بسم ا... الرّحمن الرّحیم

دنبالهٔ گولی–رودین–شاپی‌رو

توسط
احمد محمّدحسنی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکدهٔ تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیتهای
تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ
ریاضی
از
دانشگاه شیراز
شیراز ، ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیتهٔ پایان نامه با درجهٔ: بسیار خوب
امضاء اعضای کمیتهٔ پایان نامه:

دکتر محسن تقوی، استادیار بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر حیدر زاهد زاهدانی، استادیار بخش ریاضی ....

دکتر عبدالعزیز عبداللهی، استادیار بخش ریاضی ....

شهریور ۱۳۷۸

تقدیم به:

پدر عزیز و مادر مهربانم

۲۷۰۳۴

سپاسگزاری

بدینوسیله از استاد معظم و دلسوز آقای دکتر محسن تقوی که در طول این دوره از تحصیلات دانشگاهیم و همچنین در مدت تکمیل این رساله این حقیر را از الطاف بیدریغ خویش محروم نساخته اند و مرا در این مرحله هدایت کرده اند سپاس فراوان دارم .

همچنین از اساتید گرامی آقای دکتر بهمن یوسفی و اعضای کمیته پایان نامه آقای دکتر حیدر زاهد زاهدانی و آقای دکتر عبدالعزیز عبدالهی که زحمت خواندن پایان نامه را بر عهده گرفتند و مرا از تذکرات سودمند خود بهره مند ساختند تشکر و قدردانی می نمایم.

چکیده

دنبالهٔ گولی - رودین - شاپی‌رو

توسط

احمد محمّدحسنی

دنبالهٔ گولی - رودین - شاپی‌رو $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت

$$\begin{cases} a(0) = 1 \\ a(2n+1) = (-1)^n a(n) \\ a(2n) = a(n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اوّل مقدمات و تعاریف اساسی را که برای موضوع بحث ما احتیاج است، بیان خواهیم نمود. در فصل دوّم که موضوع اصلی بحث مورد نظر ما از آنجا شروع خواهد شد، ثابت می‌کنیم دنبالهٔ

$$\left\{\frac{s(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \left(s(n) = \sum_{i=0}^{n} a(i), n = 0, 1, 2, \cdots\right)$$

که از دنبالهٔ گولی - رودین - شاپی‌رو ساخته می‌شود در بازهٔ $[\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{6}]$ چگال است و همچنین حدود بالایی و پایینی زیر دنباله‌های آن را تعیین می‌نماییم. در فصل سوّم چند تابع را که از دنبالهٔ گولی - رودین - شاپی‌رو بدست می‌آید مورد بررسی قرار می‌دهیم و پیوستگی، مشتق‌پذیری و سری فوریهٔ آنها را مطالعه خواهیم نمود.

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول
مقدمه‌ای بر دنبالهٔ گولی - رودین- شاپی‌رو[1]

در این فصل ابتدا بعضی مفاهیم و مطالب مقدماتی را که برای بیان موضوع اصلی بحث احتیاج است یادآوری می‌نماییم. و بعد با استفاده از محاسبات عددی بعضی از خواص دنبالهٔ گولی ـ رودین ـ شاپی‌رو را حدس زده و اثبات می‌کنیم.

R و Z و N به ترتیب نمایش اعداد حقیقی، صحیح و صحیح مثبت هستند.

۱.۱ تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۱.۱ تعریف.

مجموعهٔ X یک فضای متری نامیده می‌شود هرگاه به هر دو نقطهٔ x و y از X عدد حقیقی $d(x,y)$ به نام فاصله از x تا y، طوری مربوط شده باشد که

(i) $d(x,y) > 0$ هر گاه $x \neq y$، و $d(x,x) = 0$؛

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ؛

(iii) به ازای هر $z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

در این صورت، d یک متر نام دارد.

۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنید X یک فضای متری، $E \subset F \subset X$ و $x \in X$ باشند.

۱ـ یک همسایگی نقطه x مجموعه‌ای است مثل $N_r(x)$ مرکب از تمام نقاطی چون y که $d(x,y) < r$. عدد r شعاع $N_r(x)$ نامیده می‌شود.

[1] Golay - Rudin - Shapiro

۲ـ نقطه x یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ E است هرگاه هر همسایگی x شامل تعداد نامتناهی نقطه از E باشد.

۳ـ E بسته است هر گاه هر نقطهٔ حدی E یک نقطه از E باشد.

۴ـ E در F چگال است هر گاه هر نقطهٔ F یک نقطهٔ حدی E یا یک نقطه E (و یا هر دو) باشد.

۵ـ E کراندار است هر گاه عددی حقیقی چون M و نقطه‌ای مثل $y \in X$ باشند به طوری که به ازای هر $z \in E$، $d(y,z) < M$.

در فصل دوم فضای متری R با متر $d(x,y) = |x-y|$ مورد استفاده است.

۳.۱.۱ تعریف.

منظور از یک دنباله یعنی تابعی مانند f که بر N تعریف شده است. و با $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید $\{n_k\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$، در این صورت $\{f(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ یک زیر دنباله از $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود.

۴.۱.۱ تعریف.

دنبالهٔ $\{f(n)\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای متری X را همگرا به $x \in X$ نامند هر گاه هر همسایگی از x شامل تمام جملات دنباله جز تعداد متناهی باشد و می‌نویسیم $f(n) \to x$.

۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنید $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با خاصیت زیر باشد:

به ازای هر M حقیقی عددی صحیح مانند N باشد به طوری که $n \geq N$ نامساوی $f(n) \geq M$ را ایجاب کند.

در این صورت می‌نویسیم $f(n) \to +\infty$.

به همین نحو اگر به ازای هر M حقیقی عددی صحیح مانند N باشد به طوری که $n \geq N$ نامساوی $f(n) \leq M$ را ایجاب کند خواهیم نوشت $f(n) \to -\infty$.

۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنید $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد E را مجموعهٔ اعدادی چون x از اعداد حقیقی (به انضمام احتمالاً $x = +\infty$ و $x = -\infty$) می‌انگاریم که به ازای زیر دنباله‌ای مانند $\{f(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$، $f(n_k) \to x$. قرار می‌دهیم

$$\lim_{n\to\infty} sup f(n) = supE \quad , \qquad \lim_{n\to\infty} inf\ f(n) = inf\ E$$

ثابت می‌شود $infE \in E$ و $sup\ E$ (ر.ک. [۹] قضیهٔ ۱۷.۳).

۷.۱.۱ تعریف.

برای دنباله $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط یا حقیقی نماد $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ را یک سری می‌نامند و گوییم همگرا به s است و می‌نویسیم $s = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$، هر گاه دنبالهٔ $\{s(n)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به s باشد که در آن $s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

۸.۱.۱ تعریف.

فرض کنید $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر $[a,b]$ باشد به طوری که

$$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx = 0 \qquad (n \neq m).$$

در این صورت، این دنباله یک دستگاه متعامد از توابع بر $[a,b]$ نامیده می‌شود. اگر علاوه بر این به ازای هر n

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2\, dx = 1$$

دنباله، متعامدیکه نام خواهد داشت. و

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}dt \quad (n = ۱, ۲, ۳, \dots)$$

را ضریب فوریهٔ nم f نسبت به $\{\phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ می‌خوانیم که در آن f تابعی مختلط مقدار بر R، انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره تناوب $b - a$ است و می‌نویسیم

$$f(x) \sim \sum_{n=۱}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

علامت $\sim$ چیزی در مورد همگرایی سری به دست نمی‌دهد. علامت فقط این را می‌گوید که ضرایب به وسیلهٔ $\{\phi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ بدست می‌آید. این سری، سری فوریهٔ [۲] f (نسبت به $(\{\phi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$) نامیده می‌شود و

$$s_N(x) = s_N(f, x) = \sum_{n=۱}^{N} c_n\phi_n(x)$$

مجموع جزئی Nم سری فوریه f می‌باشد.

۹.۱.۱ مثال.

توابع $n \in Z$ ، $(۲\pi)^{-\frac{۱}{۲}}e^{inx}$ یک دستگاه متعامدیکه بر $[-\pi, \pi]$ تشکیل می‌دهند. برای تابع f انتگرال پذیر با دوره تناوب ۲π قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad, \\ c_n &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad, \\ s_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

۱۰.۱.۱ تعریف.

گوییم سری فوریهٔ $f(x)$، همگرا است به $f(x)$ در $x = \theta$، هرگاه

$$f(\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n\phi_n(\theta).$$

---

[۲] Fourcir

۱۱.۱.۱ تعریف.

گوییم سری فوریهٔ $f(x)$، $(C, ۱)$ ـجمع‌پذیر یا در مفهوم $(C, ۱)$، همگرا است به $f(x)$ در $x = \theta$، هر گاه $\sigma_n(\theta) \to f(\theta)$ که در آن

$$\sigma_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=۱}^{n} s_i(x)}{n}.$$

۱۲.۱.۱ قضیه.

اگر $f(x)$ در $x = \theta$ پیوسته باشد آنگاه سری فوریهٔ $f(x)$، $(C, ۱)$ ـجمع‌پذیر است به $f(x)$ در $x = \theta$.

اثبات.

ر.ک.[۶] قضیهٔ ۷۳.

۱۳.۱.۱ قضیه.

فرض کنید $\alpha > ۰$ و به ازای xهای به قدر کافی کوچک داشته باشیم

$$|f(\theta + x) - f(\theta)| = O(|x|^{\alpha})$$

آنگاه سری فوریهٔ $f(x)$ همگراست به $f(x)$ در $x = \theta$.

اثبات.

ر.ک.[۶] قضیهٔ ۵۵.

۱۴.۱.۱ قضیهٔ تیلور.

فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر $[a,b]$ بوده، n عدد صحیح مثبتی باشد، $f^{(n-1)}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و $f^{(n)}_{(t)}$ به ازای هر $t \in (a,b)$ وجود داشته باشد. α و β را نقاط متمایزی از $[a,b]$ انگاشته، تعریف می‌کنیم

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k.$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند x بین α و β هست به طوری که

$$f(\beta) = p(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \quad (\beta-\alpha)^n.$$

اثبات.

ر.ک.[۹] قضیهٔ ۱۵.۵.

۱۵.۱.۱ تعریف.

دنبالهٔ گولی - رودین - شاپی‌رو $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت

$$\begin{cases} a(0) = 1 \\ a(2n+1) = (-1)^n \quad a(n) \\ a(2n) = a(n), \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

این دنباله کاربردهای جالبی در قسمتهای مختلف ریاضیات دارد و توسعه‌ها زیادی در بیست‌وپنج سال گذشته داشته است که بعضی از مراجع مناسب مورد مطالعه عبارتند از: [۱]، [۴]، و [۷].

۱۶.۱.۱ تعریف.

دو دنبالهٔ $\{s(n)\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{t(n)\}_{n=0}^{\infty}$ از روی دنبالهٔ $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت

$$t(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a(k)\ , \ s(n) = \sum_{k=0}^{n} a(k)$$

تعریف می‌شوند.

بعضی از مقادیر دنباله در جدول (۱.۱.۱) نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود که مقادیر دنبالهٔ $\{a(n)\}_{n=۱}^{\infty}$ همواره ۱ و ۱ـ است و چون $a(۰) = ۱$ است بنابراین شرط لازم و کافی برای آن که $S(n)$ زوج باشد آن است که n فرد باشد.

n	$a(n)$	$S(n)$	n	$a(n)$	$S(n)$
۰	۱	۱	۸	۱	۵
۱	۱	۲	۹	۱	۶
۲	۱	۳	۱۰	۱	۷
۳	-۱	۲	۱۱	-۱	۶
۴	۱	۳	۱۲	-۱	۵
۵	۱	۴	۱۳	-۱	۴
۶	-۱	۳	۱۴	۱	۵
۷	۱	۴	۱۵	-۱	۴

جدول (۱.۱.۱)

۱۷.۱.۱ قضیه.

اگر ۱ یا $\epsilon_r = ۰$ ، $k \geq o$ ، $n = \sum\limits_{r=۰}^{k} \varepsilon_r ۲^r$ باشد آنگاه $a(n) = (-۱)^{\sum\limits_{r=۰}^{k-۱} \varepsilon_r \varepsilon_{r+۱}}$.

اثبات.

با استقراء روی k ثابت می‌کنیم.

برای $k = ۰$ داریم $n = \varepsilon_۰$ که در آن $\varepsilon_۱ = ۰$ و ۱ یا $\varepsilon_۰ = ۰$ بنابراین $\varepsilon_۰\varepsilon_۱ = ۰$ و همچنین $n = ۱$ یا $n = ۰$ و حکم درست است. فرض کنیم $n = \sum\limits_{r=۰}^{k+۱} \varepsilon_r ۲^r$ و صحت قضیه برای مقدار k برقرار باشد.

اگر $\varepsilon_\circ = \circ$ آنگاه n زوج است و داریم

$$\begin{aligned} n &= \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^r = 2 \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1} \\ &\Longrightarrow a(n) = a(2 \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) \\ &= a(\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) \\ &= (-1)^{\sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} = (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \\ &\Longrightarrow a(n) = (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}. \end{aligned}$$

اگر $\varepsilon_\circ = 1$ آنگاه n فرد است و داریم

$$\begin{aligned} n \quad &= 1 + \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^r = 1 + 2 \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1} \Longrightarrow \\ a(n) \quad &= a(1 + 2 \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) = (-1)^{\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}} a(\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) \\ &= (-1)^{\varepsilon_1} a(\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) = (-1)^{\varepsilon_1} (-1)^{\sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \\ &= (-1)^{\varepsilon_0 \varepsilon_1} (-1)^{\sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} = (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \Longrightarrow a(n) = (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \end{aligned}$$

و اثبات تمام است.

این قضیه بیان می‌کند وقتی n در مبنای ۲ باشد به راحتی می‌توان $a(n)$ را محاسبه کرد.

۲.۱ محاسبات عددی و نتایج حاصل از آن

۱.۲.۱ تعریف.

اعداد $\circ, 1, 2, \ldots$ را n ـمقدارها و $s(\circ), s(1), s(2), \ldots$ را s ـمقدارها می‌نامیم.

۲.۲.۱ تعریف.

گوییم دنباله $\{s(n)\}_{n=1}^{\infty}$ در $n_\circ$ ـمقدار، دارای ماکزیمم موضعی (مینیمم موضعی) است هرگاه n_1 ـمقدار و n_2 ـمقدار با شرط $n_1 < n_\circ < n_2$ موجود باشد به طوری که برای هر n

-مقداری که $n_۲$ $\le n \le$ $n_۱$ باشد داشته باشیم

$$s(n_\circ) \ge s(n)\,(s(n_\circ) \le s(n))\,.$$

نقاط ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی را آکسترمم موضعی می‌گوییم.

۳.۲.۱ آکسترمم‌های موضعی دنبالهٔ $\{a(n)\}_{n=۱}^{\infty}$.

در جدول (۱.۲.۱) مقادیر $s(n)$ به ازای $n = ۰, ۱, \ldots, ۶۳$ بیان شده و آکسترمم‌های موضعی آن قابل مشاهده است که به عنوان مثال ۳ -مقدار و ۲ -مقدار به ترتیب ماکزیمم و مینیمم موضعی در نقاط ۲ $= n$ و ۳ $= n$ است.

n	$s(n)$	n	$s(n)$	n	$s(n)$	n	$s(n)$
۰	۱	۱۷	۶	۳۳	۱۰	۴۹	۱۰
۱	۲	۱۸	۷	۳۴	۱۱	۵۰	۹
۲	۳	۱۹	۶	۳۵	۱۰	۵۱	۱۰
۳	۲	۲۰	۷	۳۶	۱۱	۵۲	۹
۴	۳	۲۱	۸	۳۷	۱۲	۵۳	۸
۵	۴	۲۲	۷	۳۸	۱۱	۵۴	۹
۶	۳	۲۳	۸	۳۹	۱۲	۵۵	۸
۷	۴	۲۴	۷	۴۰	۱۳	۵۶	۹
۸	۵	۲۵	۶	۴۱	۱۴	۵۷	۱۰
۹	۶	۲۶	۵	۴۲	۱۵	۵۸	۱۱
۱۰	۷	۲۷	۶	۴۳	۱۴	۵۹	۱۰
۱۱	۶	۲۸	۷	۴۴	۱۳	۶۰	۹
۱۲	۵	۲۹	۸	۴۵	۱۲	۶۱	۸
۱۳	۴	۳۰	۷	۴۶	۱۳	۶۲	۹
۱۴	۵	۳۱	۸	۴۷	۱۲	۶۳	۸
۱۵	۴	۳۲	۹	۴۸	۱۱		
۱۶	۵						

جدول (۱.۲.۱)

مشاهده می‌شود که ۳ ـمقدار، ۷ ـمقدار و ۱۵ ـمقدار، ماکزیممهای موضعی به ترتیب در نقاط ۲، ۱۰ و ۴۲ هستند و همچنین ۳ ـمقدار و ۵ ـمقدار مینیمم‌های موضعی به ترتیب در نقاط ۶ و ۲۶ می‌باشند.