چکیده

در این پایان نامه گراف های مقسوم علیه صفر معرفی می شوند. گراف مقسوم علیه صفر از یک نیم گروه با صفر، گرافی است که رأس هایش مقسوم علیه صفر، غیر صفر از نیم گروه می باشد، که در آن دو رأس متمایز در صورتی به وسیله یک یال به هم متصل می باشند که ضربشان در نیم گروه صفر شود. ویژگی های این گراف را بررسی می کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

اگر روی یک مجموعه عمل دوتایی تعریف کنیم، به طوری که تحت این عمل بسته و دارای خاصیت شرکت پذیری باشد، این مجموعه همراه با عمل دوتایی را نیم گروه گوییم.

حال اگر نیم گروه دارای عضو همانی باشد و هر عضو دارای معکوس باشد، آن گاه آن را گروه می نامیم.

هر حلقه مجموعه ای است با دو عمل دوتایی جمع و ضرب به طوری که تحت جمع یک گروه و تحت ضرب یک نیم گروه است، بنابراین هر حلقه با عمل ضرب، نیم گروه است.

اولین بار بک [۱] در سال ۱۹۸۸ به یک حلقه یکدار و جابجایی یک گراف نسبت داد. بعدها اندرسون [۲] و لیوینگتون [۳] به این موضوع علاقه‌مند شدند و به طور جدی نظریه گراف مقسوم علیه صفر را با ارائه یک تعریف دقیق و بررسی خواص گرافی و مقایسه کردن آن ها با خواص حلقه‌ای پایه گذاری کردند. آن ها گراف مقسوم علیه صفرحلقه یکدار و جابجایی R را با نماد $\Gamma(R)$ نشان دادند.

پس از آن دی مایر [۴]، مکنزی [۵] و اشنایدر [۶] گراف مقسوم علیه صفر نیم گروه جابجایی و دارای عضو صفر S را تعریف کردند و آن را با نماد $\Gamma(S)$ نشان دادند.

---

[۱] I.Beck
[۲] D.F.Anderson
[۳] P.S.Livingston
[۴] F.Demeyer
[۵] T.Mckenzie
[۶] K.Schneider

نظر بسیاری از افراد به آن جلب شد و بسیاری از ریاضی دانان به مطالعه در مورد $\Gamma(R)$ و $\Gamma(S)$ پرداختند.

در این پایان نامه، ابتدا در فصل اول تعاریف مورد نیاز را یادآوری می کنیم و سپس در فصل دوم خواص و ساختار $\Gamma(S)$ را بررسی می کنیم و در مورد هسته گراف مطالبی را ارائه می دهیم و همچنین بیان می کنیم که چه شرایطی لازم است تا یک گراف، گراف متناظر با یک نیم گروه باشد و شرایط مورد بررسی قرار می گیرد.

در فصل سوم در مورد گراف های ستاره و تظریفی از گراف های ستاره و نیم گروه های مربوط به آن مطالبی را ارائه می دهیم.

فصل چهارم پایان نامه در مورد ساختار و خواص $\overline{\Gamma(S)}$ است .

این گراف توسط وو [۷] و زو [۸] اخیراً معرفی شد و به گونه‌ای تعریف شد که $\Gamma(S)$ را به عنوان زیرگراف در بر دارد.

بعضی از گراف های خاصی که می توانند متناظر با $\Gamma(S)$ باشند، نیز معرفی شده است.

---

[۷] Wu

[۸] Zu

فصل ۱

تعاریف مقدماتی و پیش نیازها

۱—۱ پیش نیازهای مربوط به نیم گروه ها

دراین بخش تعاریف مورد نیاز از نیم گروه ها را یادآوری می کنیم.

۱—۱—۱ تعریف : یک نیم گروه عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند S همراه با عمل دوتایی بر S با این خاصیت که به ازای هر $a, b, c \in S$ داشته باشیم: $(ab)c = a(bc)$.

۱—۱—۲ تعریف : نیم گروه S را جابجایی گویند هرگاه به ازای هر $a, b \in S$ داشته باشیم: $ab = ba$.

۱—۱—۳ تعریف : اگر $(S, \cdot)$ یک نیم گروه باشد آن گاه زیر مجموعه غیر تهی T از S را زیر نیم گروه S نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in T$ داشته باشیم : $x \cdot y \in T$.

۱ــ۱ــ۴ تعریف : فرض کنید S یک نیم گروه و I یک زیر مجموعه ناتهی S باشد، I را ایده‌آل S گوییم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم: $sI \subseteq I$. هرگاه $\{0\} \subset I \subset S$ باشد، آن گاه I ایده‌آل محض است.

۱ــ۱ــ۵ تعریف : فرض کنید S یک نیم گروه باشد و $a \in S$. گوییم a یک مقسوم علیه صفر است، هرگاه عنصر ناصفری مانند $x \in S$ موجود باشد به طوری که $ax = 0$.

۱ــ۱ــ۶ تذکر : توجه کنید که در هر نیم گروه مانند S، عنصر $0 \in S$ یک مقسوم علیه صفر است.

۱ــ۱ــ۷ تذکر : مجموعه مقسوم علیه های صفر نیم گروه S را با $Z(S)$ نمایش داده و قرار می دهیم $Z(S)^* = Z(S) - \{0\}$.

۱ــ۱ــ۸ تذکر : نیم گروه S را مقسوم علیه صفر گوییم هرگاه هر عنصر آن مقسوم علیه صفر باشد یعنی $Z(S) = S$.

۱ــ۱ــ۹ تعریف : فرض کنید S یک نیم گروه باشد و x یک عضو از S باشد پوچساز x را با نماد $ann(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم: $ann(x) = \{a \in S \mid ax = 0\}$. توجه

کنید که $ann(x)$ یک ایده‌آل نیم گروه S است.

۱—۱—۱۰ تعریف : هر عضو x از S را خودتوان گویند اگر $x^۲ = x$ باشد.
مجموعه خودتوان های نیم گروه S را با $E(S)$ یا به طور ساده با E نشان می دهیم.

۱—۱—۱۱ تعریف : فرض کنید S یک نیم گروه باشد، هر عضو $a \in S$ را پوچ توان گوییم اگر عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $a^n = ۰$.
نیم گروه S را پوچ توان گوییم هر گاه هر عنصر آن پوچ توان باشد.

۱—۱—۱۲ تعریف : اگر عضو ۱ از S وجود داشته باشد در صورتی که

$$\forall \quad x \in S \quad ; \quad x۱ = ۱x = x$$

گوییم ۱ عضو همانی از S است و S یک نیم گروه با عضو همانی یا منوئید است.

۱—۱—۱۳ قضیه : عنصر همانی در هر نیم گروه در صورت وجود، یکتاست.

۱—۱—۱۴ تعریف : اگر S یک نیم گروه با حداقل دو عضو و همچنین شامل عضو صفر باشد در صورتی که

$$\forall \quad x \in S \quad ; \quad x۰ = ۰x = ۰$$

گوییم ۰ عضو صفری از S است و S یک نیم گروه با ۰ است.

نیم گروه S با عضو ۰ را با S° یا $S\bigcup\{\circ\}$ نشان می دهیم.

۱—۱—۱۵ تعریف : نیم گروه $(S,\cdot)$ یک گروه است اگر و تنها اگر

(۱) $e \in S$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in S$، $ea = a$.

(۲) به ازای هر $a \in S$، $b \in S$ ای موجود باشد به طوری که $ba = e$.

۱—۱—۱۶ تعریف :گروه $(G,\cdot)$ را یک گروه متناهی نامند هرگاه G فقط دارای تعدادی متناهی عنصر باشد. تعداد عناصر G را مرتبه G نامیم و با $|G|$ نشان می دهیم.

۱—۱—۱۷ تعریف : نیم گروه پوچ بدیهی، نیم گروهی با صفر است که ضرب هر دو عضوش صفر باشد.

۱—۱—۱۸ تعریف : اگر φ یک نگاشت از نیم گروه $(S,\cdot)$ به نیم گروه $(T,\cdot)$ باشد گوییم φ همریختی است اگر

$$\forall \quad x, y \in S \quad ; \quad (xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$$

S را دامنه φ و T را هم دامنه φ نامیم.

زیر مجموعه $S\varphi = \{S\varphi \mid s \in S\}$ را برد φ نامیم.

۱–۱–۱۹ تعریف : اگر φ یک به یک باشد همریختی φ را تکریختی نامیم و اگر φ پوشا باشد، φ را بروریختی نامیم و اگرφ یک به یک و پوشا باشد، φ را یکریختی نامیم.

۱–۱–۲۰ تعریف : اگر φ همریختی از S به S باشد، φ را درون ریختی نامیم و یکریختی از S به S خودریختی نامیده می شود.

۱–۱–۲۱ تعریف :اگر یکریختی از S به T وجود داشته باشد گوییم S و T یکریخت هستند و می نویسیم: $S \cong T$.

۱–۱–۲۲ تذکر : زیر نیم گرو ه $< A >$ شامل همه ی عضو هایی از S است که ضرب متناهی از عضوهایی در A باشد.

۱–۱–۲۳ تذکر : اگر$S =< A >$، می گوییم A مجموعه مولدی از S است و اگر $A = \{a\}$ آن گاه

$$< a >= \{a, a^۲, a^۳, \cdots\}$$

۱–۱–۲۴ تعریف : فرض کنید S یک نیم گروه باشد ایده‌آل بدیهی J از S را مینیمال گوییم،

هرگاه شامل ایده‌آل دیگری به جز $\{0\}$ نباشد.

۱—۱—۲۵ تذکر : ایده‌آل مینیمال J از نیم گروه S را ایده‌آل مینیمال اصلی گوییم هرگاه برای هر $x \in S$، $J = Sx$.

۱—۱—۲۶ تذکر : درسراسراین پایان نامه نیم گروه S دارای خواص زیر است:

(۱) جابجایی: $\forall \quad a, b \in S \quad ; \quad ab = ba$

(۲) دارای عضو صفر: $\forall \quad a \in S \quad ; \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

۱—۲ پیش نیازهای مربوط به نظریه گراف

در این بخش تعاریف مورد نیاز از نظریه گراف را یادآوری می کنیم. توجه شود که در سراسر این پایان نامه منظور از گراف، گراف ساده و بدون جهت است.

۱—۲—۱ تعریف : گراف ساده عبارت است از دوتایی $G = (V, E)$ که در آن V مجموعه غیر تهی و متناهی و E زیر مجموعه دو تأیی از V می باشد. به اعضای V، رئوس گراف و به اعضای E، یال گراف گویند. هرگاه $|V| = p$ و $|E| = q$ ، به گراف G از مرتبه p و اندازه q گفته می شود. و معمولاً با $G(p, q)$ نمایش می دهند.

۱—۲—۲ تعریف : گراف G را عمومی گویند، هرگاه $G=(V,E)$ متشکل از دوتایی V و E است که در آن V یک مجموعه غیر تهی و متناهی است و E زیرمجموعه دوتایی از V است نه لزوماً غیرتکراری و همچنین هر رأس می تواند تکرار شود یعنی طوقه به وجود آید، یعنی یالی که نقاط انتهایی اش رأس واحدی باشد.

۱—۲—۳ تعریف : درجه ی هر رأس[۱] ، تعداد یال هایی است که از آن می گذرد.
هرگاه $degV_i=0$ باشد به رأس V_i، رأس تنها گویند.
هرگاه $degV_i=1$ باشد به رأس V_i، رأس انتهایی گویند.
درجه هرطوقه ۲ است.

۱—۲—۴ قضیه : هرگاه $V=\{V_1,V_2,\cdots,V_p\}$ رئوس گراف G باشند، آن گاه مجموع درجات رئوس دو برابر یال ها است.

۱—۲—۵ تعریف : هرگاه $G=(V,E)$ یک گراف باشد منظور از زیرگراف G، گرافی مانند $G_0=(V_0,E_0)$ است که در آن $V_0\subseteq V$ و $E_0\subseteq E$.
هر گراف زیر گراف خودش است.

۱—۲—٦ تعریف : به گراف $G=(V,E)$ پوچ گویند هرگاه $|E|=0$ باشد. هرگاه $|V|=p$ باشد، گراف پوچ را با N_p نشان می دهند.

[۱] $degV_i$

۱—۲—۷ تعریف : به گراف ساده G گراف کامل گویند، هرگاه هر دو رأس گراف به هم متصل باشند. هرگاه $|V| = p$، گراف کامل را با K_p نشان می دهند.

۱—۲—۸ تذکر : هر گاه $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد داریم: $0 \leq q \leq p(p-1)/2$

۱—۲—۹ تعریف : فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد G را یک گراف دوبخشی گویند هرگاه $V = V_1 \cup V_2$، بطوریکه هیچ دو رأس V_1 یا هیچ دو رأس V_2 متصل نباشد و یال های گراف، رأسی از V_1 را به رأسی از V_2 متصل کند.

۱—۲—۱۰ تعریف : گراف دوبخشی را کامل گویند، هرگاه هر رأس V_1 به هر رأس V_2 متصل باشد.

هرگاه $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ باشد گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می دهند.

۱—۲—۱۱ تذکر : در هر گراف ساده G، $\Delta = max\{degV_i\}$ و $\delta = min\{degV_i\}$ داریم:

$$\delta \leq 2q/p \leq \Delta \leq p-1$$

۱—۲—۱۲ تعریف : گراف ستاره گراف دوبخشی کامل $K_{1,n}$ می باشد.

۱–۲–۱۳ تعریف : فرض کنید $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ دو گراف باشند. می گوییم $G_۱$ و $G_۱$ یکریخت هستند اگر تابع یکریختی $f : V_۱ \to V_۲$ موجود باشد، بطوریکه f اتصال یا عدم اتصال را حفظ کند. یعنی هرگاه $\{a, b\} \in E_۱$، آن گاه $\{f(a), f(b)\} \in E_۲$. و برعکس .

در آن صورت $G_۱ \cong G_۲$.

شرط لازم یکریختی دو گراف آن است که

(۱) $|V_۱| = |V_۲|$

(۲) $|E_۱| = |E_۲|$

۱–۲–۱۴ تعریف : به دنباله یالی که یال های تکراری نداشته باشد، مسیر گفته می شود.

۱–۲–۱۵ تعریف : به مسیری که رأس تکراری نداشته باشد، زنجیر گویند.

۱–۲–۱۶ تعریف : گراف G را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۱–۲–۱۷ تعریف : طول کوتاه ترین مسیر بین دو رأس u و v در G را با نماد $d(u, v)$ نشان می دهیم. اگر مسیری بین u و v وجود نداشته باشد، آن گاه می نویسیم $d(u, v) = \infty$.

۱—۲—۱۸ تعریف : فرض کنید G یک گراف باشد خروج از مرکز رأس v[۲] را به صورت زیر

$$e(v) = max\{d(x,v) \mid x \in V(G)\}$$

ارائه می کنیم.

۱—۲—۱۹ تعریف : اگر G یک گراف همبند باشد، شعاع G[۳] را به صورت زیر داریم:

$$rad(G) = min\{e(v) \mid v \in V(G)\}$$

۱—۲—۲۰ تعریف : قطر[۴] گراف همبند G را به صورت زیر

$$diam(G) = max\{e(v) \mid v \in V(G)\}$$

در نظر می گیریم.

۱—۲—۲۱ تعریف : طول کوچک ترین دور در G را کمر G[۵] می گوییم. اگر G دور نداشته باشد می نویسیم $girth(G) = \infty$.

۱—۲—۲۲ تعریف : فرض کنید v رأسی در گراف G باشد در این صورت مجموعه رئوس

---

[۲] e(v)
[۳] rad(G)
[۴] diam(G)
[۵] girth(G)

مجاور با v را با $N(v)$[6] نشان داده و قرار می دهیم:

$$\overline{N(v)} = N(v) \bigcup \{v\}$$

.

[6] Neighborhood

فصل ۲

گراف مقسوم علیه صفر نیم گروه جابجایی

۲—۱ مقدمه

گراف مقسوم علیه صفر از نیم گروه جابجایی با صفر، گرافی است که رأس هایش مقسوم علیه های صفر، غیر صفر از نیم گروه S هستند و دو رأس آن وقتی به وسیله یک یال به هم متصل هستند که ضربشان در نیم گروه صفر شود. اگر S مقسوم علیه صفر، غیر صفر نداشته باشد، آن گاه $\Gamma(S)$ تهی است، بنابراین ما فرض می کنیم که S شامل مقسوم علیه صفر، غیر صفر باشد.

۲—۲ ویژگیهایی از $\Gamma(S)$

۲—۲—۱ تعریف : تعریف رسته S: هرشیء در S یک جفت (S, I) است، وقتی که S نیم گروه جابجایی و I ایده‌آلی از S است. اگر (S, I) و (T, J) دو شیء در S باشند، ریخت $\sigma : (S, I) \longrightarrow (T, J)$، ریختی از نیم گروه های $\sigma : S \longrightarrow T$ می باشد در صورتی $\sigma(I) \subseteq J$.

۲–۲–۲ تعریف : رسته g از گراف های (غیر جهت دار): فرض کنید G و H دو گراف باشند ریخت $\gamma : G \longrightarrow H$ یک تابع از مجموعه رأس های G به مجموعه رأس های H است در صورتی که اگر $g_۱ - g_۲$ یالی در G باشد، آن گاه $\gamma(g_۱) - \gamma(g_۲)$ یالی در H است .

۲–۲–۳ تعریف : فانکتور همورد(کوواریانس) G از S به g: فرض کنید (S, I) یک شیء در S باشد. فرض کنید $G((S,I))$ گرافی باشد که به وسیله زیر تعریف می شود:

الف) رأس های $G((S,I))$ عضوهای S هستند.

ب) اگر $S_۱$ و $S_۲$ عضوهایی متمایز در S باشند، وقتی که $S_۱S_۲ \in S$ آن گاه $S_۱ - S_۲$ یالی در $G((S,I))$ است.

۲–۲–۴ تعریف : (S, I) را یک شیء در S در نظر می گیریم و فرض کنید $\Gamma((S,I))$ زیر گرافی از $G((S,I))$ باشد که بوسیله زیر تعریف می شود:

الف) رأس های $\Gamma((S,I))$، $S_۱ \in S - I$ بوده در صورتی که $S_۲ \in S - I$ باشد که $S_۱S_۲ \in S$.

ب) اگر $S_۱ - S_۲ \in I$ آن گاه، $S_۱ - S_۲$ یالی در $\Gamma((S,I))$ است.

۲–۲–۵ تبصره : اگر $S_۱ \in I$ و $S_۲ \in S$ ،آن گاه $S_۱$ و $S_۲$ همیشه به وسیله یالی در $G(S,I)$ متصل هستند. اگر $S_۱ \in S - (\Gamma(S,I) \bigcup I)$ و $S_۲ \in S$ ،آن گاه وقتی $S_۲ \in I$، $S_۱$ و $S_۲$ بوسیله یالی متصل هستند. اگر $I = \{۰\}$ آن گاه $\Gamma(S,I)$ را بوسیله $\Gamma(S)$ نشان می دهند.

۲—۲—۶ تعریف : زیر مجموعه غیر تهی I از S ، یک ایده‌آل است در صورتی که:

$$\forall \quad x \in S \quad , \quad a \in I \quad ; \quad xa \in I$$

۲—۲—۷ مثال : فرض کنید $Z(S)$ مجموعه مقسوم علیه صفر از S شامل صفر باشد. آن گاه $Z(S)$ ایده‌آلی در S بوده و $\Gamma(S) = \Gamma(Z(S))$. نیم گروه جابجایی S با صفر ، نیم گروه مقسوم علیه صفر است اگر S به طور کامل شامل مقسوم علیه صفر باشد.

در این مثال دو نیم گروه مقسوم علیه صفر داریم که یکریخت نیستند ولی گراف های یکسان دارند.

$$S = \{0, x, x^2, x^3\} \quad ; \quad x^4 = 0 \quad .(1)$$

$$T = \{0, a, y, b\} \quad ; \quad ay = by = a^2 = b^2 = y^2 = 0 \quad ; \quad ab = y \ (2)$$

گراف S، $x - x^3 - x^2$ و گراف T، $a - y - b$ است . S و T یکریخت نیستند زیرا x^2 در S مخالف صفر است اما مربع هر عضو در T، ۰ است.

۲—۲—۸ لم : اگر $a - x - b$ مسیری در$\Gamma(S)$ باشد آن گاه یا $\{0, x\}$ ایده‌آلی در S است یا $a - x - b$ مشمول در دوری کوچکتر مساوی ۴ است .

اثبات. $ann(a) = \{y \in S \mid ya = 0\} = \{0, x\}$ یا $ann(a) \bigcap ann(b) = \{0, x\}$ یا چون a و b مقسوم علیه های صفر S هستند، طبق تعریف $c \neq x, 0$ وجود دارد درصورتی که $ac = bc = 0$. در مورد اول چون ann یک ایده‌آل است پس $\{0, x\}$ ایده آلی درS است و در مورد دوم $a - x - b$ مشمول در $a - x - b - c - a$ یعنی دوری به طول ۴ $\leq$ است. $\square$

۲—۲—۹ قضیه : $\Gamma(S)$ همبند است و قطر آن کوچکتر مساوی ۳ است .

اثبات. فرض کنید x وy دو رأس در $\Gamma(S)$ باشند اگر $xy = 0$ ، آن گاه$d(x, y) = 1$. بنابراین فرض می کنیم xy مخالف صفر باشد.

اگر $x^۲ = y^۲ = ۰$، آن گاه $x - xy - y$ مسیری به طول ۲ است، بنابراین $d(x,y) = ۲$.
اگر $x^۲ = ۰$ و $y^۲ \neq ۰$ باشد،آن گاه

$$\exists \quad b \in z(S)^* - \{x,y\} \quad ; \quad by = ۰$$

.

اگر $bx = ۰$، آن گاه $x - b - y$ مسیری به طول ۲ است .
اگر $bx \neq ۰$، آن گاه $x - bx - y$ مسیری به طول ۲ است.
در هر مورد $d(x,y) = ۲$ است .
اگر $y^۲ = ۰$ و $x^۲ \neq ۰$ بحثی مشابه قبلی است. بنابراین فرض می کنیم xy و $x^۲$ و $y^۲$ مخالف صفر باشند. از طرفی چون x, y مقسوم علیه های صفر S هستند.

$$\exists \quad a, b \in z(S)^* - \{x,y\} \quad ; \quad ax = by = ۰$$

.

اگر $a = b$، آن گاه $x - a - y$ مسیری به طول ۲ است. بنابراین ما فرض می کنیم $a \neq b$.
اگر $ab = ۰$، آن گاه $x - a - b - y$ مسیری به طول ۳ است و از آن جا داریم: $d(x,y) \leq ۳$.
اگر $ab \neq ۰$، آن گاه $x - ab - y$ مسیری به طول ۲ است. بنابراین $d(x,y) = ۲$. پس از آن جا $d(x,y) \leq ۳$، بنابراین

$$diam(\Gamma(S)) \leq ۳$$

□

۲—۲—۱۰ قضیه : (۱) اگر $\Gamma(S)$ شامل دور نباشد، آن گاه $\Gamma(S)$ زیر گراف همبند از دو گراف ستاره است وقتی که مرکزشان بوسیله یال تنها متصل هستند.

(۲) هر گراف بدست آمده در قسمت قبل گرافی از نیم گروه جابجایی است .

اثبات. (۱) اگر طول ماکسیمال مسیر در $\Gamma(S)$، $۲ \leq$ باشد، آن گاه به سادگی می بینیم که گراف $\Gamma(S)$ ستاره است، بنابراین مشمول در گرافی با نوع مربوطه است.