دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

مباحثی در $S-$ عمل‌های تصویری

نگارش

گلثوم علی‌آبادی

استاد راهنما

دکتر علی معدنشکاف

استاد مشاور

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

آذرماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

سپاس به پیشگاه پروردگاری که دریچه‌های علم و معرفت را فراروی انسان گشود و با علم و قلم به انسان کرامت بخشید تا با تکیه بر دو بال ایمان و اندیشه در افق‌های بیکران رستگاری پرواز کند. او را حمد و ستایش می‌گویم، حمد و سپاسی که تنها خداوند سبحان را سزاست.

این پایان نامه حاصل راهنمایی‌های ارزشمند استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر معدنشکاف است که در تمام مراحل راهگشای من بودند و صبورانه یارم کردند.

تقدیم به :

دستان پر مهر پدرم،

چشمان همیشه منتظر مادرم

و

همسرم، که وجودش همواره آرامش دهنده روح و تسلی‌بخش خاطرم بوده است.

چکیده

فرض کنیم S تکواره باشد. یک $S-$ عمل راست مجموعه ناتهی A به همراه یک نگاشت $A \times S \longrightarrow A$ است، که در آن تصویر (a,s) به‌صورت as نمایش داده می‌شود، به گونه‌ای که برای هر $s,t \in S$ و $a \in A$، $a(st)=(as)t$ و $a1=a$. به طور مشابه $S-$ عمل چپ تعریف می‌شود.

در این پایان‌نامه ابتدا تعریف $S-$ عمل تصویری را گسترش می‌دهیم و $S-$ عمل تصویری ضعیف و $(S/I,S/J)-$ تصویری را معرفی می‌کنیم. سپس درون‌بر، هم‌حاصلضرب و حاصلضرب این عمل‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همچنین شرایط لازم و کافی برای تصویری ضعیف بودن هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای دو کپی از S توسط ایدآل راست I، یعنی $S \coprod^I S$، را مطرح می‌کنیم.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌های [۱۱]، [۷] و [۱۲] نوشته شده است.

واژه‌های کلیدی: $S-$ عمل، تصویری، تصویری ضعیف، تصویری ضعیف ریس، هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای، $(S/I,S/J)-$ تصویری.

مقدمه

فرض کنیم S تکواره باشد. یک $S-$ عمل راست مجموعه ناتهی A به همراه یک نگاشت $A \times S \longrightarrow A$ است، که در آن تصویر (a,s) به‌صورت as نمایش داده می‌شود، به گونه‌ای که برای هر $s,t \in S$ و $a \in A$، $a(st)=(as)t$ و $a1=a$. به طور مشابه $S-$ عمل چپ تعریف می‌شود.

در سال ۱۹۶۰، اسکورن یاکف [۱] بحث دسته‌بندی همولوژیکی تکواره‌ها را مطرح کرد. این بحث در دهه‌های بعد نیز گسترش پیدا کرد، که کیلپ[۲] و همکارانش کتاب تکواره‌ها، عمل‌ها و رسته‌ها را در این زمینه منتشر کردند. یکی از زمینه‌های مطالعاتی برجسته‌ای که در این زمینه مورد مطالعه قرار گرفته است، عمل‌های آزاد و عمل‌های تصویری‌اند. کنائر[۳] در سال ۱۹۷۲ در مقاله [۹] ساختار عمل‌های تصویری را بررسی کرد. در سال ۱۹۹۹، اولتمنز[۴] و کنائر مفهوم جدیدی به نام $S-$ عمل‌های تصویری ضعیف در مقاله [۱۱]، تعریف کردند. در مقاله [۱۲] کنائر و اولتمنز با گسترش مفهوم تصویری ضعیف، مفهوم $(S/I,S/J)-$ تصویری را در سال ۲۰۰۶ معرفی کرده‌اند.

در سال ۲۰۰۵، کیلپ و کنائر شرایط لازم و کافی برای تصویری ضعیف بودن هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای دو کپی از S توسط اید آل راست I، یعنی $S\coprod^I S$، در مقاله [۷] مطرح کردند.

این پایان‌نامه متشکل از چهار فصل است. در فصل اول تعدادی تعریف، لم و قضیه که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، آورده‌ایم. فصل دوم شامل چهار بخش است که در بخش اول به تعریف عمل‌های تصویری و رابطه آن با عمل‌های آزاد می‌پردازیم. در بخش دوم عمل‌های تصویری ضعیف را معرفی می‌کنیم. بخش سوم را با گزاره‌ای آغاز می‌کنیم که رابطه درون‌بر و عمل‌های خارج‌قسمتی تصویری ضعیف را بیان می‌کند و در بخش آخر به دسته‌بندی همولوژیکی تکواره‌ها توسط عمل‌های تصویری می‌پردازیم. فصل سوم از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول را با تعریف هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای آغاز می‌کنیم. در بخش دوم به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن $S\coprod^I S$، تصویری ضعیف باشد. در قضیه پایانی این بخش شرایط معادلی برای اینکه $S\coprod^I S$ تصویری ضعیف باشد، بیان می‌کنیم. در فصل چهارم با گسترش مفهوم تصویری ضعیف، مفهوم $(S/I,S/J)-$ تصویری را تعریف

---

[۱] Skornjakov
[۲] Kilp
[۳] Knauer
[۴] Oltmanns

می‌کنیم. در ادامه با کمک نمودار رابطه آن‌ها را با انواع عمل‌های تصویری ضعیف بیان می‌کنیم و با کمک دسته‌بندی همولوژیکی تکواره‌ها شرایط معادلی را برای عمل‌های $(S/sS, S/J)-$ تصویری و $(S/sS, S/tS)-$ تصویری مطرح می‌کنیم.

مفاهیم این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های [۱۱]، [۷] و [۱۲] تنظیم شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در بخش اول این فصل به تعریف نیم‌گروه و تکواره می‌پردازیم. بخش دوم را با تعریف رسته آغاز می‌کنیم. در ادامه این بخش مثال‌هایی از رسته‌ها می آوریم که تا کنون با آن‌ها آشنابوده‌ایم و حال آن‌ها را به عنوان رسته معرفی می‌کنیم. در بخش سوم رسته $S-$ عمل‌ها را تعریف کرده و با توجه به اهمیت این رسته در این پایان‌نامه به بیان چند قضیه و گزاره مهم از جمله قضیه همریختی‌ها در $S-$ عمل‌ها می‌پردازیم.

بخش کامل از این حوزه در ریاضیات را می‌توان در کتاب تکواره‌ها، عمل‌ها و رسته‌ها اثر ماتی کیلپ و همکارانش که در سال ۲۰۰۰ میلادی منتشر شد، یافت.

۱.۱ نیم‌گروه‌ها، تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱ یک نیم‌گروه[1] عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند G همراه با عملی دوتایی بر G با خاصیت زیر:

(شرکت پذیری) به ازای هر $a,b,c\in G$ $\quad a(bc)=(ab)c$

[1] semigroup

تعریف ۲.۱.۱ یک تکواره[۲]، نیم‌گروهی است مانند G که شامل یک عنصر همانی دو طرفه مانند $۱ \in G$ است، یعنی به ازای هر $a \in G$، $a۱ = ۱a = a$.

تعریف ۳.۱.۱ عنصر $z \in S$ صفر چپ (صفر راست) تکواره S نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $t \in S$ داشته باشیم، $zt = z$ ($tz = z$) و یک صفر S است، اگر صفر چپ و راست باشد.
تکواره S یک تکواره صفر چپ (صفر راست) است، اگر همه اعضای $S\setminus\{۱\}$ صفر چپ (صفر راست) باشند. S یک تکواره صفر است هرگاه همه اعضای $S\setminus\{۱\}$ صفر باشند.

مثال ۴.۱.۱ مجموعه $S = \{۱, s, t\}$ همراه با ضربی که در جدول زیر آمده است، یک تکواره صفر چپ می‌باشد.

.	۱	s	t
۱	۱	s	t
s	s	s	s
t	t	t	t

تعریف ۵.۱.۱ عضو $e \in S$، خودتوان نامیده می‌شود، اگر $e.e = e$. مجموعه تمام عضوهای خودتوان S را با $E(S)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر در تکواره S، $E(S) = S$ باشد، به S تکواره خودتوان گوییم.

مثال ۶.۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی همراه با عمل کوچکترین مضرب مشترک دو عدد، یک تکواره خودتوان است.

تعریف ۷.۱.۱ عضو c از تکواره S حذف‌پذیر[۳] راست (حذف‌پذیر چپ) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $r, t \in S$ تساوی $rc = tc$ ($cr = ct$)، تساوی $r = t$ را نتیجه دهد. همچنین به تکواره S حذف‌پذیر راست (حذف‌پذیر چپ) گوییم، هرگاه همه عناصر آن حذف‌پذیر راست (حذف‌پذیر چپ) باشد.

---
[۲] monoid
[۳] cancellable

مثال ۸.۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی همراه با ضرب معمولی یک تکواره حذف‌پذیر راست و حذف‌پذیر چپ است.

تعریف ۹.۱.۱ تکواره S جمع‌شدنی [۴] چپ (جمع شدنی راست) است، هرگاه برای هر $p, q \in S$، عنصر $r \in S$ وجود داشته باشد، به طوری که $rp = rq$ ($pr = qr$).

مثال ۱۰.۱.۱ تکواره S که شامل یک صفر چپ باشد، یک تکواره جمع‌شدنی چپ است.

مثال ۱۱.۱.۱ تکواره $(\mathbb{N}, \max)$، جمع‌شدنی راست و جمع‌شدنی چپ است.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر S یک تکواره باشد، گوییم $I \subseteq S$ یک اید آل راست از S است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) I ناتهی باشد،

۲) برای هر $s \in S$ و $a \in I$، داشته باشیم $as \in I$.

به طور مشابه می‌توان اید آل چپ را نیز تعریف کرد.

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر S یک تکواره باشد و $s \in S$، کوچکترین اید آل راست S که شامل s است، به این صورت تعریف می‌شود:

$$sS = \{st \mid t \in S\}$$

که اید آل اصلی راست تولید شده توسط s نامیده می‌شود.

به طور مشابه می‌توان اید آل اصلی چپ تولید شده توسط s را نیز تعریف کرد.

[۴] collapsible

تعریف ۱۴.۱.۱ S یک تکواره ایدآل اصلی راست (ایدآل اصلی چپ) نامیده می‌شود، هرگاه هر ایدآل راست (ایدآل چپ) آن ایدآل اصلی راست (ایدآل اصلی چپ) باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ تکواره S را برگشت‌پذیر چپ[۵] (راست) نامیم، هرگاه اشتراک هر دو ایدآل چپ (راست) در آن ناتهی باشد.

۲.۱ رسته‌ها

تعریف ۱.۲.۱ هر رسته[۶] $\mathcal{C}$ خانواده‌ای است از اشیا که معمولاً آن‌ها را با $A, B, C, \ldots$ نشان می‌دهیم، با این ویژگی که

۱) هر دو شی A و B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Hom(A,B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی مثل A، B، C و D که $(A,B) \neq (C,D)$، $Hom(A,B) \cap Hom(C,D) = \emptyset$،

۲) به ازای هر سه شی A، B و C، تابع

$$. : Hom(B,C) \times Hom(A,B) \longrightarrow Hom(A,C)$$
$$(g,f) \longmapsto gf$$

موجود است که

- به ازای هر چهار شی مثل A، B، C و D، اگر $f \in Hom(A,B)$، $g \in Hom(B,C)$ و $h \in Hom(C,D)$، آن‌گاه $h(gf) = (hg)f$،

[۵] left inversible
[۶] category

• به ازای هر شی مثل A، عضوی از $Hom(A,A)$ مثل ۱_A موجود است که به ازای هر عضو از $Hom(A,B)$ مثل f و هر عضو از $Hom(C,A)$ مثل g، $\text{۱}_A g = g$ و $f\text{۱}_A = f$.

در رسته‌ای مثل $\mathcal{C}$، به ازای هر دو شی مثل A و B، هر عضو از $Hom(A,B)$ را ریختار از A به B می‌نامند. نماد $f : A \longrightarrow B$ هم یعنی این که f ریختاری از A به B است.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{S}$ رده تمام مجموعه‌ها باشد. به ازای $A, B \in \mathcal{S}$، $Hom(A,B)$ مجموعه تمام توابع $f : A \longrightarrow B$ است. به آسانی دیده می‌شود که $\mathcal{S}$ یک رسته است.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{S}$ رده تمام گروه‌ها باشد. $Hom(A,B)$ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های گروهی بین A و B می‌باشد. می‌بینیم که $\mathcal{S}$ یک رسته می‌باشد.

مثال ۴.۲.۱ گروه ضربی G را می‌توان رسته‌ای با یک شی، یعنی G در نظر گرفت. فرض کنیم $Hom(G,G)$ مجموعه همه عناصر G باشد. ترکیب همریختی‌های a و b چیزی جز ab با عمل دوتایی در G نیست و ۱_G، عنصر همانی e از G است.

تعریف ۵.۲.۱ شی I در رسته $\mathcal{C}$ را شی آغازی[۷] یا ابتدایی گوییم اگر به ازای هر شی C، از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت مانند $I \longrightarrow C$ وجود داشته باشد.

مثال ۶.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، $\emptyset$ شی آغازی است.

مثال ۷.۲.۱ در رسته گروه‌ها، هر گروه بدیهی شی آغازی است.

---
[۷] initial object

تعریف ۸.۲.۱ شی T در رسته $\mathcal{C}$ را شی نهایی [۸] یا پایانی گویند اگر به ازای هر شی C از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت $C \longrightarrow T$ وجود داشته باشد.

مثال ۹.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، مجموعه‌های تک‌عضوی شی نهایی هستند.

مثال ۱۰.۲.۱ در رسته گروه‌ها، هر گروه بدیهی شی نهایی است.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته بوده و $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیا $\mathcal{C}$ باشد. یک حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$، شیئی است مانند P از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{p_i : P \longrightarrow A_i \mid i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شی B و هر خانواده $\{\varphi_i : B \longrightarrow A_i \mid i \in I\}$ از ریخت‌های $\mathcal{C}$، ریخت منحصربه‌فردی مانند $\varphi : B \longrightarrow P$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$، $p_i \circ \varphi = \varphi_i$. یعنی به ازای هر $i \in I$، نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\
P \arrow[r, "p_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

شی حاصلضرب P برای $\{A_i \mid i \in I\}$ را معمولاً با $\prod\limits_{i\in I} A_i$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۲.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، حاصلضرب دکارتی $\prod\limits_{i\in I} A_i$ شی حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از مجموعه‌ها است.

در رسته گروه‌ها حاصلضرب مستقیم، $\prod\limits_{i\in I} G_i$ شی حاصلضرب برای خانواده $\{G_i \mid i \in I\}$ از گروه‌ها است.

[۸] terminal object

قضیه ۱۳.۲.۱ هرگاه $(P,\{p_i\})$ و $(Q,\{q_i\})$ هر دو شی حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از اشیا رسته $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه P و Q معادلند.

برهان . قضیه ۳.۷.۱ از مرجع [۲۰] را ببینید. ■

تعریف ۱۴.۲.۱ یک هم‌حاصلضرب برای خانواده‌ی $\{A_i \mid i \in I\}$ از اشیا در رسته $\mathcal{C}$ شیئی است مانند S از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{\iota_i : A_i \longrightarrow S \mid i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شی B و خانواده $\{\psi_i : A_i \longrightarrow B \mid i \in I\}$ از ریخت‌های دلخواه، ریخت منحصربه‌فردی مانند $\psi : S \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$، $\psi \circ \iota_i = \psi_i$. یعنی، برای هر $i \in I$، نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & S \arrow[d, "\psi"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

شی هم‌حاصلضرب S برای $\{A_i \mid i \in I\}$ معمولاً با $\coprod_{i\in I} A_i$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۵.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$، اجتماع مجزای آن‌ها، یعنی $\dot{\cup} A_i$، شی هم‌حاصلضرب این خانواده است.

قضیه ۱۶.۲.۱ هرگاه $(S,\{\iota_i\})$ و $(S',\{\lambda_i\})$ هر دو شی هم‌حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از اشیا رسته $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه S و S' معادلند.

برهان . قضیه ۵.۷.۱ از مرجع [۲۰] را ببینید. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ رسته ملموس[۹] رسته‌ای است مانند $\mathcal{C}$ همراه با تابعی چون σ که به هر شی A از $\mathcal{C}$ مجموعه $\sigma(A)$ (به نام مجموعه زمینه A) را نسبت می‌دهد به طوری که

[۹] concrete

۱) هر ریخت $A \longrightarrow B$ از $\mathcal{C}$ تابعی بر مجموعه‌های زمینه $\sigma(A) \longrightarrow \sigma(B)$ است.

۲) ریخت همانی هر شی A از $\mathcal{C}$، تابع همانی بر مجموعه زمینه $\sigma(A)$ است.

۳) ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ با ترکیب توابع بر مجموعه‌های زمینه یکی است.

در ادامه شی و مجموعه زمینه را با یک علامت نشان داده و از ذکر صریح σ خودداری می‌کنیم.

مثال ۱۸.۲.۱ رسته گروه‌ها همراه با تابعی که به هر گروه مجموعه زمینه‌اش در معنی عادی را نسبت می‌دهد یک رسته ملموس است. ولی در مثال ۴.۲.۱، هرگاه تابع σ به گروه G مجموعه زمینه معمولی G را نسبت دهد، آن‌گاه رسته مورد نظر ملموس نیست. (زیرا ریخت‌ها بر مجموعه G تابع نیستند.)

تعریف ۱۹.۲.۱ فرض می‌کنیم F شیئی در رسته ملموس $\mathcal{C}$، X مجموعه‌ای ناتهی و $i : X \longrightarrow F$ یک نگاشت (از مجموعه‌ها) باشد. گوییم F بر مجموعه X آزاد است اگر به ازای هر شی A از $\mathcal{C}$ و نگاشت $f : X \longrightarrow A$ (از مجموعه‌ها)، ریخت منحصر به فردی از $\mathcal{C}$ مانند $\bar{f} : F \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که $\bar{f} i = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

مثال ۲۰.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و $g \in G$. به آسانی دیده می‌شود که نگاشت $\bar{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ تعریف شده با $\bar{f}(n) = g^n$، همریختی منحصر به فردی است که $۱ \longmapsto g$. در نتیجه هرگاه $X = \{۱\}$ و $i : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ نگاشت شمول باشد آن‌گاه $\mathbb{Z}$ بر X در رسته گروه‌ها، آزاد است. (اگر $f : X \longrightarrow G$، فرض می‌کنیم $g = f(۱)$ و $\bar{f}$ را مانند بالا تعریف می‌کنیم.)

قضیه ۲۱.۲.۱ هرگاه $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس، F و F' اشیایی از $\mathcal{C}$ باشند به طوری که F بر مجموعه X و F' بر مجموعه X' آزاد باشد و نیز $|X| = |X'|$، آن‌گاه F با F' معادلند.

برهان . قضیه ۸.۷.۱ از مرجع [۲۰] را ببینید. ■

تعریف ۲۲.۲.۱ موقعیت عقب‌بر[10] در رسته $\mathcal{C}$ را ملاحظه کنید

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"'] & D \end{tikzcd}$$

دوتایی $(B,(g_1,g_2))$ که برای $i = 1,2$، $g_i : B \longrightarrow C_i$، در رسته $\mathcal{C}$ یک عقب‌بر[11] برای f_1 و f_2 نام دارد، اگر

۱) $f_1 g_1 = f_2 g_2$

۲) به ازای هر جفت ریخت $h_1 : B' \longrightarrow C_1$ و $h_2 : B' \longrightarrow C_2$ که $f_1 h_1 = f_2 h_2$، ریخت منحصربه‌فردی مانند $t : B' \longrightarrow B$ وجود داشته باشد که $h_1 = g_1 t$ و $h_2 = g_2 t$.

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "h_1"] \arrow[ddr, "h_2"'] & & \\ & B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & C_2 \arrow[r, "f_2"'] & D \end{tikzcd}$$

[10] pullback situation
[11] pullback

مثال ۲۳.۲.۱ شی عقب‌بر در رسته مجموعه‌ها.

موقعیت عقب‌بر در رسته مجموعه‌ها را ملاحظه کنید

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "g"'] & Q \end{tikzcd}$$

دوتایی $(P,(p_1,p_2))$ که $p_1 : P \longrightarrow M$ و $p_2 : P \longrightarrow N$، در رسته مجموعه‌ها یک عقب‌بر برای f و g است زیرا

مجموعه P را این گونه در نظر می‌گیریم

$$P = \{(m,n) \in M \times N; f(m) = g(n)\}$$

حال شرط (۱) و (۲) در تعریف ۲۲.۲.۱، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای هر $(m,n) \in P$ داریم

$$fp_1(m,n) = f(m) = g(n) \tag{۳}$$

$$gp_2(m,n) = g(n) = f(m) \tag{۴}$$

با توجه به تساوی‌های (۳) و (۴)، $fp_1 = gp_2$.

حال اگر فرض شرط (۲) برقرار باشد، باید همریختی منحصر به فرد $t : P' \longrightarrow P$ را بیابیم. ابتدا وجود آن را نشان می‌دهیم.

برای هر $a \in P'$، $h_1(a) \in M$ و $h_2(a) \in N$ و با توجه به این‌که برای هر جفت تابع h_1 و h_2، $fh_1 = gh_2$ است پس

$$f(h_1(a)) = g(h_2(a))$$

که به این ترتیب با توجه به تعریف مجموعه P، $(h_1(a), h_2(a)) \in P$ است. بنابراین t را این گونه تعریف می‌کنیم که برای هر $a \in P'$،

$$t(a) = (h_1(a), h_2(a))$$