وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

زیر منیفلدهای اریب فضاهای تصویری مختلط و هذلولوی مختلط

استاد راهنما

دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور

دکتر فرضعلی ایزدی

پژوهشگر

بابک حسن زاده سیدی

زمستان ۱۳۹۲

تبریز – ایران

تقدیم به

مادر مهربانم

و پدر بزرگوارم

سپاس گزاری...

اکنون که پایان‌نامه ی حاضر ، آماده شده است برخود واجب می دانم از حمایتهای بی دریغ، بذل توجه و مساعدت های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی سپاس‌گزاری نمایم.
از جناب آقای دکتر فرضعلی ایزدی ، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم و از آقای دکتر محمد المکچی نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند کمال تشکر وقدر دانی را دارم.
بوسه می زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم همچنین تشکر می‌کنم از دوستان عزیزم، به پاس کمک های بی‌دریغ و دلگرمی های بی پایان آنها ، که در این راه پشتیبان من بودند.

بابک حسن زاده
بهمن ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

در فضاهای $CP^۲$ و $CH^۲$ نشان خواهیم داد که زیر منیفلدهای اریب زیادی وجود دارد و سپس معادلات دیفرانسیلی مربوط به این زیر منیفلدها را بدست آورده و با حل آنها و بدست آوردن جواب خصوصی این زیر منیفلدها را شناسایی خواهیم کرد. نشان می دهیم که در هر فضا فرم مختلط سطوح اریب حقیقی مینیمال نیستند.
کلمات کلیدی : زیر منیفلد های اریب، فضاهای تصویری مختلط، فضاهای هذلولوی مختلط، زیر منیفلد های مینیمال

پیشگفتار

زیر منیفلد های اریب ابتدا توسط بنگ ین چن [۱] ریاضی دان آمریکایی تایوانی تبار معرفی شد. سپس محققین بسیاری (عمدتا آسیایی) در این زمینه تحقیقات ارزشمندی ارائه داده و این نظریه را توسعه داده اند، این نوع زیر منیفلد ها حتی برای زیر منیفلد های غیر مختلط نیز شناسایی شده است و حتی نوع خاصی از سابمرژن های ریمانی [۲] موسوم به سابمرژن های اریب نیز کشف شده اند. نظریه زیر منیفلدهای اریب هم اکنون به رکود گراییده و فعالترین بخش نظریه سابمرژن های ریمانی اریب بروی منیفلدهای ریمانی می باشد. کلاس قابل توجهی از زیر منیفلدهای، منیفلدهای هرمیتی، زیر منیفلدهای اریب هستند که زیر منیفلدهایی با زاویه ویرتینگر [۳] ثابت می باشند. در این پایان نامه زیر منیفلدهای اریب فضاهای مختلط تصویری و مختلط هذلولوی بررسی خواهد شد، بویژه، نشان داده خواهد شد که سطوح اریب حقیقی زیادی در $CP^۲$ و $CH^۲$ قرار دارند و تعدادی سطوح اریب مینیمال نیز در $C^۲$ قرار دارد. در قسمت اول این پایان نامه اثبات می شود که هیچ سطح اریب مینیمال حقیقی در $CP^۲$ و $CH^۲$ وجود ندارد. در بخش دوم یک روش کلی برای بدست آوردن عبارات صریح برخی زیر منیفلد های اریب ارائه می شود. با بکار گیری این فرایند کلی، می توان عبارات صریح سطوح اریب خاصی از $CP^۲$ و $CH^۲$ را تعیین کرد. در نتیجه، توانایی کامل برای تعیین سطوح اریبی که در معادلات پایه صدق می کنند حاصل خواهد شد. در نهایت با بکار گیری این فرایند اثبات می شود که غوطه وری طولپای $\theta-$اریب خاصی از صفحه هذلولوی بتوی یک صفحه هذلولوی مختلط در کل منحصر بفرد نیستند.

---
[۱] Bang Yen Chen
[۲] Riemannian submersion
[۳] Wirtinger

فصل ۱

۱

۱.۱ منیفلد های ریمانی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $f: M \to N$ نگاشتی هموار باشد. آنگاه f
(۱)غوطه وری نامیده می شود اگر $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ یک به یک باشد ،نقطهp دلخواه است.
(۲) نشاننده گوییم اگر غوطه وری یک به یک باشد.

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنیم $f: M \to N$ نگاشتی هموار باشد و $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ برای هر $q \in M$ که $f(q) = p$ پوشا باشد .آنگاه مجموعه $F = \{q \in M : f(q) = p\}$ یک منیفلد هموار است و $dimF = dimM - dimN$ علاوه بر آن نگاشت شمول $i : F \to M$ نشاننده است.*

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم M یک $n-$منیفلد هموار باشد. متریک ریمانی g روی M عبارت است از میدان تانسوری از نوع (۲ ,۰) که در شرایط زیر صدق کند :
۱-متقارن است یعنی $g(X,Y) = g(Y,X)$ برای هر $X, Y \in \chi(M)$
۲-برای هر $g_p, p \in M$ فرم دو خطی متقارن ناتبهگون مثبت معین روی T_pM است. یعنی

$$\forall X_p \in T_pM, g_p(X_p, Y_p) \geq 0$$

و اگر

$$g_p(X_p, Y_p) = 0, \forall Y_p \in T_pM$$

آنگاه $X_p = 0$

منیفلد هموار M با متریک ریمانی مذکور g را یک منیفلد ریمانی گوییم و با (M, g) نشان می دهیم.

مثال ۴.۱.۱. *فرض کنید $h : R^n \to R$ نگاشتی با ضابطه $h(x^1, ..., x^n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ باشد . پس صفر یک مقدار منظم h است و $S^{n-1} = h^{-1}(0) = \{x_i \in R^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$ کره واحد در R^n است ، متریک القایی از R^n روی S^{n-1} متریک کانونی نامیده می شود، که یک متر ریمانی می باشد.*

تعریف ۵.۱.۱. التصاق خطی ∇ روی منیفلد هموار M یک نگاشت $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ بصورت $(X, Y) \to \nabla_X Y$ است که در شرایط زیر صدق می کند :

۱. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

۲. $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

۳. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

۴. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, X, Y, Z \in \chi(M)$

که در آن $f \in C^\infty(M)$

مثال ۶.۱.۱. *فرض کنیم $(x_1, ..., x_n)$ دستگاه مختصاتی روی R^n باشد. پس برای $X, Y \in \chi(R^n)$ داریم، $X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x_i}$، $Y = \sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ که در آن $f^i, g^i \in C^\infty(R^n)$ التصاق $\nabla : \chi(R^n) \times \chi(R^n) \to \chi(R^n)$ را با $\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(g^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ تعریف می کنیم به آسانی دیده می شود که ∇ در شرایط التصاق صدق می کند. این التصاق ∇ روی R^n را التصاق اقلیدسی می گوییم.*

تبصره ۷.۱.۱. *اگر ∇ التصاق یکتایی روی منیفلد هموار M باشد، که در دو شرط زیر نیز صدق کند، آن را التصاق لوی- چیویتا [1] گوییم.*

۱. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

۲. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

تعریف ۸.۱.۱. برای التصاق ∇ روی منیفلد هموار M میدان تانسوری R از نوع $(1, 3)$ را تانسور انحنای وابسته به التصاق ∇ گوییم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

که در آن $X, Y, Z \in \chi(M)$.

قضیه ۹.۱.۱. *تانسور انحنای R وابسته به التصاق ∇ روی منیفلد ریمانی (M, g) در شرایط زیر صدق می کند:*

۱) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$

[1] Levi-Civita

۲) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

۳) $R(X,Y;Z,W) = R(Z,W;X,Y), X,Y,Z \in \chi(M).$

که در آن $R(X,Y;Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ و $X,Y,Z \in \chi(M)$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی ، $p \in M$ و $X,Y \in T_pM$ پایه هایی دلخواه از یک زیر فضای دو بعدی π از T_pM باشد. آنگاه عدد

$$K(X,Y) = \frac{R_m(X,Y,Y,X)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$$

را انحنای برشی π در نقطه p می نامیم، ثابت می شود این عدد وابسته به پایه X,Y نیست و آن را با $K(\pi)$ نمایش می دهیم.

۲.۱ منیفلد های مختلط

تعریف ۱.۲.۱. ساختار تقریبا مختلط J روی منیفلد هموار M عبارت است از میدان تانسوری نوع $(1,1)$ که در هر نقطه مانند p در M یک خودریختی در T_pM است که $J^2 = -1$. منیفلد هموار M با ساختار تقریبا مختلط J را منیفلد تقریبا مختلط گوییم و با (M,J) نشان می دهیم.

فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی باشد. دستگاه مختصات موضعی مختلط $(z^1,...,z^n)$ را در نظر می گیریم که با $(x^1,y^1,...,x^n,y^n)$ بوسیله $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ که $i = 1,...,n$ مرتبط است. بدیهی است که M منیفلد هموار حقیقی$2n$ بعدی است. فضای مماس T_xM از M در نقطه x دارای پایه طبیعی $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, (\frac{\partial}{\partial y^1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})_x, (\frac{\partial}{\partial y^n})_x\}$ است که $i = 1,...,n$، قرار می دهیم :

$$J_x(\frac{\partial}{\partial x^i})_x = (\frac{\partial}{\partial y^i})_x, J_x(\frac{\partial}{\partial y^i})_x = -(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$$

پس J_x یکریختی $J_x : T_xM \to T_xM$ را تعریف می کند. که مستقل از انتخاب مختصات است و در روابط کشی- ریمان صدق می کند.

تعریف ۲.۲.۱. متریک هرمیتی روی منیفلد تقریبا مختلط (M,J) عبارت است از یک متریک ریمانی g که $g(JX,JY) = g(X,Y)$.

تعریف ۳.۲.۱. منیفلد تقریبا هرمیتی (M,J,g) را کاهلر [۲] گوییم، اگر ساختار تقریبا مختلط J روی M موازی باشد، یعنی

$$(\nabla_X J)(Y) = 0, X,Y \in \chi(M)$$

[۲] Kaehler

فرض کنیم (M, J, g) منیفلد کاهلری باشد و $K(p)$ انحنای برشی M با صفحه $P \subseteq T_qM$ که بوسیله بردارهای یکال متعامد X, Y تولید شده اند. اگر P تحت J پایا باشد، یعنی $J_qP = P$ آنگاه $K(p)$ انحنای برشی تحلیلی نامیده می شود. اگر P تحت J پایا و X بردار واحدی در P باشد، آنگاه $\{X, JX\}$ پایه یکال متعامدی برای P است و بنابراین $K(p) = R(X, JX; JX, X)$ خواهد بود که با $H(X)$ نشان می دهیم. اگر $K(p)$ برای همه صفحات J-پایا ثابت باشد M را فضای با انحنای برشی تحلیلی ثابت می گوییم. همچنین منیفلد کاهلری (M, J, g) را با انحنای برشی تحلیلی ثابت ، فضا فرم می گوییم.

۳.۱ فضاهای CP^n, CH^n

ابتدا منیفلد مختلط CP^n را معرفی می کنیم :
فرض کنیم $W = (w^1, ..., w^{n+1}), Z = (z^1, ..., z^{n+1})$ دو نقطه در $W^{n+1} - \{0\}$ باشند و مجموعه $Z \sim W$ را در نظر می گیریم، اگر عدد مختلط مخالف صفری مانند α موجود باشد بطوریکه $W = \alpha Z$. بنا بر این، $\sim$ یک رابطه هم ارزی در $C^{n+1} - \{0\}$ تعریف می کند. فضای مختلط تصویری CP^n مجموعه ای از کلاس های هم ارزی $C^{n+1} - \{0\}/\sim$ است با توپولوژی خارج قسمتی از $C^{n+1} - \{0\}$ حال U_α را به صورت زیر معرفی می کنیم :

$$U_\alpha = \{(z^1, ..., z^\alpha, ..., z^{n+1})\} \in CP^n \mid Z^\alpha \neq 0\}$$

فرض کنیم نگاشت $\psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow C^{n+1}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$\psi_\alpha([(z^1, ..., z^\alpha, ..., z^{n+1})]) = (\frac{Z^1}{Z^\alpha}, ..., \frac{Z^{\alpha-1}}{Z^\alpha}, \frac{Z^{\alpha+1}}{Z^\alpha}, ..., \frac{Z^{n+1}}{Z^\alpha})$$

پس داریم :

$$\psi_\alpha^{-1}(w^1, ..., w^n) = [(w^1, ..., w^{\alpha-1}, 1, w^\alpha, ..., w^n)]$$

و بنا براین

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(z^1, ..., z^n) = (\frac{Z^1}{Z^\beta}, ..., \frac{Z^{\alpha-1}}{Z\beta}, \frac{1}{Z^\beta}, \frac{Z^\alpha}{Z^\beta}, ..., \frac{Z^{\beta-1}}{Z^\beta}, \frac{Z^{\beta+1}}{Z^\beta}, ..., \frac{Z^n}{Z^\beta})$$

پس $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ تحلیلی است و فضای مختلط تصویری یک منیفلد مختلط است.
اکنون فرض کنیم C^n فضای مختلط n بعدی با ساختار کاهلری طبیعی $(J', \langle,\rangle)$ باشد.کره واحد S^{2n+1} بصورت زیر تعریف می شود :

$$S^{2n+1} = \{(z^1, ..., z^n) \in C^n \mid \sum_{i=1}^{n} z^i \bar{z}^i = 1\}$$
$$= \{(x^1, y^1, ..., x^n, y^n) \in R^{2n} \mid \sum_{i=1}^{n} [(x^i)^2 + (y^i)^2] = 1\}$$

میدان برداری واحد ξ نرمال به S^{2n+1} بصورت زیر است :

$$\xi = -\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} (x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i})$$

از آنجاییکه

$$\langle J'\xi, \xi\rangle = \langle J'^2 \xi, J'\xi\rangle = -\langle \xi, J'\xi\rangle$$

نتیجه می شود $\langle J'\xi, \xi\rangle = 0$ یعنی $J'\xi \in T(S^{2n+1})$ قرار می دهیم $J'\xi = -iV'$ که $i : S^{2n+1} \longrightarrow C^{n+1}$ یک غوطه وری است و iV' یک میدان برداری واحد مماس به S^{2n+1} است ، که با پایه طبیعی iV' بصورت زیر نوشته می شود:

$$iV' = \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} (-y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i})$$

متریک g' را روی S^{2n+1} که از متریک C^n القا شده است را در نظر می گیریم. یک فرمی u' را روی S^{2n+1} بوسیله

$$u'(X') = g'(V', X') = \langle iV', iX'\rangle$$

برای هر $X' \in T(S^{2n-1})$ معرفی می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$u' = \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} (-y^i dx^i + x^i dy^i)$$

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم M یک زیر منیفلد n بعدی از یک منیفلد m بعدی $\bar{M}$ باشد. کنج موضعی یکا متعامد $e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_m$ را طوری انتخاب می کنیم که که در تحدید آن به M بردارهای $e_1, ..., e_n$ مماس به M و $e_{n+1}, ..., e_m$ نرمال به M باشند. فرض کنیم $1 \le A, B, C, ... \le m$ و $1 \le i, j, k, ... \le n$ و فرض کنیم که $\omega^1, ..., \omega^n, \omega^{n+1}, ..., \omega^n$ کنج دوگان باشند. بنا براین خواهیم داشت

$$\omega_B^A = -\omega_A^B \Rightarrow \omega_B^A + \omega_A^B = 0$$

که $\omega^A(X)=\langle X,e_A\rangle$ و $1\le A\le m$ و $X\in\chi(\bar{M})$. فرم التصاق ω^A_Bرا به صورت زیر معرفی می کنیم :

$$\bar{\nabla}_X e_B=\sum_{C=1}^m \omega^B_C(X)e_C$$

که $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی روی $\bar{M}$است.
حال در ادامه فرض کنیم که v^i مولفه iام iV' در مختصات مختلط $z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$ از C^{n+1} باشد. پس v^i بعنوان میدان برداری مکان با $v^i=\sqrt{-1}z^i$ نشان داده شده و در نتیجه منحنی های انتگرال iV' دوایر عظیمه هستند.

$$S^1=\{\,e^{\sqrt{-1}\theta}\mid 0\le\theta\le 2\pi\}$$

نگاشت $S^{2n+1}\times S^1\longrightarrow S^{2n+1}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$(z,e^{\sqrt{-1}\theta})\mapsto ze^{\sqrt{-1}\theta}$$

بنابراین S^1 روی S^{2n+1} عمل می کند و فضای خارج قسمتی از S^{2n+1} بوسیله رابطه هم ارزی القا شده بوسیله S^1 فضای مختلط تصویری CP^n می باشد.

تعریف ۲.۳.۱. تار y در Y تحت تابع $f:X\longrightarrow Y$ تصویر وارون $\{y\}$ تحت f است یعنی

$$f^{-1}(\{y\})=\{x\in X;f(x)=y\}$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی n بعدی با متریک ریمانی g از کلاس C^r باشد . زیر مجموعه $S(M)$ از TM را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$S_x(M)=:\{v\in T_xM\mid g(v,v)=1\}$$

$$S(M)=:\bigcup_{x\in M}S_x(M)$$

اگر $\pi\mid_{S(M)}$ را با نماد π نشان دهیم آنگاه $(S(M),\pi,M,S^{2n+1})$ یک کلاف تاری خواهد بود که آن را کلاف کروی واحد می نامیم. با توجه به تعاریف بالا S^{2n+1},CP^n,S^1 یک کلاف کروی تشکیل می دهند .
در حقیقت $S_x(M)$ با کره S^{n-1} دیفئومورف است. در نتیجه بعد آن برابر $n-1$ است و $S(M)$ یک زیر منیفلد $2n-1$ بعدی از C^r از TM است. تارهای این کلاف $S_x(M)=\pi^{-1}(x)\subset S(M)$ است که در آن نگاشت تصویر $\pi:SM\to M$ توسط $\pi(x.v)=x$ تعریف می شود. لذا با ثابت ماندن x می توان نتیجه گرفت که:

$$S_x(M)=\pi^{-1}(x)=\{v\in T_xM\mid\parallel v\parallel=1\}$$

با کره S^{n-1} دیفئومورف است. اکنون مجموعه زیر را تعریف می کنیم:

$$H_p(S^{2n+1})=\{X'\in T_p(S^{2n+1})\mid u'(X')=0\}$$

بنابراین u'یک کلاف کروی روی S^{2n+1}, CP^n, S^1 تعریف می کند و داریم:

$$T_p(S^{2n+1}) = H_p(S^{2n+1}) \oplus span\{V'_p\}.$$

گوییم $H_p(S^{2n+1})$ و $span\{V'_p\}$ به ترتیب زیر فضای افقی و زیر فضای عمودی از $T_p(S^{2n+1})$ هستند. بنا به تعریف زیر فضای افقی $H_p(S^{2n+1})$ یکریخت با $T_{\pi(p)}(CP^n)$ است. که π تصویر طبیعی S^{2n+1} روی CP^n است. بنابراین برای میدان برداری X روی CP^n ، میدان برداری افقی منحصر بفرد X' از S^{2n+1} موجود است بطوریکه $\pi(X') = X$. میدان برداری X' را ترفیع افقی X می نامیم و با X^* نشان می دهیم.

گزاره ۴.۳.۱. *بعنوان یک زیرفضا از $H_p(S^{2n+1}), T_p(C^{n+1})$ زیرفضایی J' پایا است. بنابراین، ساختار تقریبا مختلط J می تواند روی $T_{\pi(p)}(CP^n)$ القا شود و خواهیم داشت:*

$$(JX)^* = J'iX^* \tag{۱.۱}$$

سپس با استفاده از فرمول گاوس برای میدان برداری عمودی V' و میدان برداری افقی X' از $T_{\pi(p)}(CP^n)$ محاسبه می کنیم که :

$$\begin{aligned} \nabla^E_{X'} iV' &= i\nabla_{X'}V' + g'(A'X', V')\xi \\ &= i\nabla_{X'}V' + \langle iX', iV'\rangle\xi \\ &= i\nabla_{X'}V' \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

که ∇^E نمایش التصاق اقلیدسی از E^4است و ∇'نمایش التصاق S^{2n+1} و A' نمایش عملگر شکل در جهت میدان برداری ξ است. اکنون با استفاده از رابطه (۱, ۲) و معادله وینگارتن نتیجه می شود که :

$$\begin{aligned} \nabla_{X'}V' &= -\nabla^E_{X'}(J'\xi) = -J'\nabla^E_{X'}\xi \\ &= J'(iA'X') = J'iX' \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

با استفاده از روابط (۱, ۱) و (۱, ۳) می توان نوشت:

$$\nabla_{X^*}V' = (JX)^* \tag{۴.۱}$$

متذکر می شویم که از تعریف مشتق لی، مشتق لی ترفیع افقی از یک میدان برداری در جهت میدان برداری قائم صفر است، در نتیجه:

$$0 = L_{V'}X^* = [V', X^*] = \nabla_{V'}X^* - \nabla_{X^*}V'$$

با استفاده از (۱ ,۴)، نتیجه می شود:

$$\nabla_{V'} X^* = (JX)^* \tag{۵.۱}$$

متریک ریمانی g و التصاق ∇ در CP^n را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$g(X,Y) = g'(X^*, Y^*) \tag{۶.۱}$$

$$\nabla_X Y = \pi(\nabla'_{X^*} Y^*) \tag{۷.۱}$$

پس $(\nabla_X Y)^*$ بخش افقی $\nabla'_{X^*} Y^*$ است و بنابراین

$$\nabla'_{X^*} Y^* = (\nabla_X Y)^* + g'(\nabla'_{X^*} Y^*, V')V' \tag{۸.۱}$$

با استفاده از روابط (۱ ,۴) و (۱ ,۶) می توان محاسبه کرد که:

$$g'(\nabla'_{X^*} Y^*, V') = -g'(Y^*, \nabla'_{X^*} V') = -g'(Y^*, (JX)^*) = -g(Y, JX)$$

با استفاده از (۱ ,۸) نتیجه می شود:

$$\nabla'_{X^*} Y^* = (\nabla_X Y)^* - g(JX, Y)V' \tag{۹.۱}$$

فرض کنیم Γ یک منحنی در S^{2n+1} باشد، که میدان برداری مماس $\frac{d\Gamma}{ds}$ افقی است، قرار می دهیم:

$$\gamma(s) = \pi(\Gamma(s))$$

پس $\gamma(s)$ یک منحنی در CP^n است و میدان برداری مماس $\dot\gamma$ از $\gamma(s)$ بصورت $\pi(\frac{d\Gamma}{ds})$ می باشد.
بنابراین $\frac{d\Gamma}{ds}$ ترفیع افقی $\dot\gamma$ است و

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \pi(\nabla'_{\frac{d\Gamma}{ds}} \frac{d\Gamma}{ds})$$

بنا براین، اگر $\Gamma(s)$ یک ژئودزیک S^{2n+1} باشد، پس $\gamma(s)$یک ژئودزیک CP^nاست. بالعکس فرض $\gamma(s)$ کنیم ژئودزیک CP^n باشد، نقطه $x \in CP^n$ باشد و برای هر نقطه $\omega \in \pi^{-1}(x) \subset S^{2n+1}$ یک ژئودزیک منحصر بفرد $\Gamma(s)$ موجود است که بردار مماس در ω همان $\dot\gamma^*(0)$ است. پس، $\Gamma(s)$ ترفیع افقی ژئودزیک $\gamma(s)$ است و می توان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\Gamma(s) = \omega coss + \dot\gamma^* sins$$

توجه می کنیم که ω میدان برداری مکان در نقطه بدیهی است، $\omega \in S^{2n+1} \subset C^n = E^{2n}$.
بنابراین هر ژئودزیک $\gamma(s)$ از CP^n بصورت زیر نوشته می شود:

$$\gamma(s) = \pi(\omega coss + \dot{\gamma}^* sins)$$

با استفاده از (۱ ,۹)، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}
[X^*, Y^*] &= [X, Y]^* + g'([X^*, Y^*], V')V' \\
&= [X, Y]^* + g'(\nabla'_{X^*} Y^* - \nabla'_{Y^*} X^*, V')V' \\
&= [X, Y]^* + g'((\nabla_X Y)^* - g(JX, Y)V' - (\nabla_Y X)^* + g(JY, X)V', V')V'
\end{aligned}$$

و بنابراین :

$$[X^*, Y^*] = [X, Y]^* - 2g(JX, Y)V'. \qquad (۱۰.۱)$$

حال با استفاده از(۱ ,۴) ,(۱ ,۵) ,(۱ ,۹) ,(۱ ,۱۰) تانسور انحنای فضای CP^n بصورت زیر محاسبه می شود :

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla'_{[X,Y]} Z \\
&= \pi\{\nabla'_{X^*}(\nabla_Y Z)^* - \nabla'_{Y^*}(\nabla_X Z)^* - \nabla'_{[X,Y]^*} Z^*\} \\
&= \pi\{\nabla'_{X^*}(\nabla'_{Y^*} Z^* + g(JY, Z)V') - \nabla'_{Y^*}(\nabla'_{X^*} Z^* + g(JX, Z)V') \\
&- \nabla'_{[X^*,Y^*]+2g(JX,Y)V'} Z^*\} \\
&= \pi\{\nabla'_{X^*}\nabla'_{Y^*} Z^* + g(JY, Z)V')\nabla'_{X^*} V' - \nabla'_{Y^*}\nabla'_{X^*} Z^* \\
&- g(JX, Z)\nabla'_{Y^*} V' - \nabla'_{[X^*,Y^*]} Z^* - 2g(JX, Y)\nabla'_{V'} Z^*\} \\
&= \pi\{R'(X^*, Y^*)Z^* + g(JY, Z)J'iX^* - g(JX, Z)J'iY^* \\
&- 2g(JX, Y)J'iZ^*\}. \qquad (۱۱.۱)
\end{aligned}$$

چون تانسور انحنای R' از S^{2n+1} در رابطه زیر صدق می کند :

$$\begin{aligned}
R'(X^*, Y^*)Z^* &= g'(Y^*, Z^*)X^* - g'(X^*, Z^*)Y^* \\
&= g(Y, Z)X^* - g(X, Z)Y^* \qquad (۱۲.۱)
\end{aligned}$$

نتیجه می گیریم که تانسور انحنای CP^n بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(JY, Z)JX \\
&= g(JX, Z)JY - 2g(JX, Y)JZ \qquad (۱۳.۱)
\end{aligned}$$

فرض کنیم K_{XY} انحنای برشی CP^n باشد. پس بنا به تعریف انحنای برشی و از (۱۲,۱) نتیجه می شود :

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \\ &= \frac{g(Y,Y)g(X,X)-g(X,Y)^2+3g(JX,Y)^2}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \\ &= 1+\frac{3g(JX,Y)^2}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} = 1+3cos\theta \end{aligned} \qquad (۱۴.۱)$$

که θ زاویه بین صفحه $\{X,Y\}$ و $\{JX,JY\}$ است. چون در CP^n خواهیم داشت $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، درنتیجه

$$1 \leq K_{XY} \leq 4$$

انحنای برشی تحلیلی از یک منیفلد مختلط را بصورت زیرتعریف می کنیم :

$$H(X) = K_{X,JX} = \frac{g(R(X,JX)JX,X)}{g(X,X)^2} \qquad (۱۵.۱)$$

بنابراین انحنای برشی تحلیلی CP^n بصورت زیر محاسبه می شود:

$$H(X) = 1+\frac{3g(X,X)^2}{g(X,X)^2} = 4 \qquad (۱۶.۱)$$

حال فرض کنیم $C^{n,1}$ تصویر از فضای برداری C^{n+1} مجهز به فرم هرمیتی زیر باشد:

$$\langle U,V\rangle = -u_{n+1}\tilde{v}_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} u_j\tilde{v}_j$$

که $U=(u_1,...,u_{n+1})$ و $V=(v_1,...,v_{n+1})$ ، این بردارها در مجموعه های:

$$N_- = \{V \in C^{n,1} \mid \langle V,V\rangle < 0\}$$

$$N_\circ = \{V \in C^{n,1} \mid \langle V,V\rangle = 0\}$$

$$N_+ = \{V \in C^{n,1} \mid \langle V,V\rangle > 0\}$$

که به ترتیب منفی ، پوچ ، مثبت نامیده می شوند قرار دارند. فرض کنیم C^n مشمول در فضای مختلط تصویری CP^n بعنوان مجموعه ای از بردارها باشد ، که در مختصات بالا صدق می کند. فرض کنیم $[.,.] : C^{n,1} - \{0\} \longrightarrow CP^n$ تصویر سازی با ضابطه زیر باشد :

$$[(v_1,...,v_{n+1})] = (\frac{v_1}{v_{n+1}},...,\frac{v_n}{v_{n+1}})$$

فضای مختلط هذلولوی CH^n،تصویر بردارهای منفی در $C^{n,1}$ می باشد، یعنی $CH^n = [N_-]$.
اگر $\tilde{M}^m(4\epsilon)$ یک $m-$ منیفلد کاهلری با انحنای برشی تحلیلی4ϵ و $f : M \longrightarrow \tilde{M}^m(4\epsilon)$ یک غوطه وری طولپا باشد، برای هر بردار X مماس به M قرار می دهیم $JX = PX + FX$ که PX مولفه مماس و FX مولفه قائم است. برای هر بردار ناصفر X مماس به M در نقطه p زاویه $\theta(X)$، بین JX و T_pM زاویه ویرتینگر X [3] نامیده می شود. یک غوطه وری $f : M \longrightarrow \tilde{M}^m(4\epsilon)$ اریب نامیده می شود، اگر دارای زاویه ویرتینگر ثابت باشد و زاویه θ از یک غوطه وری اریب زاویه اریبی نامیده می شود. یک زیر منیفلد اریب با زاویه اریبی θ ، θاریب نامیده می شود و غوطه وری های اریب بکلی حقیقی و تحلیلی، غوطه وری هایی با زاویه اریبی $\frac{\pi}{2}$ و ۰ هستند، یک غوطه وری اریب، اریب حقیقی است اگر نه تحلیلی باشد و نه بکلی حقیقی.

تبصره ۱.۳.۵. در سرتاسر این پایان نامه فقط از دو ساختار تقریبا مختلط زیر استفاده خواهیم کرد:

$$J_0(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m) = (-b_1, ..., -b_m, a_1, ..., a_m)$$

$$J_1^-(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m) = (-a_2, a_1, ..., -a_m, a_{m-1}, b_2, -b_1, ..., b_m, -b_{m-1})$$

مثال ۱.۳.۶. برای هر $0 < \alpha$ ، نگاشت $f : R^2 \longrightarrow R^4$ را با ضابطه $f(u, v) = (u\cos\alpha, u\sin\alpha, v, 0)$ داریم. برای هر نقطه دلخواه مانند p در R^2 داریم:

$$\{df_p\} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $\{e_1, e_2\}$ یک کنج موضعی یکامتعامد روی R^2 باشد، می توان آن را چنین انتخاب کرد:

$$e_1 = \frac{df_p(\frac{\partial}{\partial u})}{\|df_p(\frac{\partial}{\partial u})\|} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0, 0)$$

$$e_2 = \frac{df_p(\frac{\partial}{\partial v})}{\|df_p(\frac{\partial}{\partial v})\|} = (0, 0, 1, 0)$$

$$J_0e_2 = (-1, 0, 0, 0) \text{ ، } J_0e_1 = (0, 0, \cos\alpha, \sin\alpha)$$

پس می بینیم که $\langle J_0e_1, e_2\rangle = \cos\alpha$ و $\langle J_0e_2, e_1\rangle = -\cos\alpha$ و نیز داریم $|\langle J_0e_i, e_j\rangle| = \cos\alpha > 0$ ، که مقداری ثابت است. که نتیجه می دهد R^2 زیر منیفلد اریب در R^4 است. بنابراین f یک صفحه اریب با زاویه اریبی α در R^4 تعریف می کند.

[3] Wirtinger angle

مثال ۷.۳.۱. برای هر $K > 0$ و ثابت، نگاشت $f : R^2 \longrightarrow R^4$ را با ضابطه زیر داریم:

$$f(u,v) = (u, K\cos v, v, k\sin v)$$

پس برای هر نقطه دلخواه $p = (a,b) \in R^2$، داریم:

$$\{df_p\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k\sin b \\ 0 & 1 \\ 0 & k\cos b \end{bmatrix}$$

اکنون $\{e_1, e_2\}$ را به عنوان کنج موضعی روی R^2 محاسبه می کنیم خواهیم داشت:

$$\| df_p(\frac{\partial}{\partial u})_p\| = 1, \| df_p(\frac{\partial}{\partial v})_p\| = \sqrt{k^2\sin^2 b + k^2\cos^2 b + 1} = \sqrt{k^2+1}$$

قرار می دهیم:

$$e_1 = \frac{df(\frac{\partial}{\partial u})}{\| df(\frac{\partial}{\partial u})\|} = (1, 0, 0, 0)$$

$$e_2 = \frac{df(\frac{\partial}{\partial v})}{\| df(\frac{\partial}{\partial v})\|} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(0, -k\sin v, 1, k\cos v).$$

بطوریکه $J_0 e_1 = (0, 0, 1, 0)$ و $J_0 e_2 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(-1, -k\cos v, 0, -k\sin v)$ داریم:

$$\langle J_0 e_1, e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(0+0+1+0) = \frac{1}{k^2+1}$$

$$\langle J_0 e_2, e_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}}$$

بنابراین

$$|\langle J_0 e_i, e_j\rangle| = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, 1 \leq i \neq j \leq 2$$

با انتخاب $e_2 = J_0 e_1$ چنین نتیجه می گیریم که f یک سطح اریب، با زاویه اریبی $\arccos(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}})$ تعریف می کند.

مثال ۸.۳.۱. اگر $\alpha : (a,b) \longrightarrow R^۲$ با ضابطه $\alpha(s) = (g(s), h(s))$ یک منحنی با سرعت واحد در $R^۲$ و k عددی مثبت باشد، پس آن می تواند بررسی شود که $f : R \times (a,b) \longrightarrow R^۴$ با ضابطه $f(u,s) = (-k\sin u, g(s), ks\cos u, h(s))$ تعریف می شود. یک سطح اریب حقیقی در $R^۴$ است.

مثال ۹.۳.۱. فرض کنید N یک سطح مختلط در $C^۲ = (E^۴, J_۰)$ باشد. بنابراین برای هر α ثابت، $۰ \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲}$ ، که N یک سطح اریب در $(E^۴, J_\alpha)$ با زاویه اریبی α است. هر کجا که J_α ساختار تقریبا مختلط سازگار روی $E^۴$ تعریف می کند

$$J_\alpha(a,b,c,d) = (\cos\alpha)(-c,-d,a,b) + (\sin\alpha)(-b,a,d,-c)$$

این مثال نشان می دهد که بی نهایت سطح اریب حقیقی مینیمال در $C^۲ = (E^۴, J_۰)$ وجود دارد.

مثال ۱۰.۳.۱. برای هر k مثبت ثابت داریم که

$$x(u,v) = (e^{ku}\cos u\cos v, e^{ku}\sin u\cos v, e^{ku}\cos u\sin v, e^{ku}\sin u\sin v)$$

یک سطح اریب حقیقی با زاویه اریبی $\theta = \cos^{-۱}(k/\sqrt{۱+k^۲})$ و انحنای میانگین ناثابت $\frac{k}{۲}(۱+k^۲)$ تعریف می کند.

مثال ۱۱.۳.۱. برای هر $k > ۰$

$$x(u,v,w,z) = (u, v, k\sin w, k\sin z, kw, kz, k\cos w, k\cos z)$$

یک زیر منیفلد اریب در $C^۴$ با زاویه اریبی k $\cos^{-۱}$ تعریف می کند.
اگر M یک سطح $\theta-$اریب حقیقی در یک سطح کاهلری $\tilde{M}^۲$ باشد، و اگر $e_۱$ یک بردار واحد مماس به M باشد با انتخاب یک پایه یکا متعامد متناسب شده $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴\}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:
در این پایان نامه چون فضای کلی بحث $C^۲$ است و می دانیم فضای $C^۲$ با $R^۴$ ایزومورف است و

$$T_p(C^۲) = spann\{\frac{\partial}{\partial x^۱}, \frac{\partial}{\partial y^۱}\frac{\partial}{\partial x^۲}, \frac{\partial}{\partial y^۲}\}$$

و

$$J_۰e_۱ = Pe_۱ + Fe_۱ = e_۳$$

$$Pe_۱ = \cos\theta e_۳, Fe_۱ = \sin\theta e_۳ \Rightarrow e_۳ = (\csc\theta)Fe_۱$$

$$J_۰e_۲ = Pe_۲ + Fe_۲ = e_۴$$

$$Pe_۲ = \cos\theta e_۴, Fe_۲ = \sin\theta e_۴ \Rightarrow e_۴ = (\csc\theta)Fe_۲$$

$$J_1 e_1 = Pe_1 + Fe_1 = e_2$$

$$Pe_1 = \cos\theta e_2, Fe_1 = \sin\theta e_2 \Rightarrow e_2 = (\sec\theta) Pe_1$$

پس داریم:

$$e_1, e_2 = (\sec\theta)Pe_1, e_3 = (\csc\theta)Fe_1, e_4 = (\csc\theta)Fe_2$$

این پایه را پایه یکا متعامد متناسب شده گوییم.

تعریف ۱.۳.۱۲. منیفلد ریمانی کامل با انحنای برشی ثابت را فضا فرم گوییم.
همچنین مربع انحنای میانگین H^2 و انحنای گاوس K، برای یک سطح اریب در فضا فرم مختلط $\tilde{M}^2(4\epsilon)$ در نامعادله زیر صدق می کند:

$$H^2(p) \geq 2K(p) - 2(1 + 3\cos^2\theta)\epsilon \tag{1.17}$$

در نقطه دلخواه $p \in M$، تساوی این نامعادله فقط در حالتی برقرار است که پایه فضای مماس همان پایه یکا متعامد متناسب شده باشد و عملگر شکل M در نقطه p به شکل زیر باشد.

$$\{A_{e_3}\} = \begin{bmatrix} 3\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
$$\{A_{e_4}\} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $f : M \to \tilde{M}^m(4\epsilon)$ یک غوطه وری طولپا از یک $n-$منیفلد ریمانی بتوی $\tilde{M}^m(4\epsilon)$ باشد. دومین فرم اساسی و عملگر شکل f، را به ترتیب با h و A نشان می دهیم و التصاق لوی-چیویتا رویMو $\tilde{M}$ را نیز به ترتیب با ∇ و $\tilde{\nabla}$ نمایش می دهیم.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{1.18}$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{1.19}$$

که X و Y میدانهای برداری مماس به M و ξ قائم به M است. دومین فرم اساسی و عملگر شکل با رابطه $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle h(X,Y), \xi\rangle$ به هم مربوط می شوند. بردار انحنای میانگین $\vec{H}$ غوطه وری به صورت $\vec{H} = \frac{1}{n} trace h$ تعریف می شود. تانسور انحنای M و $\tilde{M}^m(4\epsilon)$ را هم به ترتیب با R و $\tilde{R}$ نشان می دهیم و معادله گاوس را داریم:

$$\tilde{R}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$