بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی- گرایش جبر

عنوان:

رده های ایزوکلینیسم و درجه جابه جایی گروه های متناهی و تعمیمی از آن ها

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا رضایی زاده

توسط:

مریم جاویدفر

مهر ۱۳۸۷

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

خانم مریم جاوید فر

تحت عنوان

رده های ایزوکلینیسم و درجه جابجایی گروه های متناهی و تعمیمی از آنها

در تاریخ ۱۳۸۷/۷/۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه .عالی.. به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکترمحمدرضا ریسمانچیان با مرتبه علمی استاد یار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر غلامرضا رضایی زاده با مرتبه علمی استادیار — امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکترعلیرضا نقی پوربا مرتبه علمی استادیار — امضاء

۴ - استاد داور خارج از گروه دکترعلیرضا عبدالهی با مرتبه علمی دانشیار از دانشگاه اصفهان — امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه دکتر خدابخش حسامی با مرتبه علمی دانشیار — امضاء

دکتر محمد مردانی

معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی

دانشکده علوم پایه

تقدیر و تشکر

سپاس پروردگاری را که بار دیگر بر من منت نهاد و به من توفیق علم‌آموزی عطا فرمود.

در پایان این مرحله از تحصیل بر خود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ پدر و مادرم تشکر کنم.

از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان، که دانش خود را در نهایت صبوری در اختیار اینجانب قرار دادند و راهنمایی مرا در این طرح پذیرا شدند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌کنم.

و جا دارد از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی زاده که با راهنمایی‌ها و مشاوره خود راهگشای این طرح گشتند، سپاسگزاری کنم.

از اساتید محترم و فرهیخته گروه ریاضی، آقایان: دکتر علیرضا نقی‌پور، دکتر خدابخش حسامی و دکتر علیرضا امینی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

پروردگارا روح بلند شهدای اسلام، آنان که رفتند تا ما آسوده خاطر زندگی کنیم و آزادانه بیندیشیم را متعالی بگردان و ما را شکرگزار نعمت‌هایی که به ما عطا نمودی قرار ده.

مریم جاویدفر

تقدیم به

لاله‌های گمنامی که در راه حقیقت حتی از نام خویش نیز گذشتند

چکیده

در سال ۱۹۴۰ ف. هال مفهوم ایزوکلینیسم را مطرح کرد. بعد از آن هکستر این مفهوم را به n–ایزوکلینیسم تعمیم داد. مفهوم درجه جابه‌جایی گروه‌های متناهی توسط لسکات مورد مطالعه قرار گرفت. در گذشته افرادی مانند گالاقر و گاستافسون در این زمینه مقالاتی ارائه کرده‌اند. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت درجه جابه‌جایی گروه G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(G) = \frac{1}{|G|^2}|\{(x, y) \in G \times G | xy = yx\}|.$$

در این پایان‌نامه خواص مقدماتی $d(G)$، رده‌های ایزوکلینیسم و n–ایزوکلینیسم را بیان می‌کنیم. در پایان نشان می‌دهیم که رده‌های n–ایزوکلینیسم گروه‌های متناهی، درجه پوچ‌توانی مرتبه n گروه‌ها را حفظ می‌کند.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

عدد صحیح b عدد صحیح a را عاد می‌کند	$b\|a$
P اگر و فقط اگر Q	$P \Leftrightarrow Q$
a متعلق به مجموعه S	$a \in S$
به ازای هر	$\forall$
وجود دارد	$\exists$
A یک زیرمجموعه از B است	$A \subseteq B$
مجموعه تهی	$\emptyset$
اجتماع دو مجموعه A و B	$A \cup B$
اشتراک دو مجموعه A و B	$A \cap B$

اجتماع مجموعه‌های A_α	$\cup A_\alpha$
مرتبه گروه G	$\lvert G \rvert$
زیرگروه تولید شده توسط زیرمجموعه S از یک گروه	$< S >$
f یک تابع از مجموعه A به مجموعه B است	$f : A \longrightarrow B$
هسته همریختی f	$\ker(f)$
یکریخت است با	$\cong$
ثابت ساز x در G	$\mathrm{Stab}_G(x)$
مدار شامل x در G	$\bar{x}$
مرکزساز زیرگروه H در گروه G	$C_G(H)$
رده مزدوجی x در گروه G	$\mathrm{Cl}_G(x)$
گروه خودریختی‌های گروه G	$\mathrm{Aut}(G)$

$\mathrm{End}(G)$	مجموعه درون‌ریختی‌های G
$H \leq G$	H یک زیرگروه G است
$N \trianglelefteq G$	N یک زیرگروه نرمال از گروه G است
G/N	گروه خارج قسمت G بر N
$[G:H], \lvert G:H \rvert$	شاخص زیرگروه H در گروه G
$C_G(x)$	مرکزساز x در G
$Q_۸$	گروه چهارگانی از مرتبه ۸
$D_۸$	گروه دووجهی از مرتبه ۸
$G \times H$	حاصل ضرب مستقیم گروه‌های G و H
x^g	مزدوج x با g
$[x_۱, ..., x_n]$	جابه‌جاگر عناصر $x_۱, \ldots, x_n$
$[X_۱, \ldots, X_n]$	جابه‌جاگر مجموعه‌های $X_۱, \ldots, X_n$
$Z(G)$	مرکز گروه G

$\gamma_n(G)$	n–امین جمله سری مرکزی پایینی
$Z_i(G)$	i–امین مرکز گروه G
G'	زیرگروه مشتق گروه G
$\mathrm{GL}(n, F)$	گروه خطی عمومی از درجه n روی میدان F
$d(G)$	درجه جابه‌جایی گروه متناهی G
$d_n(G)$	n–امین درجه جابه‌جایی گروه متناهی G
$d^{(n)}(G)$	درجه پوچ‌توانی مرتبه n گروه متناهی G
$\sim$	ایزوکلینیک است با
$\underset{n}{\sim}$	n–ایزوکلینیک است با
$H \mathrm{ch} G$	H زیرگروه مشخصه G

پیش‌گفتار

ریاضی‌دانان همواره در تلاش بوده‌اند تا با ضعیف‌تر کردن یا قوی‌تر کردن تعاریف و فرض قضایا به تعاریف و قضایایی جدید دست پیدا کنند. به عنوان مثال هال [۱] در [۴] مفهوم ایزوکلینیسم را مطرح کرد. این مفهوم در واقع تعمیم مفهوم یکریختی است که رده‌بندی جدیدی برای گروه‌ها فراهم می‌کند به طوری که گروه بدیهی و گروه‌های آبلی در یک رده قرار می‌گیرند. بعد از آن در سال ۱۹۸۶ هکستر[۲] در [۵] مفهوم n-ایزوکلینیسم را به عنوان تعمیم مفهوم ایزوکلینیسم بیان کرد، که ما در این طرح پس از آشنایی با درجه جابه‌جایی گروه‌های متناهی قضایا و خواصی از آن را بیان می‌کنیم. در ادامه در فصل ۳ مفاهیم ایزوکلینیسم، n-هموکلینیسم، n-ایزوکلینیسم را معرفی می‌کنیم. هم‌چنین در قضیه ۱.۲.۴ نشان می‌دهیم دو گروه متناهی که در یک رده ایزوکلینیسم باشند، درجه جابه‌جایی یکسان دارند. در پایان درجه پوچ‌توانی مرتبه n گروه متناهی G که در واقع تعمیم درجه جابه‌جایی گروه متناهی G است را معرفی می‌کنیم، G را CN-گروه گوییم هرگاه به ازای هر $x \in G$، $C_G(x)$ نرمال در G باشد و هم‌چنین ثابت می‌کنیم اگر دو CN-گروه متناهی n-ایزوکلینیک باشند، آنگاه درجه پوچ‌توانی مرتبه n یکسان دارند.

---

[۱] Hall

[۲] Hekseter

فصل اوّل

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ عمل گروه روی یک مجموعه

در این فصل، مطالب مقدماتی و پیش‌نیازی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم. ابتدا چند مفهوم مورد نیاز را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای غیرتهی باشد. گوییم که G روی X عمل می‌کند، اگر یک تابع مانند:

$$X \times G \longrightarrow X$$

$$(x, g) \mapsto x \cdot g$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ و هر $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم:

$$x \cdot 1 = x \quad (1)$$

$$x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) g_2 \quad (2)$$

در این صورت گوییم X یک G–مجموعه است.

مثال ۲.۱.۱: فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت G روی خودش با قانون زیر که آن را عمل مزدوجی نامند، عمل می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, g) & \mapsto & x^g \end{array}$$

واضح است که چون G یک گروه است $x^g = g^{-1}xg \in G$، هم‌چنین شرط (۱) و (۲) در تعریف ۱.۱.۱ به وضوح برقرار است.

تعریف ۳.۱.۱: فرض کنیم $x, y \in G$. در این صورت x و y را مزدوج در G گوییم هرگاه عنصری چون $g \in G$ وجود داشته باشد، به طوری که $y = g^{-1}xg$.

لم ۴.۱.۱: فرض کنیم X یک G–مجموعه باشد. که در آن G یک گروه و X یک مجموعه غیرتهی است. در این صورت $\sim$ که در زیر تعریف می‌شود یک رابطه هم‌ارزی در X است.

$$x \sim y \iff \exists g \in G \ : \ x \cdot g = y \quad (\forall x, y \in X)$$

اثبات: به [۱۸] لم ۶.۴ مراجعه شود. □

رده‌های هم‌ارزی رابطه بالا در لم فوق را مدارهای عمل G روی X گویند و آن عبارت است

از $\bar{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

لم ۵.۱.۱: فرض کنیم X یک G–مجموعه است. در این صورت مجموعه G_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_x = \{ \ g \in G \ \mid \ x \cdot g = x \ \},$$

که زیرگروهی از G است.

اثبات: به [۱۸] قضیه ۸.۴ مراجعه شود. □

زیرگروه G_x را ثابت ساز x در G می نامند و آن را با $\mathrm{Stab}_G(x)$ نشان می‌دهند.

مثال ۶.۱.۱: گروه G روی مجموعه G به صورت مزدوجی عمل می‌کند. نسبت به این عمل، مدار $\bar{x} = \{x^g \mid g \in G\}$ را در نظر بگیرید. این مدار شامل تمام مزدوج های x است. آن را رده مزدوجی x می‌نامیم و با $\mathrm{Cl}_G(x)$ نشان می‌دهیم.

نسبت به این عمل، ثابت ساز x عبارت است از:

$$G_x = \mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g^{-1}xg = x\}.$$

تعریف ۷.۱.۱: فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$. در این صورت مرکز ساز x در G، که با $C_G(x)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_G(x) = \{ \ g \in G \ \mid \ xg = gx \ \}.$$

به آسانی دیده می‌شود که $C_G(x)$ زیرگروه G است. نسبت به عمل مزدوجی، ثابت ساز x در G، همان مرکز ساز x در G است.

قضیه ۸.۱.۱: فرض کنیم G گروهی دلخواه و X یک G–مجموعه باشد. در این صورت

به‌ازای هر $x \in X$، $|\bar{x}| = [G : G_x]$، که در آن G_x ثابت ساز x در G است و $\bar{x}$ مدار x می‌باشد.

اثبات: به [۱۸] قضیه ۱۱.۴ مراجعه شود. □

نتیجه ۹.۱.۱: فرض کنیم $x \in G$. در این صورت اندازه رده مزدوجی x عبارت است از:

$$|\mathrm{Cl}_G(x)| = |G : C_G(x)|\cdot$$

لذا $|\mathrm{Cl}_G(x)|$ مرتبه گروه G را عاد می‌کند.

اثبات: با توجه به قضیه ۸.۱.۱ به آسانی به دست می آید. □

قضیه ۱۰.۱.۱: فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. در این صورت اگر C_1، ...، C_k تمامی رده‌های مزدوجی متمایز G باشند، به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq k$، x_i نماینده رده مزدوجی C_i باشد، آنگاه

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} [G : C_G(x_i)],$$

اثبات: به [۱۸] قضیه ۲۷.۴ مراجعه شود. □

این معادله را معادله رده‌ای نامند. تعداد رده‌های مزدوجی در G را با $k(G)$ نشان می‌دهیم.

از قضیه ۱۰.۱.۱ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۱.۱.۱: فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. در این صورت معادله رده‌ای به صورت زیر در می آید:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{t} [G : C_G(x_i)],$$

در معادله فوق x_1،...،x_t نماینده‌های رده‌های مزدوجی غیربدیهی C_1،...،C_t از G می‌باشند.

۲.۱ نمایش گروه

در این بخش به طور مختصر با نمایش گروه و نظریه سرشت آشنا می‌شویم و قضایای مقدماتی آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنیم G یک گروه ، F یک میدان و $\mathrm{GL}(n,F)$، گروه ماتریس های وارون پذیر $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F باشد. در این صورت یک نمایش G روی F عبارت است از یک همریختی چون ρ از G به $\mathrm{GL}(n,F)$ به ازای عدد صحیح مثبتی چون n. n را درجه ρ گوییم.

تعریف ۲.۲.۱: فرض کنیم V یک فضای برداری روی F و G یک گروه باشد. در این صورت V، یک FG–مدول است اگر به ازای هر $g \in G$، حاصل ضرب vg تعریف شده باشد و به ازای هر $u,v \in V$، $\lambda \in F$ و $g,h \in G$ شرایط زیر صادق باشند:

(۱) $vg \in V$.

(۲) $v(gh) = (vg)h$.

(۳) $v1 = v$.

(۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$.

(۵) $(u+v)g = ug + vg$.

تعریف ۳.۲.۱: فرض کنیم V با بعد متناهی روی F، یک FG–مدول و β یک پایه برای V باشد. به ازای هر $g \in G$ نماد $[g]_\beta$ نشان دهنده ماتریس درون ریختی $v \to vg$ از V نسبت به پایه β است.

قضیه ۴.۲.۱: اگر $\rho : G \to \mathrm{GL}(n,F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$، آنگاه به ازای هر $v \in V, g \in G$ با تعریف حاصل ضرب vg به صورت زیر، V تبدیل به یک FG–مدول

می‌شود.

$$vg = v(\rho(g)).$$

اثبات: به [۲۲] قضیه ۱۰.۱۷ مراجعه شود.

تعریف ۵.۲.۱: فرض کنیم V، یک FG–مدول است. یک زیرمجموعه W از V را یک FG–زیرمدول V می‌نامیم هرگاه W زیر فضای V باشد و به ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

تعریف ٦.۲.۱: FG–مدول V را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه مخالف صفر باشد و FG–زیرمدولی به‌جز $\{0\}$ و V نداشته باشد.

در این قسمت فرض کنیم $F = \mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط می‌باشد.

گزاره ۷.۲.۱: اگر G گروه آبلی باشد، بعد هر $\mathbb{C}G$–مدول تحویل‌ناپذیر ۱ است.

اثبات: به [۲۲] گزاره ۵.۹ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنیم V با بعد متناهی روی $\mathbb{C}$، یک $\mathbb{C}G$–مدول با یک پایه β است. در این صورت یک سرشت V عبارت است از تابع $\chi : G \to C$ با ضابطه

$$\chi(g) = \operatorname{tr}[g]_\beta \qquad (g \in G)$$

سرشت V به پایه β بستگی ندارد. $\operatorname{tr}[g]_\beta$، مجموع عناصر قطر اصلی $[g]_\beta$ است.

تعریف ۹.۲.۱: سرشت نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ را سرشت $\mathbb{C}G$–مدول $\mathbb{C}^n$ متناظر با آن نمایش تعریف کنیم، یعنی χ سرشت نمایش ρ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)) \qquad (g \in G)$$