بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

برخی نتایج در کوهمولوژی هاشیلد از جبرهای گروهی

استاد راهنما:

دکتر محمود لشکری زاده بمی

پژوهشگر:

رضا زارعی

شهریورماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای رضا زارعی

تحت عنوان:

برخی نتایج در کوهمولوژی هاشیلد از جبرهای گروهی

در تاریخ ۸۹/۶/۱۶ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمود لشکری‌زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر فاطمه ابطحی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر اکرم یوسف‌زاده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

امضای مدیر گروه ....

تشکر و قدردانی:

خداوندا ! دستانم خالیند و دلم غرق آرزوها، یا با قدرت بیکرانت دستانم را توانا گردان یا دلم را از آرزوهای دست نیافتنی خالی کن.

شکر خداوند متعال را به جای آورده که توفیق نصیب من کرد تا این پایان نامه را به پایان برسانم از کلیه کسانیکه در این راستا همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده اند کمال تشکر را می نمایم. هم چنین از زحمات اساتید محترم و دانشجویان صمیمی و مهربان دانشگاه اصفهان و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر لشکری زاده بی که با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بودند و با صبر و حوصله بسیار مرا در مسیر این رساله هدایت فرمودند. کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

تقدیم به

روح بزرگ پدرم، کسی که نمی دانم از بزرگیش بگویم یا از مردانگی،

از سخاوت، سکوت، مهربانی و ...

به نور دیده ام، مادرم، که وجودش برای من همه مهر است

و مهر

و نثار من به پای آن، همه شرم است و شرم.

به برادران و خواهرانم که همواره یار و یاور من بودند.

چکیده

در این پایان نامه ساختاری از گروه کوهمولوژی کراندار ثانویه از یک گروه گسسته G، با ضرایب در $\ell^{\infty}(G)$ و جبر باناخ گروهی $L^1(G)$ با ضرایب در n امین دوگان فضای $(L^1(G))^{(n)}$، همچنین ساختاری از کوهمولوژی اولیه و ثانویه از $L^1(G,w)$ با ضرایب در n امین دوگان فضای $(L^1(G,w))^{(n)}$ به طوری که G یک گروه موضعاً فشرده و w یک تابع وزن روی G باشد را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس نشان می دهیم $H^3(\ell^1(S), \ell^{\infty}(G)) = 0$، جایی که S یک نیم شبکه است.

واژه های کلیدی : کوهمولوژی، جبرهای باناخ، گروه گسسته، گروه موضعاً فشرده، میانگین پذیر، نیم شبکه، جبرهای گروهی، جبرهای نیم گروهی.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول باناخ باشد. نگاشت خطی کراندار $D : A \longrightarrow X$ یک مشتق نامیده می‌شود هرگاه

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b) \qquad (a, b \in A).$$

اگر $x \in X$ وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $D(a) = a.x - x.a$ آن‌گاه مشتق D را درونی نامند. فضای کوهمولوژی $H^1(A, X)$ عبارت است از خارج قسمت فضای مشتق‌ها به مشتق‌های داخلی.

جبر باناخ A را میانگین پذیر نامند هرگاه برای هر $A-$ دومدول باناخ X، داشته باشیم $H^1(A, X^*) = 0$. این تعریف در سال ۱۹۷۲ توسط جانسون[1] در [۱] معرفی شد. همچنین A را میانگین پذیر ضعیف نامند هرگاه $H^1(A, A^*) = 0$، این تعریف در سال ۱۹۸۷ توسط بد،[2] کورتیس [3] و دیلز [4] در [۴] به این صورت گسترش داده شد که جبر باناخ جابه‌جایی A میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر برای هر $A-$ دومدول باناخ متقارن X داشته باشیم $H^1(A, X) = 0$.

---

[1] *Johnson*

[2] *Bade*

[3] *Curtis*

[4] *Dales*

نظریهٔ کوهمولوژی کراندار از گروه گسسته، بخشی از نظریهٔ کوهمولوژی از جبرهای باناخ است که به وسیلهٔ جانسون در [۱] ارائه شده است. در این زمینه به کتاب هلمسکی [5] [۹] نیز ارجاع می‌شود. جانسون [۱] از این نظریه استفاده کرد و نشان داد که $H^{2}(\ell^{1}(\mathbb{F}_{2}),\mathbb{C}) \neq 0$ و بنابر این $H^{2}(\ell^{1}(\mathbb{F}_{2}),\ell^{1}(\mathbb{F}_{2})) \neq 0$، جایی که G گروه آزاد روی دو مولد است. همچنین در [۲] نشان داد که برای هر $n \geq 2$، $H^{1}(\ell^{1}(\mathbb{F}_{2}),(\ell^{1}(\mathbb{F}_{2}))^{(n)}) = 0$.

در سال ۱۹۹۵ سینکلایر [6] و اسمیت [7] در [۳، قضیه ۸.۳.۱] ثابت کردند که $H^{2}(\ell^{1}(\mathbb{F}_{2}),\ell^{1}(\mathbb{F}_{2})) \neq 0$ و نیز $H^{2}(\ell^{1}(\mathbb{F}_{2}),\ell^{\infty}(\mathbb{F}_{2})) \neq 0$.

در [۳۰] ایوانف [8] و در [۷] ماتساموتو [9] و موریتا[10] نشان دادند که $H^{2}(\ell^{1}(G),\mathbb{C})$، برای هر گروه گسسته G با عمل بدیهی روی $\mathbb{C}$، یک فضای باناخ است.

در [۱۶] پورعباس [11] ثابت نمود که گروه کوهمولوژی ثانویه از $L^{1}(G)$ با ضرایب در $L^{1}(G)^{(2n+1)}$، برای هر گروه موضعاً فشردهٔ G و هر $n \in \mathbb{N}$، فضای باناخ است.

پایان نامهٔ حاضر مشتمل بر چهار فصل به شرح زیر می‌باشد.

---

5 Helemskii

6 Sinclair

7 Smith

8 Ivanov

9 Matsumoto

10 Morita

11 Pourabbas

فصل اول شامل مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی و $A-$ مدول‌های باناخ است که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند. در فصل دوم ابتدا نشان می‌دهیم که گروه کوهمولوژی کراندار ثانویه با ضرایب در $\ell^{\infty}(C_i)$، یعنی $H^{2}(\ell^{1}(G),\ell^{\infty}(C_i))$ یک فضای باناخ برای هر گروه گسسته G می‌باشد که C_i یک مدار در $G-$ مجموعه S است. همچنین ثابت می‌کنیم که $H^{2}(\ell^{1}(G),\ell^{\infty}(S))$ یک $\ell^{\infty}-$ حاصل جمع از فضاها و لذا یک فضای باناخ است. سپس تعریف و برخی خواص شبه مشتق و مشتق گون را بیان کرده و آن‌ها را برای محاسبهٔ $H^{2}_{b,2}(\ell^{1}(G),\ell^{\infty}(S))$ به کار می‌بریم.

در فصل سوم ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر گروه گسسته G و هر $G-$ مجموعه S، $H^{1}(\ell^{1}(G),(\ell^{1}(S))^{(2n+1)}) = 0$. سپس نشان می‌دهیم گروه کوهمولوژی ثانویه از $L^{1}(G)$ با ضرایب در $(L^{1}(G))^{(2n+1)}$ برای هر گروه موضعاً فشرده G، و هر $n \in \mathbb{N}$، یک فضای باناخ است.

در فصل چهارم برای هر گروه موضعاً فشرده G و هر $n \in \mathbb{N}$، ابتدا نشان می‌دهیم که $H^{1}(L^{1}(G,w),L^{1}(G,w)^{(2n+1)}) = 0$. سپس ثابت می‌کنیم گروه کوهمولوژی ثانویه از $L^{1}(G,w)$ با ضرایب در $L^{1}(G,w)^{(2n+1)}$ یک فضای باناخ است، که در آن w یک تابع وزن با $\sup\{w(g)w(g^{-1}) \;:\; g \in G\} < \infty$ می‌باشد. همچنین برای هر نیم شبکه S، نشان می‌دهیم $H^{3}(\ell^{1}(S),\ell^{\infty}(S)) = 0$ است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، تعاریف و قضایای مقدماتی را که در طی فصول بعدی این تحقیق مورد نیاز است، به‌طور گذرا بیان می‌کنیم و از اثبات قضایا صرف‌نظر می‌کنیم.

۱—۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱ : یک نیم نرم روی X تابعی چون $x \longrightarrow ||x||$ از X به $[\circ, \infty)$ است به طوری که

(i) به ازای هر $x, y \in X$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (نامساوی مثلثی)،

(ii) به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in K$، $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.

به وضوح خاصیت دوم ایجاب می‌کند که $||0|| = \circ$. نیم نرمی که در آن $||x|| = \circ$ وقتی برقرار باشد که $x = \circ$، یک **نرم** نامیده می‌شود. هرفضای برداری مجهز به یک نرم را، یک **فضای برداری نرم دار (یا فضای خطی نرم دار)** گوییم. معمولاً نرم روی فضای خطی را با $||.||$ نشان می‌دهیم.

اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد، تابع $d(x,y) = ||x - y||$ یک متر روی X تعریف می‌کند، زیرا

$$||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z||,$$

$$||x - y|| = ||(-۱)(y - x)|| = ||y - x||$$

توپولوژی تعریف شده توسط این متر، **توپولوژی نرمی** روی X نامیده می‌شود. دو نرم مانند $||.||_۱$ و $||.||_۲$ روی X **هم ارز** هستند هر گاه ثابت‌هایی چون $C_۱, C_۲ > \circ$ وجود داشته باشند که

$$C_۱ ||x||_۱ \leq ||x||_۲ \leq C_۲ ||x||_۱, \quad (x \in X).$$

نرم های هم ارز، مترهای هم ارز تعریف می‌کنند و از این رو توپولوژی‌های یکسان و دنباله‌های کشی یکسان تعریف می‌کنند.

هر فضای برداری نرم دار X که نسبت به متر نرمی کامل باشد یک **فضای باناخ** نامیده می‌شود. مثلاً اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد، $L^p(\mu)$ با نرم $||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ (مشروط بر این که توابعی که تقریباً همه جا مساویند را یکی

بگیریم) یک فضای باناخ است. توجه کنید که اگر به $L^1(\mu)$ صرفاً به چشم مجموعه‌ای شامل توابع نگاه کنیم، آنگاه $||.||_1$ فضای یک نیم نرم است، اما اگر توابعی را که تقریباً همه جا برابرند یکی بگیریم، یک نرم است.

تعریف ۲.۱ : نگاشت خطی مانند $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری نرم دار، **کراندار** نامیده می‌شود هرگاه ثابتی مانند $C \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$،

$$||Tx|| \leq C||x||.$$

تعریف ۳.۱ : فرض کنیم $L(X, Y)$ فضای همه نگاشت‌های خطی کراندار مجهز به نرم زیر باشد

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\{||Tx|| \ : \ ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{\frac{||Tx||}{||x||} \ : \ x \neq 0\} \\ &= \inf\{C > 0 \ : \ ||Tx|| \leq C||x|| \ , \ \ \forall \ x \in X\}. \end{aligned}$$

$T \in L(X, Y)$ **وارون پذیر** یا **ایزومورفیسم** (**یکریختی**) نامیده می‌شود هرگاه T دوسویی و T^{-1} کراندار باشد(به عبارت دیگر به ازای ثابتی چون $C > 0$، $||Tx|| \geq C||x||$)، T یک **ایزومتری** (**طولپا**) نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $x \in X$، $||Tx|| = ||x||$.

تعریف ۴.۱ : گوییم فضای باناخ A یک **جبر باناخ** است اگر در آن ضرب چنان تعریف شده باشد که نامساوی

$$||xy|| \leq ||x||\ ||y|| \quad (x, y \in A). \tag{۱}$$

قانون شرکت پذیری $x(yz) = (xy)z$، قوانین پخشپذیری

$$(y+z)x = yx + zx,\ x(y+z) = xy + xz \tag{۲}$$

و رابطه

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \tag{۳}$$

به ازای هر اسکالر α برقرار باشد. به عنوان مثال $L^1(G)$ با ضرب پیچشی زیر یک جبر باناخ است.

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,\ (x \in G,\ f, g \in L^1(G)).$$

زیرا طبق رابطه

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1\ ||g||_1$$

نامساوی نرم‌ها برقرار است و شرکت پذیری نیز واضح است (با اعمال قضیه فوبینی).

تعریف ۵.۱ : فرض کنیم X یک فضای برداری روی K باشد که در آن $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$. هر نگاشت خطی از X به K یک **تابعک خطی** روی X نامیده می‌شود. اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد، فضای $L(X, K)$ متشکل از تابعک‌های خطی کراندار X را، **فضای دوگان** X نامند و آن را با X^* یا X' نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۱ : فضای توپولوژیکی X را موضعاً فشرده گوییم هرگاه هر نقطه آن دارای یک همسایگی باز با بستار فشرده باشد.

تعریف ۷.۱ : فرض کنیم G را یک گروه و همچنین یک فضای توپولوژیک باشد، اگر

۱) نگاشت $xy \longrightarrow (x,y)$ از $G \times G$ به G، نگاشتی پیوسته باشد،

۲) نگاشت $x^{-1} \longrightarrow x$ از G به G پیوسته باشد.

در این صورت G را یک **گروه توپولوژیک** می‌نامیم.

گروه توپولوژیکی که به عنوان فضای توپولوژیکی، موضعاً فشرده باشد را گروه موضعاً فشرده نامند.

تعریف ۸.۱ : فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار (یا فضای نرم دار خطی) و X^* فضای دوگان آن (یعنی تابعک های خطی پیوسته روی X) باشد. در این صورت منظور از **توپولوژی ضعیف** $w = \sigma(X, X^*)$ روی فضای باناخ X، ضعیف ترین توپولوژی روی X است که تحت آن تمام توابع در X^* پیوسته باشند.

همگرایی نسبت به این توپولوژی به **همگرایی ضعیف** شهرت دارد. بنا بر این اگر $\{x_\alpha\}$ یک تور در X باشد، آن‌گاه $x_\alpha \longrightarrow x$ به طور ضعیف اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$، $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.

حال فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار و X^* دوگان آن باشد. همانند تعریف فوق، توپولوژی ضعیف روی X^*، توپولوژی تعریف شده با X^{**} است.

توپولوژی جالب تر، توپولوژی تولید شده توسط X (به عنوان زیر فضایی از X^{**}) است که **w^*ــ توپولوژی** روی X^* نامیده می‌شود. منظور از توپولوژی ضعیف

$w^* = \sigma(X^*, X)$ روی X^*، ضعیف ترین توپولوژی روی X^* است که تحت آن برای هر $x \in X$، تابعک $f \longrightarrow f(x)$ $(f \in X^*)$ پیوسته باشد. به طور خلاصه w^*- توپولوژی همان توپولوژی همگرای نقطه به نقطه است یعنی: $f_\alpha \longrightarrow f$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$.

بالاخره، فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. آن‌گاه توپولوژی روی $L(X,Y)$ که به وسیلهٔ نگاشت‌های ارزیابی $T \mapsto Tx$ $(x \in X)$ تولید می‌شود، **توپولوژی عملگری قوی** روی $L(X,Y)$ نامیده می‌شود و توپولوژی تولید شده توسط تابعک‌های خطی $T \mapsto f(Tx)$ $(x \in X, f \in Y^*)$، **توپولوژی عملگری ضعیف** روی $L(X,Y)$ نامیده می‌شود.

این توپولوژی‌ها برحسب همگرایی بهتر درک می‌شوند: $T_\alpha \longrightarrow T$ به طور قوی، اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی نرمی Y، به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم $T_\alpha x \longrightarrow Tx$. در حالی که $T_\alpha \longrightarrow T$ به طور ضعیف، اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی ضعیف Y، به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم $T_\alpha x \longrightarrow Tx$.

قضیه ۹.۱ (قضیه آلااُغلو): فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار باشد، در این صورت گوی واحد بستهٔ $B^* = \{f \in X^* : ||f|| \leq ۱\}$ در X^* نسبت به w^*- توپولوژی، فشرده است.

اثبات : به قضیه ۵.۱۸ از [۳۲] رجوع شود.■

تعریف ۱۰.۱ : فرض کنیم X، Y و Z فضاهای خطی نرم دار باشند. در این صورت نگاشت $S: X \times Y \longrightarrow Z$ را **دو خطی** گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

۱) برای هر عنصر $x \in X$، $y \mapsto S(x,y)$ خطی باشد.

۲) برای هر عنصر $y \in Y$، $x \mapsto S(x,y)$ خطی باشد.

در حالتی که $Z = \mathbb{F}$ باشد S را یک **تابعک دو خطی** نامند.

نگاشت دو خطی $S : X \times Y \longrightarrow Z$ را **دو خطی کراندار** گوییم هرگاه عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد به طوری که

$$||S(x,y)|| \leq M||x|| \, ||y|| \quad (x \in X \ , \ y \in Y).$$

مجموعه همه نگاشت‌های دو خطی کراندار از $X \times Y$ به Z را با $B(X,Y;Z)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $B(X,Y;Z)$ با نرم زیر، یک فضای باناخ است،

$$||S|| = \sup\{||S(x,y)|| \ : \ ||x|| \leq ۱, \ ||y|| \leq ۱\} \quad (S \in B(X,Y;G)).$$

مشابه با توابع دو خطی، $n-$ **خطی‌ها** از $X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n$ به Z تعریف می‌شوند. در حالت خاص که $X_۱ = X_۲ = \cdots = X_n = X$ آن را با $BL^n(X,G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱ : فرض کنید D یک مجموعه باشد و رابطه‌ای مانند $\leq$ روی D وجود داشته باشد به طوری که $(D, , \leq)$،

۱) متعدی باشد: یعنی اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \lambda$ آن‌گاه $\alpha \leq \lambda$

۲) ارشمیدسی باشد: یعنی برای هر $\alpha, \beta \in D$، $\lambda \in D$ موجود باشد که $\alpha \leq \lambda$ و $\beta \leq \lambda$.

در این صورت D را **جهت دار** می‌نامیم.

یک **تور** در مجموعه X، تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$. با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$ تور f را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به طور مختصر با (x_α) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۲ : تور $\{x_\alpha\}$ در جبر باناخ A **همانی تقریبی چپ (راست) کراندار** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم، $x_\alpha a \longrightarrow a$ ($ax_\alpha \longrightarrow a$)، و $C > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر α، $||x_\alpha|| < C$.

همانی تقریبی را با (e_α) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۳ : فرض کنیم S یک مجموعه ناتهی باشد. مجموعه همه نگاشت‌های از S به $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{C}^S$ نشان می‌دهیم که برای $f,g \in \mathbb{C}^S$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، عمل نقطه ای روی S به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱) $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$،

۲) $(fg)(s) = f(s)g(s)$،

۳) $(\alpha f)(s) = \alpha f(s)$،

۴) $۱(s) = ۱$.

نرم روی $\mathbb{C}^S$ به صورت $||f|| = \sup\{|f(s)| \ : \ s \in S\}$تعریف می‌شود.

برای هر $s \in S$ تابع دیراک، $\delta_s : S \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\delta_s(x) = \begin{cases} ۱ & s = x \\ ۰ & s \neq x \end{cases}$$

تعریف ۱.۱۴ : G را یک گروه(گسسته) و S را یک فضای توپولوژیک در نظرمی گیریم. S را یک **Gـ مجموعه** نامیم. اگر

۱) تابع تعریف $g.x \mapsto gx$ از $G \times S \longrightarrow S$ موجود باشد که برای هر $g,h \in G$ و