فهرست مندرجات

مقدمه

ریاضیات نه تنها ابزاری بی بدیل در شکل گیری دقت و استدلال است بلکه نیروی شهود ، قدرت تخیل و روحیه نقّاد را پر و بال می دهد. همچنین زبان مشترکی بین همه ملت ها و عنصری پر قدرت در فرهنگ هاست. اما علاوه بر این ها ، به کمک رابطه ی دو جانبه ی کنش و واکنش با سایر علوم ، ریاضیات در تکوین مفاهیم و به کار گیری موضوعات متفاوت زندگی نقشی وافر ایفا می کند و در میان شاخه های مختلف ریاضی ، بی شک آنالیز ریاضی یکی از پر کاربرد ترین و زیبا ترین شاخه هاست که در سایر علوم نیز نقش به سزایی دارد.

مفهوم نقطه ثابت از حدود یکصد سال پیش وارد ریاضیات شد ، اساس نظریه نقطه ثابت بر استفاده پی در پی از تقریب ها برای اثبات وجود و یکتایی معادلات دیفرانسیل تکیه دارد. این روش با نام ریاضی دان هایی چون کوشی[۱] ، لیوویل[۲] ، لیپشتز[۳] ، پیکارد[۴] عجین است.

ساده ترین بیان از نقطه ثابت برای نگاشت f نقطه ای مانند x است که $f(x) = x$.

شرایط انقباضی نقش مهمی در مطالعه نظریه نقطه ثابت ایفا می کنند ویژگی نگاشت های انقباضی در کنار روش های دیگر ایده های مناسبی را برای نقطه ثابت در فضاهای مختلف ارائه می کنند.

استفهان باناخ[۵] با تلفیق روش های هندسی و آنالیزی قضیه نقطه ثابت را ارائه و

---

[۱] Cauchy
[۲] Liouvill
[۳] Lipschitz
[۴] Picard
[۵] Banach

اثبات کرد که یکی از پر کاربرد ترین قضیه ها در علوم مهندسی است که نشانه هایی از آن در علوم کامپیوتر ، نظریه کنترل ، پردازش تصویر و مخابرات وجود دارد.
در سال ۱۹۷۵ کریستی[۶] قضیه نقطه ثابت خود را ارائه کرد که این قضیه به راحتی قضیه باناخ را نتیجه می دهد.
در این پایان نامه وجود نقطه ثابت برای نگاشت های انقباضی مجموعه مقداری در فضای متریک کامل بیان و ارائه می شوند.
این پایان نامه شامل چهار فصل است ، در فصل اول به مفاهیم و تعاریف مقدماتی می پردازیم در فصل دوم قضیه نقطه ثابت باناخ ، قضیه لیم[۷] ، اصل کریستی و ایکلند و همچنین قضیه براور[۸] بیان می شوند.
در فصل سوم ، قضیه نقطه ثابت ریچ[۹] ، نادلر[۱۰] ، میزوگوشی[۱۱] و تاکاهاشی[۱۲] ، فنگ[۱۳] و لیو[۱۴] و کلایم[۱۵] و واردوسکی[۱۶] بیان و اثبات می شوند ، در فصل چهارم با افزایش شروطی بر قضیه های فوق دو قضیه اصلی را در فضا های متریک کامل بیان و اثبات می کنیم و با ارائه مثال هایی درستی نتایج را بررسی می کنیم .

---

[۶] Carisiti
[۷] Lim
[۸] Brower
[۹] Reich
[۱۰] Nadler
[۱۱] Mizogochi
[۱۲] Takahashi
[۱۳] Feng
[۱۴] Liu
[۱۵] Klim
[۱۶] Wardowski

فصل ۱

مفاهیم اولیه و مقدمات

در این فصل ما مفاهیمی مانند فضای متریک فشرده ، متریک هاسدورف ، انقباض های چند مقداری و نقطه ثابت را به طور مختصر توضیح می دهیم.
از آنجا که برخی مطالب این فصل ابزاری برای مطالعه ی سایر فصول می باشد ، بنابراین در این پایان نامه به طور خلاصه بعضی از مفاهیم را تعریف می کنیم در سراسر این پایان نامه N مجموعه اعداد طبیعی ، Z مجموعه اعداد صحیح ، Q مجموعه اعداد گویا ، R مجموعه اعداد حقیقی و C مجموعه اعداد مختلط است.

۱.۱ فضای متریک

تعریف (۱.۱.۱) : فرض کنید ؛ $S \neq \emptyset$ و $P : S \times S \to R^+$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق کند آنگاه S یک فضای متریک[۱] است.

- برای هر x, y متمایز در S ، $P(x, y) > 0$ و بعلاوه $P(x, x) = 0$
- برای هر x, y متمایز در S ، $P(x, y) = P(y, x)$ (P متقارن است).
- برای هر x, y, z متمایز در S ، $P(x + y) \leq P(x, z) + P(z, y)$ (نامساوی مثلثی).

تعریف (۲.۱.۱) : متریک کراندار ، اگر $d(x, y)$ یک فضای متریک باشد آن گاه

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

یک فضای متریک است.

تعریف (۳.۱.۱) : فضای $< S, \tau >$ (τ توپولوژی القاء شده روی فضای S است) یک فضای T_2 است اگر و تنها اگر ؛ x, y متمایز در S ایجاب کند که مجموعه های U و V در τ وجود داشته باشند به طوری که $x \in U$ و $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$. فضای T_2 را فضای هاسدورف[۲] نیز می گویند.

تذکر (۴.۱.۱) : وجود زیرنویس (اندیس) (۲) برای T مویّد وجود اندیس های دیگر برای T است که به صورت T_0 ، T_1 ، $T_{\frac{5}{4}}$ (فضای اوریسون[۳]) ، T_3 و $T_{\frac{7}{2}}$ تعریف می شوند در این نوشتار به خاطر عدم برخورد با این فضاها از پرداختن به این فضاها

---

[۱] Metric Space
[۲] Hausdorff
[۳] Orison

خودداری می کنیم.
لم (۵.۱.۱) : حد دنباله در یک فضای هاسدورف یکتاست .

۲.۱ فضای باناخ

تعریف (۱.۲.۱) : فرض کنید ؛ X یک فضای برداری باشد یک نیم نرم[۴] روی X ، تابع $P : X \to [0, \infty)$ است که شرایط زیر را داشته باشد :

۱) برای هر x, y در X ، $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

۲) برای هر x در X و هر α در اعداد مختلط ، $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$

نیم نرم P روی فضای خطی X ، یک نرم[۵] نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in X$ که $P(x) = 0$ آن گاه $x = 0$. نرم را با نماد $||\ ||$ نشان می دهند.
فضای خطی X همراه با $||\ ||$ تشکیل یک فضای نرم دار می دهد و با $(X, ||\ ||)$ نشان داده می شود.
مثال (۲.۲.۱) : فرض کنید $x = (x_i) \in R^n$ باشد نرم x را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$||x|| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

و متر حاصل از آن روی R^n را به صورت $d(x,y) = ||x - y||$ تعریف می کنیم که به متر اقلیدسی[۶] معروف است.

---
[۴] Semi Normed
[۵] Normed
[۶] Eculidean Metric

تعریف (۳.۲.۱) (فضای متریک کامل[۷]) : فضای متریک (X,d) را کامل می‌گوییم هرگاه هر دنباله ی کوشی در آن همگرا باشد .

مثال (۴.۲.۱) : $E^{1} = (R,d)$ که در آن $d(x,y) = |x-y|$ ، یک فضای متریک کامل است.

قضیه (۵.۲.۱) : هر دنباله ی همگرا در هر فضای متریک ، کوشی است.

عکس قضیه ی فوق همواره برقرار نیست.

تعریف (٦.۲.۱) : فضای نرم دار X باناخ[۸] نامیده می شود هرگاه با متر القا شده از نرم فضای متریک کامل باشد .

تعریف (۷.۲.۱) : فرض کنید ؛ X یک فضای هاسدورف و فشرده باشد و $C(X)$ مجموعه تمام توابع پیوسته مختلط روی X باشد ، اگر جمع و ضرب اسکالر روی $C(X)$ به صورت نقطه وار تعریف شود و به ازای هر $f \in C(X)$ تعریف کنیم؛

$$||f|| = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}$$

آن گاه $C(X)$ یک فضای باناخ است.

تعریف (۸.۲.۱) : گردایه ای از زیر مجموعه ی باز X مانند $\{G_\alpha\}$ را یک پوشش باز X گوییم ، هرگاه $X \subset \cup_\alpha G_\alpha$ و X را فشرده[۹] گوییم هرگاه هر پوشش باز آن حاوی زیر پوشش متناهی باشد.

لم (۹.۲.۱) : هر فضای متریک (M,d) فشرده است اگر و فقط اگر کامل و کراندار کلی باشد.

تعریف (۱۰.۲.۱) : فرض کنید ؛ X, Y دو فضای نرم دار و $L(X,Y)$ مجموعه تمام نگاشت های خطی از X به Y باشد. $T \in L(X,Y)$ را نگاشت خطی کراندار از X

---

[۷] Complete Metric Space

[۸] Banach

[۹] Compact

به Y گویند هرگاه عدد مثبتی مانند M موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ ، $||Tx|| \leq M||x||$.
مجموعه نگاشت های خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نشان می دهند ، $B(X,Y)$ زیر فضایی از $L(X,Y)$ است. چنانچه $X = Y$ ، به جای $B(X,Y)$ از نماد $B(X)$ و چنانچه $Y = C$ باشد. به جای $B(X,C)$ از نماد X^* استفاده می شود که X^* دوگان X است و نیز $X^{**} = B(X^*,C)$ دوگان دوم X نامیده می شود.
تعریف (۱۱.۲.۱) : فرض کنیم X,Y دو فضای متریک باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد ، می گوییم f بر X به طور یکنواخت پیوسته[۱۰] است هرگاه :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \forall p,q \in X \quad d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p),f(q)) < \epsilon$$

تعریف (۱۲.۲.۱) نقطه ثابت[۱۱] : فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک و $f : (M,d) \to (M,d)$ یک تابع دلخواه باشد ، $x_0 \in M$ را یک نقطه ثابت گوییم اگر و تنها اگر $f(x_0) = x_0$.
تعریف (۱۳.۲.۱) : تابع نیم پیوسته ی پایینی[۱۲] (L.S.C) نگاشت $f : X \longrightarrow R$ نیم پیوسته ی پایینی است اگر $\{x : f(x) > \alpha\}$ برای هر $\alpha \in R$ مجموعه ای باز در X باشد و یا f در x_0 نیم پیوسته پایینی است اگر :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; ; \; \forall x \in N_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_0) - f(x) < \epsilon$$

($N_\delta(x_0)$ همسایگی x_0 به شعاع δ است). و یا هرگاه برای هر دنباله ای مانند $\{x_n\}$ در X و $x \in X$ که $x_n \longrightarrow x$ داشته باشیم :

$$f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$$

---

[۱۰] Uniformly Continuous
[۱۱] Fixed Point
[۱۲] Lower Semi Continuous

تعریفی معادلِ نیم پیوسته ی پایینی ، به صورت نیم پیوسته ی بالایی نیز وجود دارد اگر چه ما در این نوشتار هیچ وقت نیازی به تعریف تابع نیم پیوسته‌ی بالایی نداریم . اما ذکر تعریف آن خالی از لطف نیست .

تعریف (۱۴.۲.۱) : نگاشت $f : X \longrightarrow R$ ، نیم پیوسته بالایی[۱۳] (U.S.C) است اگر $\{x : f(x) < \alpha\}$ برای هر $\alpha \in R$ مجموعه ای باز در X باشد و یا f در $x_\circ$ نیم پیوسته بالایی است اگر:

$$\forall \epsilon > \circ \quad \exists \delta > \circ \ ; \ \forall x \in N_\delta(x_\circ) \Rightarrow f(x) - f(x_\circ) < \epsilon$$

و یا هرگاه برای هر دنباله ی $\{x_n\}$ در X و $x \in X$ که $x_n \longrightarrow x$ داشته باشیم :

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(xn)$$

۳.۱ اصل استقرای ترا متناهی

تعریف (۱.۳.۱) : فرض کنید ؛ مجموعه ی X و یک رابطه بین اعضای آن که به صورت $x \leq y$ نمایش می دهیم داده شده باشد و دارای چهار شرط زیر باشد :

۱) برای هر $x \in X$ ، $x \leq x$.

۲) اگر $x, y \in X$ و داشته باشیم ؛ $x \leq y$ و $y \leq x$ آن گاه $x = y$.

---
[۱۳] Upper Semi Continuous

۳) اگر $x, y, z \in X$ و داشته باشیم ؛ $x \leq y$ و $y \leq z$ آن گاه $x \leq z$.

۴) برای $x, y \in X$ بتوان نتیجه گرفت که $x \leq y$ یا $y \leq x$.

رابطه ی $\leq$ یک رابطه ی ترتیبی[۱۴] روی X نامیده می شود. این رابطه را رابطه ترتیب جزئی گویند اگر در شرایط ۱ تا ۳ صدق کند و **ترتیب خطی**[۱۵] یا **ترتیب کلی**[۱۶] گویند اگر در هر ۴ شرط فوق صدق کند. $(X, \leq)$ **مجموعه مرتب جزئی (مرتب کلی)** است اگر X با **ترتیب جزئی (کلی)** $\leq$ مرتب شده باشد.

تعریف (۲.۳.۱) : یک مجموعه ی مرتب جزئی ، خوش ترتیب نامیده می شود اگر هر زیر مجموعه ناتهی آن دارای کوچکترین عضو باشد .

قضیه (۳.۳.۱) (اصل استقرای ترامتناهی) : فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه ی خوش ترتیب باشد ، برای هر $x \in X$ فرض کنیم $P(x)$ گزاره ای درباره ی x باشد . اگر برای هر $x \in A$ ، $P(y)$ برای هر $y < x$ راست باشد نتیجه بدهد که $P(x)$ راست است آن گاه $P(x)$ برای هر $x \in A$ راست است .

تعریف (۴.۳.۱) : اگر K یک زیر مجموعه‌ی بسته از فضای باناخ E باشد ، برای هر $x \in K$ مجموعه درونی[۱۷] را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$I_K(x) = x + \{\overline{h(y-x)|h \geq 1 \quad y \in K}\}$$

مثال (۵.۳.۱) :

---

[۱۴] Orderd Relation Arrangement

[۱۵] Linear Order

[۱۶] Total Order

[۱۷] Interior Sets

۱) اگر $K = [۱, ۲]$ و $x = ۱$ ، خواهیم داشت :

$$I_K(۱) = ۱ + \overline{\{h(y - ۱) | h \geq ۱ \quad y \in [۱, ۲]\}} = [۱, \infty)$$

۲) اگر $K = [۱, ۲]$ و $x = ۲$ ، خواهیم داشت :

$$I_K(۲) = ۲ + \overline{\{h(y - ۲) | h \geq ۱ \quad y \in [۱, ۲]\}} = [۱, \infty)$$

۳) اگر $K = \{۱, ۲, ۳\}$ و $x = ۱$ ، خواهیم داشت :

$$I_K(۱) = [۱, \infty), I_K(۲) = [۱, \infty), I_K(۳) = [۱, \infty)$$

۴.۱ معرفی نگاشت های مجموعه مقدار

تعریف (۱.۴.۱) : گراف[۱۸] F که آن را با $Gr(F)$ نمایش می دهیم برابر است با

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

تعریف (۲.۴.۱) (نگاشت مجموعه مقدار) : فرض کنید ؛ $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ دو فضای متریک باشند ، اگر مجموعه تمام زیر مجموعه های ناتهی Y را با نماد ۲^Y

Graph[۱۸]

نمایش دهیم ، نگاشت $F : X \to 2^Y$ یک نگاشت مجموعه مقدار[19] است که به هر $x \in X$ یک زیر مجموعه از Y را نظیر می کند. با این تعریف می توان گفت که هر نگاشت تک مقداری ، یک نگاشت مجموعه مقداری است که برد آن تنها شامل زیر مجموعه های تک عضوی می باشد.

نکته (۳.۴.۱) : در مراجع مختلف ، عبارات زیر به طور معادل برای اشاره به یک مفهوم که در تعریف (۲.۴.۱) بیان شد به کار می روند ؛ نگاشت مجموعه مقدار ، نگاشت چند مقداری[20] ، تابع مجموعه مقدار[21] و تابع چند تایی[22].

برای مشخص تر شدن یک تابع مجموعه مقدار از یک تابع تک مقداری ، در برخی از کتاب ها نماد های ویژه ای به کار رفته که در زیر به پاره ای از آنها اشاره می کنیم :

$$F : T -\circ X \quad F : T \rightsquigarrow X \quad F : T \to X$$

ما در این پایان نامه از نماد $F : T \to X$ استفاده می کنیم .

مثال (۴.۴.۱) : اولین موردی که ما با نگاشت مجموعه مقداری برخورد می کنیم ، وارون یک نگاشت معمولی تک مقداری است. اگر f یک نگاشت تک مقداری پوشا از (X, d_1) به (Y, d_2) باشد آنگاه f^{-1} به هر $y \in Y$ یک مجموعه نظیر می کند. یعنی:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \ : \ f(x) = y\}$$

[19] Multi-Valued Map
[20] Multi-Valued Mapping
[21] Set-Valued Function
[22] Multifunction

فصل ۲

نخستین قضیه های نقطه ثابت

۱.۲ قضیه براور

نخستین قضیه ی نقطه ثابت[۱] توسط بولتزانو[۲] (ریاضی دان چک) پس از قضیه ی مقدار میانی در ریاضیات عمومی به عنوان نتیجه ای از آن به شکل زیر ظاهر شد.
قضیه (۱.۱.۲) (قضیه ی بولتزانو) : اگر $F : [a, b] \to [a, b]$ تابعی پیوسته باشد آن گاه F یک نقطه ثابت در $[a, b]$ دارد.
بعد از آن کوشش در جهت تعمیم این قضیه آغاز شد، یکی از روش های تعمیم این قضیه ، ایجاد محدودیت ها و ویژگی هایی برای دامنه توابع به جای اعمال کردن محدودیت هایی برای ضابطه توابع می باشد.
نخستین قدم ، برای اثبات قضیه ی بولتزانو در فضای n بعدی است که توسط براور[۳]

---

[۱] First Fixed Point Theorem
[۲] Bolzano
[۳] Brower

در سال ۱۹۰۸ برداشته شد.
قضیه ی براور نتیجه ای از قضیه ی بوهل [۴] است که در سال ۱۹۰۴ مطرح شده بود.
قضیه (۲.۱.۲)(قضیه ی بوهل) : فرض کنیم B ؛ گوی واحد بسته در ^{n} و $T : B \to R^n$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x \in B$ ، $Tx \neq 0$ آن گاه $x_\circ \in \partial B$، (∂B مرز B است) و عدد $\mu < 0$ موجود است به طوری که $Tx_\circ = \mu x_\circ$.
اثبات رجوع کنید به [۷] یا [۹].
قضیه (۳.۱.۲) (نتیجه قضیه ی بوهل) : فرض کنیم B گوی واحد بسته در R^n و $f : B \to R^n$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که $x \in \partial B$ و برای هر $\lambda > 1$ ، $f(x) \neq \lambda x$ در این صورت $x_\circ \in B$ موجود است به طوری که : $f(x_\circ) = x_\circ$.
اثبات : فرض کنیم I تابع همانی باشد و قرار می دهیم $T = I - f$. اگر به ازای هر $x \in B$ داشته باشیم $f(x) \neq x$ آن گاه برای هر $x \in B$ داریم $Tx \neq 0$ حال از قضیه‌ی بوهل نتیجه می شود که $x \in \partial B$ و عدد $\mu < 0$ موجود است که $Tx = \mu x$ یعنی :

$$f(x_\circ) = x_\circ - Tx_\circ = x_\circ - \mu x_\circ = (1 - \mu)x_\circ$$

بنابراین باتوجه به فرض چون $x_\circ \in \partial B$ ، باید $1 \leq 1 - \mu$ اما $\mu < 0$ واین تناقض نشان می دهد که فرض عدم وجود نقطه ی ثابت برای f باطل است. ■
قضیه ی (۴.۱.۲) (قضیه ی براور) : فرض کنیم B گوی واحد بسته در R^n و $f : B \to B$ یک نگاشت پیوسته باشد در این صورت f دارای یک نقطه ی ثابت است.
اثبات : برای اثبات این قضیه نیاز به مطالبی از توپولوژی جبری است که در آخر همین فصل به آن می پردازیم .
نتیجه (۵.۱.۲) : حالت $n = 1$ برای قضیه ی براور ، همان قضیه ی بولتزانو است .

---
[۴] Bohel

براور قضیه ی خود را برای $n = ۳$ در سال ۱۹۰۹ اثبات کرد ، سپس در سال ۱۹۱۰ آدامار[۵] با استفاده از نظریه ی شاخص ها اثباتی برای قضیه ی براور ارائه نمود ، همچنین در سال ۱۹۱۲ براور اثباتی کلی با استفاده از نظریه ی درجه برای قضیه ی خود ارائه کرد.

نتیجه (۶.۱.۲) : قضیه ی براور ، نتیجه ای از قضیه ی بوهل است .

اثبات : در حالت خاص $f : B \to B$ ، برای $x \in \partial B$ و برای $\lambda > ۱$ داریم $f(x) \neq \lambda x$ لذا با استفاده از قضیه ی بوهل $x_\circ \in B$ موجود است به طوری که $f(x_\circ) = x_\circ$. ■

تذکر : بعضی از منابع به دلیل نکات تاریخی و اخلاقی قضیه ی براور را قضیه ی براور—بوهل می نامند.

قضیه ی (۷.۱.۲) (قضیه ی کلی نقطه ثابت براور) : فرض کنیم B زیر مجموعه ای ناتهی ، کراندار ، بسته و محدب از فضای باناخ با بعد متناهی X و $T : B \to B$ نگاشتی پیوسته باشد. آن گاه T در B دارای نقطه ثابت است.

۲.۲ اصل انقباض باناخ

در سال ۱۹۲۲ استفهان باناخ ، اصل انقباض را مطرح نمود ، این اصل وجود نقطه ثابت یکتا در هر انقباض روی یک فضای متری کامل را بیان می کند ، اصل انقباض باناخ[۶] ، بی تردید ، زیربنای نظریه ی نقطه ثابت است نتایج ارزشمندی توسط ریاضی دانهای مختلف در تعمیم این اصل حاصل شد و چاپ و ارائه مقالاتی در این مورد ، یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل ، معادلات انتگرالی ، مسائل بهینه سازی و

---

[۵] Adamar

[۶] Banach's Contraction Axiom

... را تضمین می کند.

تعریف (۱.۲.۲) : فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد نگاشت $T:X\to X$ را انقباضی[۷] گوییم هرگاه ثابتی مانند α که $۰<\alpha<۱$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$^*d(Tx,Ty)\leq \alpha d(x,y)$$

اگر $\alpha=۱$ باشد نگاشت T را نامبسوط (ناگستردنی) می گویند.

مثال (۲.۲.۲) : اگر $C=[-۱,۱]$ و $C\subset R$ و نگاشت $T:C\to C$ با ضابطه $T(x)=\sin x$ نگاشت نامبسوط است .چون برای هر $x,y\in C$ بنابر قضیه ی مقدار میانگین $\gamma\in(x,y)$ وجود دارد به طوری که $\sin x-\sin y=\cos\gamma(x-y)$ و

$$||Tx-Ty||=||\sin x-\sin y||=||\cos\gamma(x-y)||\leq||x-y|| \qquad (\alpha=۱)$$

نتیجه (۳.۲.۲) :

از رابطه $*$ در تعریف (۱.۲.۲) نتیجه می شود که :

الف : نگاشت T روی X به طور یکنواخت پیوسته است.

ب : شرط کامل بودن X در قضیه ی انقباضی که در زیر بیان می شود یک شرط لازم است و نمی توان آن را حذف کرد.

قضیه (۴.۲.۲) (باناخ) : فرض کنید ؛ (M,d) یک فضای متریک کامل و $f:(M,d)\to(M,d)$ یک نگاشت انقباضی با ثابت انقباض $۰<k<۱$ باشد آن گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

مثال (۵.۲.۲) : فرض کنید $T:(۰,۱]\longrightarrow(۰,۱]$ یک نگاشت باشد

---

[۷] Contractive

که در آن $T(x) = \frac{x}{۲}$ در این صورت T یک نگاشت انقباضی است.
مثال (۶.۲.۲) : فضای متریک R با متر اقلیدسی را در نظر بگیرید و $T : R \to R$ را به صورت $T(x) = x + ۱$ تعریف کنید در این صورت R با متر اقلیدسی کامل است اما برای هر $x, y \in R$ که $x \neq y$ ، T انقباضی نیست.
قضیه (۷.۲.۲) : اگر (M, d) یک فضای متریک کامل و $T : M \longrightarrow M$ یک نگاشت انقباض باشد T فقط یک نقطه ثابت $x_۰$ دارد و بعلاوه برای هر $x \in M$ ، $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_۰$.

۳.۲ تعمیم اصل باناخ

قضیه زیر را میزوگوشی[۸] و تاکاهاشی[۹] با کمی پیچیدگی بیشتر برای نگاشت های مجموعه مقداری ارائه کردند.
قضیه (۱.۳.۲) : فرض کنید ؛ (M, d) یک فضای متریک کامل و $T : M \longrightarrow M$ یک نگاشت باشد همچنین فرض کنید که وجود داشته باشد $\alpha \in S$ به طوری که برای هر $x, y \in M$ داشته باشیم :

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$$

آن گاه T یک نقطه ثابت $z \in M$ دارد و $\{T^n(x)\}$ همگرا به z است (برای هر $x \in M$). S مجموعه تمام توابع $\alpha : R^+ \to [۰, ۱)$ ، که شرط $\alpha(T^n) \to ۱$ ایجاب کند $T^n \to ۰$.

[۸] Mizogechi
[۹] Takahashi

اثبات : $x \in M$ را ثابت در نظر می گیریم و قرار می دهیم $x_n = T^n(x)$ ، $(n = ۱, ۲, \cdots)$.

قضیه را در دو مرحله اثبات می کنیم.

مرحله اول : باید ثابت کنیم که $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+۱}) = ۰ \quad (n \to \infty)$ از آنجایی که T یک دنباله انقباضی و $\{d(x_n, x_{n+۱})\}$ یک دنباله یکنواخت کاهشی و از پایین کراندار است پس $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+۱}) = r \geq ۰$ فرض می کنیم ؛ $r \neq ۰$ سپس با شرط انقباضی $\frac{d(x_{n+۱}, x_{n+۲})}{d(x_n, x_{n+۱})} \leq \alpha d(x_n, x_{n+۱})$ وقتی $n \to \infty$ $(n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$ مشاهده می کنیم که $۱ \leq \lim_{n\to\infty} \alpha(d(x_n, x_{n+۱}))$ و در حالی که $\alpha \in S$ لذا نتیجه می گیریم که : $r = ۰$ و این با مرحله اول در تناقض است. پس $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+۱}) = ۰$

مرحله دوم : باید ثابت کنیم که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است .

برهان : فرض کنیم ؛ $\limsup_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) > ۰$ با استفاده از نامساوی مثلثی داریم :

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x_{m+۱}) + d(x_{m+۱}, x_m)$$

با استفاده از شرط انقباض داریم :

$$d(x_n, x_m) \leq (۱ - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-۱}[d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{m+۱}, x_m)]$$

با فرض $\limsup_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) > ۰$ از مرحله اول ایجاب می کند که

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \alpha d(x_n, x_{n+۱}) \geq ۱ \\ &\qquad \Rightarrow ۱ - \lim_{n\to\infty} \alpha d(x_n, x_{n+۱}) \leq ۰ \\ &\qquad \Rightarrow \lim_{m,n\to\infty}(۱ - \alpha d(x_n, x_m)) \to ۰ \end{aligned}$$