بسم الله الرحمن الرحيم

٤١٣٥٧

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد آمار

برآورد توزیعهای ماکسیمم آنتروپی و کاربردهای آن

۱۰ /۵/ ۱۳۸۱

توسط

علی آقامحمدی

استاد راهنما

دکتر عین ا.. پاشا

استاد مشاور

دکتر محسن محمدزاده

۴۱۵۴۷

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعـضـای هیـئت داوران نـسخـهٔ نــهایی پایان نامه خـانم/ آقای علی آقامحمدی

تحت عنوان: **برآورد توزیعهای ماکزیمم آنتروپی و کاربردهای آن**

را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه کارشناسی‌ارشد مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر عین‌اله پاشا	دانشیار	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر محسن محمدزاده	استادیار	
۳- استاد ناظر	آقای دکتر مسعود یارمحمدی	استادیار	
۴- استاد ناظر	آقای دکتر عباس گرامی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مسعود یارمحمدی	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ آمار ریاضی است که در سال ۱۳۸۰ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر عین‌الله پاشا، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر محسن محمدزاده و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر - از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب علی آقامحمدی دانشجوی رشته آمار ریاضی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: علی آقامحمدی

تاریخ و امضا:

۱۳۸۱/۲/۱۷

تقدیم به:

مادر عزیزم و برادر بزرگوارم احمد،

که تا هستند و هستم دارمشان دوست

قدردانی

پرده بردار ز رخ چهره گشا ناز بس است　　عاشق دل سوخته را دیدن رویت هوس است

دست از دامنت ای دوست نخواهم برداشت　　تا من دلشده را یک رمق و یک نفس است

اکنون که به حول و قوهٔ حضرت حق قابلیت کسب نموده‌ام تا این خطیر را به سر منزل مقصود رسانم، برای سپاس از این نعمت بی منتها و زکوه چنین سرمایهٔ پر برکت بر آن شدم که از باغبانان بوستان علم و معرفت که این اندک نوشته‌های ناچیز حاصل بهره‌وری این حقیر از روشنائی تابندهٔ این بزرگواران و طراوات بهار گونهٔ آنهاست، تقدیر نمایم. هر چند قلم زدن در حیطهٔ این عزیزان در خور کلام و بضاعت این قلم نیست اما این مطلب باعث نمی‌شود که از این سرچشمهٔ مهر، عطوفت و ایثار جرعه‌ای کام نگیرم چرا که:

آب دریا را اگر نتوان کشید　　هم به قدر تشنگی باید چشید

بدینسان از استاد راهنمای ارجمند این پایان نامه آقای دکتر عین‌ا... پاشا که با دقت و حوصلهٔ زائدالوصف، راهنمائی‌های ارزنده‌ای را در جهت تدوین و نگارش این تحقیق ارائه نمودند و از استاد مشاور محترم آقای دکتر محسن محمدزاده که تصحیح آن را متقبل شده‌اند و نظرات گرانسنگی را در تکوین این مجموعه ابراز نمودند، سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از داوران محترم آقایان دکتر عباس گرامی و دکتر مسعود یارمحمدی که قبول زحمت کرده و بازخوانی این تحقیق را بر عهده گرفتند، تشکر می‌کنم.

در اینجا بر خود واجب می‌دانم از زحمات ارزشمند برادر بزرگوارم آقای احمد آقامحمدی که مشوق و پشتیبان اصلی اینجانب در راه علم و دانش بودند، تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از خداوند منان خواهانم آنچنان زندگی برایم عطا کند که بتوانم گوشه‌ای از زحماتشان را جبران کنم.

در پایان امید آن دارم که این سعی و تلاش مقبول درگاه ایزد منان و مورد پسند همهٔ اهل نظر قرار گیرد.

علی آقامحمدی

تهران- اسفند ماه ۱۳۸۰

برآورد توزیعهای ماکسیمم آنتروپی و کاربردهای آن

چکیده

در این پایان نامه پس از ارائهٔ تعاریف مقدماتی دربارهٔ آنتروپی، یکی از مهمترین کاربردهای آنتروپی که روش ماکسیمم آنتروپی است، بیان می‌شود. هدف این روش برآورد پارامترهای مجهول از داده‌های ناکافی است. به عنوان کاربردهایی از این رهیافت، ابتدا روش برآورد توابع چگالی به وسیلهٔ ماکسیمم آنتروپی بررسی شده و سپس نقش اصل ماکسیمم آنتروپی در حل مسئلهٔ مهمی در ارتباط با شبکهٔ ترافیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین برای برآورد پارامترهای مدل، روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته، معرفی می‌شود. در پایان ضمن بیان محدودیتهایی از ضریب همبستگی (ρ)، چگونگی کاربرد آنتروپی در اندازه‌های وابستگی بررسی شده و شاخصهای وابستگی مبتنی بر آنتروپی برای مرتفع ساختن این محدودیتها ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی : آنتروپی، ماکسیمم آنتروپی، ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته، اندازه‌های وابستگی، وابستگی چندگانه، شبکهٔ ترافیک، برآورد توابع چگالی.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

۱.۱ مقدمه

اصطلاح آنتروپی[۱] به عنوان یک نماد علمی برای اولین بار در ترمودینامیک به کار گرفته شد. تعبیر احتمالاتی آن در زمینهٔ مکانیک آماری منتسب به بولتسمان (۱۸۷۷) است. اما رابطهٔ صریح بین آنتروپی و احتمال چندین سال بعد توسط پلانک (۱۹۰۶) به ثبت رسید. شانون در مقالهٔ مشهور خود در سال ۱۹۴۸ این مفهوم را برای توصیف خواص دنباله‌ای از نمادها به کار گرفت و نتایج را در تعدادی از مسائل پایه‌ای نظریهٔ کد گذاری و انتقال داده‌ها مورد استفاده قرار داد. سهم قابل ملاحظهٔ شانون پایه نظریهٔ اطلاع مدرن را تشکیل می‌دهد. جینس (۱۹۵۷) روش آنتروپی ماکسیمم را دوباره مورد بررسی قرار داد و آنرا برای مسائلی که مستلزم تعیین پارامترهای مجهول از داده‌های ناکافی بودند، به کار گرفت.

---

[۱] Entropy

۲.۱ شگفتی، عدم حتمیت و آنتروپی

پیشامدی مانند A را در نظر بگیرید که اگر آزمایش انجام شود می‌تواند رخ دهد. در صورت رخدادن A، چقدر شگفت زده می‌شویم ؟. واضح است که تصور کنیم میزان شگفتی حاصل از اطلاع وقوع A باید به احتمال رخدادن A وابسته باشد. مثلاً فرض کنید $P(A) = ۰/۹۹۹$ باشد، در این صورت تقریباً حتم داریم که A اتفاق می‌افتد. حال اگر $P(A) = ۰/۰۰۱$ باشد، منطقی است که تقریباً به طور حتم A رخ نمی‌دهد. ولی اگر $P(A) = ۰/۵$ باشد، آنگاه عدم حتمیت ما ماکسیمم است. زیرا احتمال وقوع A برابر با ۰/۵ و احتمال رخ ندادن A نیز برابر ۰/۵ است. اگر در آزمایش پرتاب یک جفت تاس اطلاع یابیم که جمع اعداد ظاهر شده زوج است زیاد تعجب نمی‌کنیم، زیرا احتمال وقوع آن برابر ۰/۵ است. ولی اگر بشنویم جمع اعداد ظاهر شده برابر ۱۲ است، تعجب ما بیشتر است زیرا احتمال وقوع آن برابر $\frac{1}{36}$ است. در واقع عدم حتمیت، دشواری پیش‌بینی برآمدهای متغیر تصادفی X را تشریح می‌کند. فرض کنید متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را به ترتیب با احتمالهای $p_1, p_2, \ldots, p_n$ اختیار کند. اکنون به دنبال یافتن کمیتی هستیم که عدم حتمیت X را اندازه‌گیری نماید. عدم حتمیت که تابعی از $p_1, p_2, \ldots, p_n$ است را با $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ یا به اختصار با $H(X)$ نمایش می‌دهیم. $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ را می‌توان به صورت میانگین وزنی اعداد $h(p_1), h(p_2), \ldots, h(p_n)$ در نظر گرفت که در آن $h(p_i)$، عدم حتمیت پیشامد $\{X = x_i\}$، **یا به عبارت دیگر میزان شگفتی حاصل از وقوع برآمد $\{X = x_i\}$ است.** تابع $H(X)$ متوسط عدم حتمیت پیشامدهای $\{X = x_i\}$ است. برای به دست آوردن شکل تابعی H، شرایطی که از نظر شهودی منطقی به نظر می‌رسند بر h تحمیل می‌کنیم.

فرض بر این است که برای $p = ۰$، مقدار $h(p)$ تعریف نشده است. یعنی پیشامدی که رخ نمی‌دهد هیچ مقدار شگفتی نیز برای آن نمی‌توان در نظر گرفت.

حال وقتی بشنویم پیشامدی حتمی، که باید اتفاق می‌افتاده، رخ داده است. طبیعی است که از وقوع آن تعجب نکنیم. یعنی:

اصل ۱ $h(۱) = ۰$

دومین شرط بیان کننده این است که شگفتی ما از وقوع پیشامدی که شانس کمی برای رخ دادن دارد، بیشتر از میزان شگفتی برای پیشامدی با شانس وقوع بیشتر است. یعنی اصل دوم باید به صورت زیر بیان شود.

اصل ۲ $h(p)$ تابعی اکیداً نزولی از p است. یعنی اگر $p < q$ باشد، آنگاه:

$$h(p) > h(q)$$

این دو شرط دریافتهای شهودی ما از شگفتی را تأمین می‌کنند.

شرط سوم یک خاصیت ریاضی تابع $h(p)$ است، یعنی انتظار داریم هر تغییر کوچک در مقدار p، باعث تغییر کوچکی در مقدار $h(p)$ شود.

اصل ۳ $h(p)$ تابعی پیوسته از p است.

برای بیان شرط چهارم دو پیشامد مستقل A و B را در نظر بگیرید، به طوری که $P(A) = p$ و $P(B) = q$، از آنجائیکه $P(A \bigcap B) = pq$ است، پس شگفتی حاصل از اطلاع وقوع A و B برابر با $h(pq)$ است. فرض کنید اطلاع یابیم A اتفاق افتاده و بعد از آن B نیز رخ داده‌است. چون $h(p)$ شگفتی حاصل از وقوع A است، لذا $h(pq) - h(p)$ نشان دهندهٔ افزایش شگفتی است، وقتی مطلع می‌شویم که B نیز رخ داده است. بعلاوه چون A و B از هم مستقل هستند و اطلاع از وقوع یا عدم وقوع A تأثیری در احتمال وقوع B ندارد، لذا افزایش شگفتی باید برابر با $h(q)$ باشد.

اصل ۴ $h(pq) = h(p) + h(q), \quad ۰ < p \leq ۱, \quad ۰ < q \leq ۱$

چهار اصل فوق، اندازهٔ عدم حتمیت را به طور کامل مشخص می‌کنند. حال می‌توان قضیهٔ زیر را که بیان کنندهٔ ساختار $h(p)$ است مطرح کرد.

قضیه ۱.۱: اگر $h(.)$ در اصول ۱ تا ۴ صادق باشد، آنگاه:

$$h(p) = -c\log(p)$$

که در آن c یک عدد دلخواه صحیح و مثبت و مبنای لگاریتم همواره بزرگتر از ۱ در نظر گرفته می‌شود.

اثبات: از اصل ۴ داریم

$$h(p^{۲}) = h(p) + h(p) = ۲h(p)$$

با استقراً روی m داریم

$$h(p^m) = mh(p) \qquad (۱.۲.۱)$$

بعلاوه چون برای هر عدد صحیح n،

$$h(p) = h(p^{۱/n} \cdots p^{۱/n}) = nh(p^{۱/n})$$

لذا

$$h(p^{۱/n}) = \frac{۱}{n}h(p) \qquad (۲.۲.۱)$$

از روابط (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) داریم:

$$h(p^{m/n}) = mh(p^{۱/n}) = \frac{m}{n}h(p)$$

که با رابطهٔ زیر معادل است.

$$h(p^x) = xh(p) \qquad (۳.۲.۱)$$

در این رابطه x یک عدد گویای مثبت است. ولی با استفاده از اصل پیوستگی $h(.)$ رابطهٔ (۳.۲.۱) برای همهٔ مقادیر غیر منفی x نیز معتبر است.

اکنون برای هر مقدار p، $0 < p \leq 1$، اگر $x = -\log_2(p)$ باشد، آنگاه $p = (\frac{1}{2})^x$، لذا با استفاده از رابطهٔ (۳.۲.۱) داریم:

$$h(p) = h((1/2)^x) = xh(1/2) = -c\log_2(p)$$

با استفاده از اصول ۱ و ۲ c برابر است با:

$$c = h(\frac{1}{2}) > h(1) = 0$$

معمولاً مقدار c را برابر ۱ در نظر می‌گیرند.

□

اگر متغیر تصادفی X که یکی از مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را به ترتیب با احتمالهای $p_1, p_2, \ldots, p_n$ اختیار می‌کند در نظر بگیریم، چون $-\log(p_i)$ نشان دهندهٔ میزان عدم حتمیت حاصل از پیشامد $\{X = x_i\}$ است، لذا متوسط اندازهٔ تعجب از اطلاع در مورد رخداد مقدار متغیر تصادفی X برابر است با:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i) \qquad (۴.۲.۱)$$

که آنرا به عنوان آنتروپی متغیر تصادفی X می‌شناسیم.

چون $H(X)$ نشان دهندهٔ متوسط اندازهٔ تعجبی است که در مورد اطلاع از رخداد مقدار X حاصل می‌شود، می‌توان آنرا به عنوان اندازهٔ حتمیتی که برای X وجود دارد تفسیر کرد. در نظریهٔ اطلاع $H(X)$ را متوسط اطلاع به دست آمده برای مقدار مشاهده‌ای X می‌نامند. چون $\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(x)$، لذا تغییر پایهٔ لگاریتم در فرمول H، معادل تغییر ثابت c و یا به عبارت دیگر معادل تغییر واحد عدم حتمیت است. در عمل همانطور که گفته شد c را برابر ۱ فرض می‌کنند.