساختار اصلی استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. منیفلد پواسن منیفلدی است که به براکت پواسن مجهز شده باشد. یعنی یک عملگر پادمتقارن دو خطی $\{.,.\}$ روی فضای همه توابع هموار آن موجود باشد به طوری که در شرایط ژاکوبی و لابنیتز صدق کند.

به سادگی می‌توان فهمید (مثلا در مرجع [۲]) که ساختار پواسن روی یک منیفلد می‌تواند معادل با یک میدان تانسوری پادمتقارن باشد که در روابط زیر صدق میکند:

$$A^{j\alpha}\frac{\partial A^{ki}}{\partial x^{\alpha}} + A^{i\alpha}\frac{\partial A^{jk}}{\partial x^{\alpha}} + A^{k\alpha}\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$