دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پیشنهاد موضوع تحقیقاتی برای پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان:

برخی قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک فازی

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

استاد مشاور

دکتر هاشم پروانه‌مسیحا

پژوهشگر

سمیه عبدلی‌ارمکی

دی ۱۳۹۰

تقدیم به

پدرم، که حد بی‌نهایت پیشرفت من آرزوی اوست

و

مادرم، که آرامش امروز من نتیجه رنج دیروز اوست

و

همسرم، که تپش‌های قلبم از آن اوست.

چکیده

در این پایان‌نامه، مفهوم فضای متریک فازی به کمک t- نرم‌های پیوسته ارائه می‌شود. همچنین مفاهیم $dil(f,t)$ و $\Delta(f,t)$ و لیپ شیتز فازی نگاشت f، بین فضاهای متریک فازی بیان می‌شود. به ویژه نگاشت انقباضی فازی را تعریف می‌کنیم ونشان می‌دهیم برای خودنگاشت f روی فضای متریک فازی کامل X اگر $dil(f,t) < \Delta(f,t)$ باشد، آن‌گاه خودنگاشت f دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است . همچنین برخی از قضایای نقطه ثابت مشترک را روی فضای متریک فازی، ثابت می‌کنیم.

کلمات کلیدی: فضای متریک فازی، نگاشت لیپ شیتز، t- نرم، نگاشت انقباضی فازی، نقطه ثابت، نقطه ثابت مشترک.

فهرست مطالب

پیش گفتار

یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه فضای متریک، وجود و یکتایی نقطه ثابت خودنگاشت‌ها روی فضای متریک است. [۱] باناخ[۱] در سال ۱۹۲۲ با بیان قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ که بعدها به نام نگاشت انقباضی معروف شد، شیوه‌ی جدیدی را برای اثبات قضایای نقطه ثابت بنا کرد.
پس از معرفی مجموعه‌های فازی توسط زاده[۲] بسیاری از ریاضیدانان تعریف‌های مختلفی از فضای متریک فازی را بیان کردند. جرج[۳] و ورامانی[۴] به کمک t-نرمهای پیوسته، فضاهای متریک فازی را معرفی و ویژگی‌های این فضا را بررسی کردند. این نظریه تغییرات جزئی ولی جالبی را در آنچه که برخی از ریاضیدانان از جمله میچالک[۵] و کراموسیل[۶] مطرح کرده بودند، ایجاد کرد. به عنوان مثال برای ایجاد توپولوژی هاسدورف، تغییراتی در تعریف فضای متریک فازی ایجاد شد. سپس گربیک[۷][۱۴] با تعریف دنباله G-کوشی، فضای متریک فازی G-کامل را تعریف کرد و قضیه نقطه ثابت باناخ را به فضای متریک فازی G-کامل گسترش داد. در این پایان‌نامه برخی از قضایای نقطه ثابت در فضای متریک فازی کامل (جورج و ورامانی) و همچنین فضای متریک فازی G-کامل و گربیک کامل بیان شده است . همچنین نگاشت انقباضی فازی و روابط $dil(f,t)$ و $\Delta(f,t)$ تعریف شده است. و در ادامه شرایط وجود نقطه ثابت خودنگاشت تحت اثر نگاشت Ψ بیان شده است. در

---

[۱] Banach
[۲] Zadeh
[۳] Gorge
[۴] Veeramani
[۵] Michalek
[۶] Kramosil
[۷] Grabiec

این پایان نامه علاوه بر شرایط وجود نقطه ثابت برای یک خودنگاشت فازی، شرایط وجود نقطه ثابت مشترک چند خودنگاشت فازی نیز بررسی شده است. مهم‌ترین هدف این پایان‌نامه که مطالب اصلی آن از مراجع [۱۷] ، [۸]، [۴]، [۷]، [۱۴]، [۱۱]، [۱۳] ،[۵] استخراج گردیده است، گردآوری مجموعه‌ای از قضایای نقطه ثابت در فضای متریک فازی و ارائه مثال‌هایی جهت کامل شدن این مجموعه بوده است. امیدوارم این مجموعه‌ی کوچک مورد توجه و عنایت علاقه‌مندان این زمینه از آنالیز ریاضی واقع شود.

فصل ۱

برخی مفاهیم فضای متریک فازی

۱-۱ فضای متریک فازی

در این بخش به معرفی فضاهای متریک فازی و همچنین برخی از ویژگی‌های فضاهای متریک فازی می‌پردازیم. جرج[۱] و ورامانی[۲] به کمک t-نرم‌های پیوسته، فضاهای متریک فازی را معرفی و ویژگی‌های این فضا را بررسی کردند. در واقع آنها با ایجاد تغییرات در فضای متریک فازی معرفی شده از سوی دیگران توانستند به معرفی توپولوژی هاسدورف القا شده توسط متر فازی بپردازند. لازم به ذکر است در طول این پایان نامه دنباله $\{x_n\}$ جایگزین $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ شده است. برای معرفی فضای متریک فازی ابتدا تابع پیوسته t-نرم را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱. [۵] عملگر دلخواه $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ را t- نرم پیوسته گوییم، اگر به ازای هر $a, b, c, d \in [0,1]$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $a * b = b * a$ ؛

(۲) $a * (b * c) = (a * b) * c$ ؛

(۳) عملگر $*$ پیوسته باشد ؛

---

[۱] George

[۲] veeramani

(۴) به ازای هر $a \in [0,1]$، $a * 1 = a$؛

(۵) اگر $a \leq c$ و $b \leq d$ آن‌گاه $a * b \leq c * d$.

مثال ۱-۱-۱. برای مثال $T_P(a,b) = ab$ و $T_M(a,b) = min\{a,b\}$ مثال‌هایی برای t-نرم پیوسته می‌باشند.

تعریف ۱-۱-۲. [۵] (جرج و ورامانی) سه تایی مرتب $(X, M, *)$ را یک فضای متریک فازی[۳] می‌نامیم، هرگاه X مجموعه‌ای ناتهی و M یک مجموعه فازی روی $X^2 \times (0,\infty)$ و عملگر $*$ یک t-نرم پیوسته باشد و به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $s, t > 0$ شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $M(x,y,t) > 0$؛

(۲) $M(x,y,t) = 1$ برای هر $t > 0$ اگروتنها اگر $x = y$؛

(۳) $M(x,y,t) = M(y,x,t)$؛

(۴) $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$؛

(۵) تابع $M(x,y,.) : (0,\infty) \to (0,1]$ پیوسته باشد.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنید $(X, M, *)$ فضای متریک فازی باشد. دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به $x \in X$ گوییم اگر برای هر $t > 0$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$.

تعریف ۱-۱-۴. [۱۲] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. همچنین $\{(x_n, y_n, t_n)\}$ یک دنباله در $X^2 \times (0,\infty)$ و همگرا به نقطه $(x,y,t) \in X^2 \times (0,\infty)$ در این صورت اگر $\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t_n) = M(x,y,t)$ باشد، آن‌گاه M را پیوسته گوییم.

مثال ۱-۱-۲. اگر $X = \mathbb{N}$ و عملگر $* = T_p$ و نگاشت M به صورت زیر باشد:

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{x}{y} & x \leq y, \\ \frac{y}{x} & y \leq x. \end{cases}$$

در این صورت $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی است.

---

[۳] $fuzzy\ metric$

تعریف ۱-۱-۵. [۱۴] فرض کنید $(X, M, *)$ و $(Y, N, \odot)$ فضاهای متریک فازی باشند. نگاشت f از فضای متریک فازی $(X, M, *)$ به $(Y, N, \odot)$ را یک متر[۴] گوییم، اگر برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ داشته باشیم $N(f(x), f(y), t) = M(x, y, t)$.

مثال ۱-۱-۳. فرض کنید $X = \mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی و عملگر $* = T_P$ باشد. همچنین برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$، $M(x, y, t) = [exp(\frac{|x-y|}{t})]^{-1}$. نشان می‌دهیم $(X, M, *)$ فضای متریک فازی است. به وضوح سه شرط نخست فضای متریک فازی برای $(X, M, *)$ برقرار است. با توجه به اینکه $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ و برای $t, s > 0$ ، $\frac{t+s}{s} > 1$ و $\frac{t+s}{t} > 1$ لذا

$$|x-z| \leq (\frac{t+s}{t})|x-y| + (\frac{t+s}{s})|y-z|$$

پس

$$\frac{|x-z|}{(t+s)} \leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s}$$

و با توجه به اینکه نگاشت نمایی صعودی است

$$exp(\frac{|x-z|}{(t+s)}) \leq exp(\frac{|x-z|}{t}) exp(\frac{|y-z|}{s})$$

درنتیجه

$$M(x, y, t) M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t+s). \qquad \square$$

لم ۱-۱-۱. [۴] *نگاشت* $M(x, y, .) : (0, \infty) \to (0, 1)$ *نا نزولی است.*

برهان: اگر $t_1 < t_2$، آن‌گاه $M(y, y, t_2 - t_1) = 1$. و با توجه به خواص فضای متریک فازی و t-نرم پیوسته داریم $M(x, y, t_1) * M(y, y, t_2 - t_1) \leq M(x, y, t_2)$ در نتیجه

$$M(x, y, t_1) \leq (x, y, t_2). \qquad \square$$

---

[۴] isometry

مثال ۱-۱-۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک دلخواه و $\varphi : (\circ,\infty) \to (\circ,۱)$ یک نگاشت پیوسته و صعودی باشد، به طوری که $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = ۱$. در این صورت

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+۱}, \varphi(x) = sin(\frac{\pi x}{۲x+۱}), \varphi(x) = ۱ - e^{-x}, \varphi(x) = e^{-۱/x}$$

مثال هایی برای نگاشت مورد نظر خواهند بود. برای هر $x,y \in X$ و $t > \circ$ اگر تعریف کنیم $M(x,y,t) = (\varphi(x))^{d(x,y)}$، آن‌گاه (X,M,T_P) فضای متریک فازی است.

مثال ۱-۱-۵. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و برای هر $a,b \in [\circ,۱]$، $a.b$ نشان دهنده ضرب معمولی اعداد حقیقی باشد . اگر M_d متریک فازی تعریف شده روی $X^۲ \times (\circ,\infty)$ برای هر $x,y \in X$ به صورت زیر باشد:

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$$

آن‌گاه $(X,M_d,.)$ یک فضای متریک فازی است. این فضا، فضای متریک فازی استاندارد[۵] نامیده می‌شود.

برهان: برای اثبات، به بررسی شرط $M_d(x,y,t).M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$ می‌پردازیم. زیرا سایر خواص فضای متریک فازی به وضوح برای $(X,M_d,.)$ برقرار است. برای این منظور توجه کنید که به ازای هر $a,b,c,d > \circ$ رابطه زیر برقرار است

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} \geq \frac{a}{a+c}.\frac{b}{b+d} \qquad (۱)$$

و با توجه به اینکه (X,d) یک فضای متریک است، $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ پس

$$t+s+d(x,z) \leq t+d(x,y)+s+d(y,z),$$

درنتیجه

$$\frac{t+s}{t+s+d(x,z)} \geq \frac{t+s}{t+d(x,y)+s+d(y,z)}.$$

چون $t,s,d(x,y),d(y,z),d(x,z) > \circ$، بنابراین از رابطه (۱) داریم

$$\frac{t+s}{t+d(x,y)+s+d(y,z)} \geq \frac{t}{t+d(x,y)}.\frac{s}{s+d(y,z)}$$

درنتیجه $M_d(x,y,t).M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$. □

[۵] $standard\ fuzzy$

لم ۱-۱-۲. [۴] *فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی است. برای هر $0 < r < 1$ و $t > 0$ و $x, y \in X$ می‌توان $0 < t_0 < t$ را چنان یافت که $M(x, y, t_0) > 1 - r$.*

برهان: اگر برای هر $0 < s < t$ داشته باشیم $M(x, y, s) \leq 1 - r$. از پیوستگی $M(x, y, .)$ نتیجه می شود $M(x, y, t) \leq 1 - r$، که یک تنا قض است. پس $0 < t_0 < t$ وجود دارد به طوری که $M(x, y, t_0) > 1 - r$. $\square$

لم ۱-۱-۳. *الف) به ازای هر $r_1, r_2 \in (0, 1)$ که $r_1 > r_2$، می‌توان $r_3 \in (0, 1)$ را چنان یافت که $r_1 * r_3 > r_2$.*

ب) همچنین برای هر $r_4 \in (0, 1)$ می‌توان $r_5 \in (0, 1)$ را چنان یافت به طوری که $r_5 * r_5 \geq r_4$.

برهان: الف) اگر به ازای هر $r \in (0, 1)$ داشته باشیم $r_1 * r \leq r_2$ ، از پیوستگی $*$ نتیجه می‌شود $r_1 * 1 \leq r_2$. پس $r_1 \leq r_2$ و این متناقض است با انتخاب r_1, r_2. لذا $r_3 \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که $r_1 * r_3 > r_2$.

برهان (ب) شبیه (الف) است. $\square$

۱-۲ توپولوژی القا شده توسط متر فازی

تعریف ۱-۲-۱. [۴] فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی است.گوی باز $B(x, r, t)$ به شعاع r و مرکز x برای هر $۱ > r > ۰$ و هر $t > ۰$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > ۱ - r\}.$$

قضیه ۱-۲-۱. [۴] *فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی است. در این صورت متریک فازی $(X, *)$ تشکیل یک توپولوژی روی X می‌دهد که پایه این توپولوژی خانواده گوی‌های باز به شکل*

$$\mathfrak{B} = \{B(x, r, t) : x \in X, ۰ < r < ۱, t > ۰\}$$

است. این توپولوژی τ_M نامیده می شود و خانواده تمام زیر مجموعه هایی از X چون A است که برای هر $x \in A$ و $t > ۰$، $۰ < r < ۱$ موجود است، به طوری که $B(x, r, t) \subset A$.

برهان: ثابت می‌کنیم $\mathfrak{B}$ تشکیل یک پایه برای τ_M می دهد. بنابراین کافی است شرایط (۱) و (۲) را بررسی کنیم.

(۱) برای هر $x \in X$ یک عضو $\mathfrak{B}$ چون B وجود داشته باشد به طوری که $x \in B$.

(۲) هرگاه x متعلق به دو عضو $\mathfrak{B}$ مانند $B_۱$ و $B_۲$باشد، در این صورت عضو دیگری از $\mathfrak{B}$ چون $\beta_۳$ وجود داشته باشد، به طوری که $x \in B_۳ \subset B_۱ \cap B_۲$.

شرط (۱) بوضوح برقرار است. زیرا فرض کنید $x \in X$ برای هر$۱ > r > ۰$ و هر $t > ۰$ $x \in B(x, r, t)$. برای اثبات شرط (۲) ابتدا نشان می‌دهیم که اگر y متعلق به عضوی از پایه مانند $B(x, r, t)$ باشد، آن‌گاه عضو دیگری از پایه مانند $B(y, r', t')$ به مرکز y وجود دارد به طوری که $B(y, r', t') \subset B(x, r, t)$. هرگاه $y \in B(x, r, t)$، آن‌گاه $M(x, y, t) > ۱ - r$. در نتیجه $۰ < t_۰ < t$ وجود دارد به طوری که $M(x, y, t_۰) > ۱ - r$. فرض کنید $r_۰ = M(x, y, t_۰)$، چون $r_۰ > ۱ - r$ بنابراین $۰ < s < ۱$ وجود دارد به طوری که $r_۰ > ۱ - s$.گوی باز $B(y, ۱ - r_۱, t - t_۰)$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که $B(y, ۱ - r_۱, t - t_۰) \subset B(x, r, t)$.

فرض کنید $z \in B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ در این صورت $M(y, z, t - t_0) > r_1$. درنتیجه

$$\begin{aligned} M(x,z,t) &\geq M(x,y,t_0)*M(y,z,t-t_0) \\ &\geq r_0 * r_1, \\ &\geq 1 - s, \\ &> 1 - r. \end{aligned}$$

ولذا $z \in B(x, r, t)$. حال اگر $z \in B_1 \cap B_2$ باشد $r_1, r_2 \in (0, 1)$ و $t_1, t_2 > 0$ وجود دارند، به طوری که

$$\begin{aligned} y &\in B(y, r_2, t_2) \subset B_2, \\ y &\in B(y, r_1, t_1) \subset B_1. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $r_3 = min\{r_1, r_2\}, t_3 = min\{t_1, t_2\}$ در این صورت با محاسبه ساده می توان نشان داد $B(y, r_3, t_3) \subset B_1 \cap B_2$. □

قضیه ۱-۲-۲. [۵] *فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی و τ_M توپولوژی القا شده توسط متریک فازی $(M, *)$ باشد. در این صورت برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X، $\{x_n\}$ نسبت به τ_M همگرا به x است اگر و فقط اگر برای هر $t > 0$ داشته باشیم $lim_n M(x, x_n, t) = 1$.*

برهان: $t > 0$ را ثابت در نظر می‌گیریم. فرض کنید $x_n \to x$ در این صورت برای هر $\epsilon \in (0, 1)$ $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_0$، $x_n \in (x, \epsilon, t)$. یعنی $M(x, x_n, t) > 1 - \epsilon$ و $1 - M(x, x_n, t) < \epsilon$ بنابراین $lim_n M(x, x_n, t) = 1$.

برعکس، $t > 0$ را ثابت در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $lim_n M(x, x_n, t) = 1$، آن‌گاه برای هر $\epsilon \in (0, 1)$ داده شده، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای $n \geq n_0$، $M(x, x_n, t) > 1 - \epsilon$ درنتیجه برای هر $n \geq n_0$، $x_n \in B(x, \epsilon, t)$. پس $\{x_n\}$ نسبت به τ_M همگرا به x است و برهان کامل است. □

لم ۱-۲-۱. [۴] *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد، در این صورت توپولوژی تولید شده توسط متریک d و توپولوژی القا شده توسط متریک فازی استاندارد $(M_d, \cdot)$ یکسان است.*

برهان: فرض کنید τ توپولوژی القا شده توسط متریک d و τ_{M_d} توپولوژی القا شده توسط $(M_d, \cdot)$ است. حال فرض کنید مجموعه B در X نسبت به توپولوژی τ بسته است و x یک نقطه حدی دلخواه از B است. در این صورت دنباله $\{x_n\}$ در B وجود دارد به طوری که نسبت به τ، x_n همگرا به x است. پس با توجه به قضیه ۱-۲-۲ دنباله $\{x_n\}$ نسبت به توپولوژی τ_{M_d} نیز همگرا به x است بنابراین x یک نقطه حدی از B نسبت به توپولوژی τ_{M_d} است. با توجه به اینکه B نسبت به τ بسته است، پس x متعلق به B است. بنابراین مجموعه B نسبت به τ_{M_d} نیز بسته است، درنتیجه τ و τ_{M_d} یکی است. $\square$

تعریف ۱-۲-۲. [۵] (جرج و ورامانی) دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای متریک فازی $(X, M, *)$، M-کوشی است، هرگاه به ازای هر $\epsilon \in (0, 1)$ و هر $t > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n, m \geq n_0$ داشته باشیم $M(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon$. و فضای متریک فازی $(X, M, *)$، M- تام است، اگر هر دنباله M-کوشی در Xهمگرا باشد.
(گربیک)[۵] دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک فازی $(X, M, *)$ را G-کوشی گوییم، اگر برای هر $p > 0$ و $t > 0$، $\lim_{n\to\infty}(x_{n+p}, x_n, t) = 1$. و هر فضای متریک فازی را G-کامل گوییم اگر هر دنباله G-کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۱-۲-۱. با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که این دو تعریف دنباله کوشی یکسان نیستند. فضای متریک فازی $X = \mathbb{R}$ را با متریک فازی زیر در نظر بگیرید:

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{t}{t+|x-y|} & x, y \in X, t > 0, \\ 0 & x, y \in X, t = 0. \end{cases}$$

فرض کنید $s_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$M(x_{n+p}, x_n, t) = \frac{t}{t + 1/(n+1) + \cdots + 1/(n+p)} \to 1, n \to \infty, p > 0$$

در نتیجه طبق تعریف گربیک دنباله $\{s_n\}$ کوشی است ولی M- کوشی نیست. زیرا اگر در فضای متریک $X = \mathbb{R}$ با متر فازی استاندارد بیان شده،کوشی باشد آن گاه با متر اقلیدسی $| x - y |$ نیز کوشی خواهد بود و این تناقض است.

قضیه ۱-۲-۳. [۴] *هر فضای متریک فازی، هاسدورف است.*

برهان: فرض کنید $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی بوده و x, y دو نقطه متمایز در X باشند. در این صورت به ازای هر $t > 0$، داریم $0 < M(x, y, t) < 1$. به ازای $t > 0$ ثابت قرار

می دهیم $r = M(x,y,t)$، در این صورت $۰ < r < ۱$. حال باتوجه به لم ۱-۱-۳ به ازای هر $r < r_۰ < ۱$ می‌توان $r_۱ \in (۰,۱)$ را چنان یافت که $r_۱ * r_۱ \geq r_۰$. گوی‌های باز $B(y, ۱-r_۱, \frac{t}{۲})$ و $B(x, ۱-r_۱, \frac{t}{۲})$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم

$$B(x, ۱-r_۱, \frac{t}{۲}) \cap B(y, ۱-r_۱, \frac{t}{۲}) = \emptyset.$$

زیرا در غیر این صورت اگر $z \in B(x, ۱-r_۱, \frac{t}{۲}) \cap B(y, ۱-r_۱, \frac{t}{۲})$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} r = M(x,y,t) &\geq M(x,z,\frac{t}{۲}) * M(z,y,\frac{t}{۲}), \\ &\geq r_۱ * r_۱, \\ &\geq r_۰, \\ &> r. \end{aligned}$$

که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم $B(x, ۱-r_۱, \frac{t}{۲}) \cap B(y, ۱-r_۱, \frac{t}{۲}) = \emptyset$. $\square$

لم ۱-۲-۲. [۴] *اگر (X,d) یک فضای متریک تام باشد، در این صورت $(X, M_d, \cdot)$ نیز تام است.*

برهان: فرض کنید $\{x_n\}$ در $(X, M_d, \cdot)$ کوشی باشد، در این صورت به ازای هر $\epsilon \in (۰,۱)$ و هر $t > ۰$، قرار می‌دهیم $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon + t}$. در این صورت $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n, m \geq n_۰$، $M_d(x_n, x_m, t) > \frac{\epsilon}{\epsilon+t}$ است. در نتیجه

$$\frac{t}{t + d(x_n, x_m)} > ۱ - \epsilon.$$

پس $d(x_n, x_m) < \epsilon$، لذا نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) کوشی است بنابراین $x_۰$ وجود دارد به طوری که $\{x_n\}$ نسبت به توپولوژی القایی حاصل از d همگراست. لذا با توجه به قضیه ۱-۲-۲ دنباله $\{x_n\}$ نسبت به توپولوژی القایی حاصل از τ_{M_d} نیز همگراست، بنابراین $(X, M_d, \cdot)$ تام است. $\square$

تعریف ۱-۲-۳. [۵] اگر A زیر مجموعه فضای متریک فازی $(X, M, *)$ باشد، قطر فازی این مجموعه به صورت زیر تعریف می شود:

$$dimA = sup_{t>۰} inf_{x,y \in A} sup_{\epsilon<t} M(x,y,t).$$

تعریف ۱-۲-۴. [۵] فرض کنید $(X, M, *)$ فضای متریک فازی باشد. مجموعه $\{F_n\}_n$ دارای قطر صفر فازی است اگروتنها اگر برای هر زوج $r, t > ۰$ و $۰ < r < ۱$، $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in F_n$ داشته باشیم $M(x, y, t) > ۱ - r$.

مثال ۱-۲-۲. یک زیر مجموعه تک عضوی از فضای متریک فازی $(X, M, *)$ دارای قطر صفر فازی است.

قضیه ۱-۲-۴. [۵] *فضای متریک فازی $(X, M, *)$ کامل است اگر وتنها اگر هر دنباله تو در تو از مجموعه‌های بسته و نا تهی $\{F_n\}_n$ با قطر صفر فازی دارای اشتراک نا تهی باشد.*

برهان: در ابتدا فرض می‌کنیم فضای متریک فازی $(X, M, *)$ کامل باشد. مجموعه‌های نا تهی و بسته $\{F_n\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_n = \{x_n, x_{n+۱}, ...\}, F_n = \overline{A_n}$$

سپس ادعا می‌کنیم که $\{F_n\}$ دارای قطر صفر فازی است. برای $۰ < s < ۱$ و $t > ۰$ داده شده می‌توانیم یک $r \in (۰, ۱)$ بیابیم به طوری که $(۱-r)*(۱-r)*(۱-r) > (۱-s)$ باشد. حال فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X باشد. طبق تعریف دنباله کوشی برای $۰ < r < ۱$، $t > ۰$، $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m, n \geq n_۰$، $M(x_n, x_m, \frac{t}{۳}) > ۱ - r$. درنتیجه برای هر $x, y \in A_{n_۰}$، $M(x, y, \frac{t}{۳}) > ۱ - r$ است. فرض کنید $x, y \in F_{n_۰}$ در این صورت دنباله‌های $\{x'_n\}$ و$\{y'_n\}$ در $A_{n_۰}$ وجود دارند به طوری که x'_n همگرا به x وy'_n همگرا به y می‌باشد. درنتیجه برای n به اندازه کافی بزرگ $x'_n \in M(x, y, \frac{t}{۳})$ و $y'_n \in B(y, r, \frac{t}{۳})$ بنابراین

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &\geq M(x, x'_n, \frac{t}{۳}) * M(x'_n, y'_n, \frac{t}{۳}) * M(y'_n, y, \frac{t}{۳}), \\ &> (۱ - r) * (۱ - r) * (۱ - r), \\ &> (۱ - s). \end{aligned}$$

ودر نهایت برای هر $x, y \in F_{n_۰}$ خواهیم داشت $M(x, y, t) > ۱ - s$. بنابراین $\{F_n\}$ دارای قطر صفر فازی است. طبق فرض $\cap_{n=۱}^{\infty} F_n$ غیر تهی است، بنابراین $x \in \cap_{n=۱}^{\infty} F_n$ وجود دارد. طبق تعریف ۱-۲-۴ برای هر $r, t > ۰$ و$۰ < r < ۱$، $n_۱ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_۱$ داریم $M(x_n, x, t) > ۱ - r$. در نتیجه برای هر $t > ۰$، وقتی n به ∞ میل می‌کند

$M(x_n, x, t)$ به یک همگرا است، بنابراین x_n همگرا به x است. درنتیجه $(X, M, *)$ فضای متریک فازی کامل است. برای اثبات عکس قضیه فرض می‌کنیم $(X, M, *)$ فضای متریک فازی کامل و $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله تودرتو از مجموعه‌های غیر تهی و بسته با قطر صفر فازی باشد. دنباله $\{x_n\} \in F_n$ را در نظر می‌گیریم چون $\{F_n\}$ دارای قطر فازی صفر است برای هر $r, t > 0$ و $0 < r < 1$، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in F_{n_0}$، $M(x, y, t) > 1 - r$ است. بنابراین برای هر $n, m \geq 0$، $M(x_n, x_m, \frac{t}{3}) > 1 - r$ است. چون $x_n \in F_n \subset F_{n_0}$ و $x_m \in F_m \subset F_{n_0}$، دنباله $\{F_n\}$ کوشی است. اما $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل است، بنابراین x_n همگرا به $x \in X$ است. حال برای هر n ثابت و برای هر $k \geq n$ داریم $x_k \in F_n$. بنابراین برای هر n، $x \in \overline{F_n} = F_n$ است و درنتیجه $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ یکتاست. زیرا اگر $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ باشد، چون $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای قطر صفر فازی است برای هر $t > 0$ ثابت و هر n خواهیم داشت، $M(x, y, t) > 1 - \frac{1}{n}$ بنابراین $M(x, y, t) = 1$ و درنتیجه $x = y$. □

تعریف ۱-۲-۵. [۵] فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی و $(Y, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. دنباله $\{f_n\}$ که شامل توابعی از X به توی Y است را همگرای یکنواخت به تابع $f : X \to Y$ گوییم اگر برای $r, t > 0$ و $0 < r < 1$ داده شده $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq n_0$ و $x \in X$، $M(f_n(x), f(x), t) > 1 - r$.

قضیه ۱-۲-۵. [۵] *فرض کنید $f_n : X \to Y$ دنباله‌ای از توابع پیوسته از فضای توپولوژیک X به توی فضای متریک فازی Y باشد. اگر $\{f_n\}$ به تابع f همگرای یکنواخت باشد، آن‌گاه f پیوسته است.*

برهان: فرض کنید X فضای توپولوژیک و $(Y, M, *)$ فضای متریک فازی داده شده باشد. برای هر مجموعه باز V در Y فرض کنید $x_0 \in f^{-1}(V)$ و $y_0 = f(x_0)$. چون V باز است می‌توانیم $r, t > 0$ و $0 < r < 1$ را بیابیم به طوری که $B(y_0, r, t) \subset V$. چون $0 < r < 1$ می‌توانیم یک $s \in (0, 1)$ را بیابیم به طوری که

$$(1 - s) * (1 - s) * (1 - s) > (1 - r).$$

$\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت است. بنابراین برای هر $s, t > 0$ و $0 < s < 1$، $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $n \geq n_0$، $M(f_n(x), f(x), \frac{t}{3}) > 1 - s$. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، f_n پیوسته است، می‌توانیم یک همسایگی U از x_0 بیابیم به طوری که برای هر $n \geq n_0$ داشته باشیم

$f_n(u) \subset B(f_n(x_\circ, s, \frac{t}{۳}))$. درنتیجه برای هر $x \in u$، $M(f_n(x), f_n(x_\circ), \frac{t}{۳}) > ۱ - s$.
همچنین طبق خاصیت مجموعه فازی M

$$\begin{aligned} M(f(x), f(x_\circ), t) &\geq M(f(x), f_n(x), \frac{t}{۳}) * M(f_n(x), f_n(x_\circ), \frac{t}{۳}) \\ &\quad * M(f_n(x_\circ), f(x_\circ), \frac{t}{۳}), \\ &\geq (۱ - s) * (۱ - s) * (۱ - s), \\ &> (۱ - r). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x \in U$، $f(x) \in B(f(x_\circ), r, t) \subset V$ است و $f(U) \subset V$ نتیجه می‌دهد تابع f پیوسته است . $\square$

فصل ۲

نگاشت لیپ شیتز فازی

۲-۱ روابط $dil(f,t)$ و $\Delta(f,t)$ بین فضاهای متریک فازی

در این بخش به معرفی تابع لیپ شیتز فازی بین فضاهای متریک فازی می‌پردازیم. همچنین روابط $dil(f,t)$ و $\Delta(f,t)$ را نیز تعریف می‌کنیم و در ادامه فاصله لیپ شیتز فازی را بیان می‌کنیم. در واقع در این بخش با بیان تعریف نگاشت‌های انقباضی فازی و روابط $dil(f,t)$ و $\Delta(f,t)$ راه را برای بیان قضیه نقطه ثابت خودنگاشت‌های انقباضی فازی، در فصل آینده هموار می کنیم.

تعریف ۲-۱-۱. [۱۷] نگاشت $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ لیپ شیتز گوییم اگر مقدار ثابت $k>۰$ موجود باشد به طوری که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d_Y(f(x),f(y))\leq kd_X(x,y)$$

یادآوری ۱. *تابع لیپ شیتز $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ پیوسته است.*

تعریف ۲-۱-۲. [۱۷] فرض کنید $(X,M,*),(Y,N,\odot)$ دو فضای متریک فازی باشند. $dil(f,t)$ و $D(f,t)$ نگاشت $f:X\to Y$ برای هر $t>۰$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$dil(f,t)=sup_{x\neq y}\frac{۱-N(f(x),f(y),t)}{۱-M(x,y,t)},$$
$$D(f,t)=\frac{dil(f,t)}{۱+dil(f,t)}$$

مثال ۲-۱-۱. فرض کنید $f:(X,M,*)\to(Y,N,\odot)$ یک نگاشت یک متر بین فضاهای متریک فازی باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$dil(f,t)=۱, D(f,t)=\frac{۱}{۲}$$

نتیجه ۱. $dil(f,t)<۱$ است اگر وتنها اگر $D(f,t)<\frac{۱}{۲}$ باشد.

مثال ۲-۱-۲. فرض کنید $(X,d_X),(Y,d_Y)$ فضاهای متریک و M_d,N_d متریک‌های فازی استاندارد القا شده توسط مترهای d_X,d_Y روی X,Y باشند. همچنین برای هر $a,b\in X$، $*=T_p$ در این صورت برای هر نگاشت $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ و هر $t>۰$ خواهیم داشت

$$dil(f,t)=sup_{x\neq y}\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}\cdot\frac{t+d_X((x),(y))}{t+d_Y(f(x),f(y))}.$$

مثال ۲-۱-۳. فرض کنید $(\mathbb{R},M_d,T_P)$ فضای متریک فازی استاندارد روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=mx+n$ برای مقادیر حقیقی و ثابت m,n در نظر می گیریم. اگر $m=۰$ باشد، $dil(f,t)=۰$ خواهد بود. حال فرض می‌کنیم $m\neq۰$ باشد درنتیجه

$$\begin{aligned}dil(f,t)&=\mid m\mid\sup_{x\neq y}\frac{t+\mid x-y\mid}{t+\mid m\mid\mid x-y\mid},\\&=\mid m\mid\sup_{x\neq y}\frac{\mid m\mid t-t+t+\mid m\mid\mid x-y\mid}{\mid m\mid(t+\mid m\mid\mid x-y\mid)},\\&=\mid m\mid\sup_{x\neq y}\left[\frac{۱}{\mid m\mid}+\frac{(۱-\frac{۱}{m})t}{t+\mid m\mid\mid x-y\mid}\right].\end{aligned}$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$dil(f,t)=\begin{cases}\mid m\mid & \mid m\mid>۱,\\ ۱ & ۰<\mid m\mid\leq۱.\end{cases}$$

و

$$D(f,t)=\begin{cases}\frac{|m|}{|m|+۱} & \mid m\mid>۱,\\ \frac{۱}{۲} & ۰<\mid m\mid\leq۱.\end{cases}$$

تعریف ۲-۱-۳. [۱۷] فرض کنید (X,d_X) و (Y,d_Y) فضاهای متریک باشند. در این صورت