



دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

مباحثی در S – عمل‌های تصویری

نگارش

گلثوم علی آبادی

استاد راهنما

دکتر علی معدنشکاف

استاد مشاور

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

آذرماه ۱۳۸۹

سَلَامٌ عَلَيْكُمْ

قدردانی

سپاس به پیشگاه پروردگاری که دریچه‌های علم و معرفت را فراروی انسان گشود و با علم و قلم به انسان کرامت بخشید تا با تکیه بر دو بال ایمان و اندیشه در افق‌های بیکران رستگاری پرواز کند. او را حمد و ستایش می‌گوییم، حمد و سپاسی که تنها خداوند سبحان را سزااست.

این پایان نامه حاصل راهنمایی‌های ارزشمند استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر معدنشکاف است که در تمام مراحل راهگشای من بودند و صبورانه یاریم کردند.

تقدیم به :

دستان پر مهر پدرم،

چشمان همیشه منتظر مادرم

و

همسرم، که وجودش همواره آرامش دهنده روح و تسلی بخش خاطر من بوده

است.

چکیده

فرض کنیم S تکواره باشد. یک S -عمل راست مجموعه ناتهی A به همراه یک نگاشت $A \times S \rightarrow A$ است، که در آن تصویر (a, s) به صورت as نمایش داده می‌شود، به گونه‌ای که برای هر $a \in A$ و $s, t \in S$ $a \cdot 1 = a$ و $a(st) = (as)t$ عمل چپ تعریف می‌شود.

در این پایان‌نامه ابتدا تعریف S -عمل تصویری را گسترش می‌دهیم و S -عمل تصویری ضعیف و $(S/I, S/J)$ -تصویری را معرفی می‌کنیم. سپس درون‌بر، هم‌حاصلضرب و حاصلضرب این عمل‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همچنین شرایط لازم و کافی برای تصویری ضعیف بودن هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای دو کپی از S توسط ایدآل راست I ، یعنی $S \amalg^I S$ ، را مطرح می‌کنیم.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌های [۱۱]، [۷] و [۱۲] نوشته شده است.

واژه‌های کلیدی: S -عمل، تصویری، تصویری ضعیف، تصویری ضعیف ریس، هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای، $(S/I, S/J)$ -تصویری.

مقدمه

فرض کنیم S تکواره باشد. یک S - عمل راست مجموعه ناتهی A به همراه یک نگاشت $A \times S \rightarrow A$ است، که در آن تصویر (a, s) به صورت as نمایش داده می شود، به گونه ای که برای هر $a \in A$ و $s, t \in S$ $a \cdot 1 = a$ و $a(st) = (as)t$ عمل چپ تعریف می شود.

در سال ۱۹۶۰، اسکورن یاکف^۱ بحث دسته بندی همولوژیکی تکواره ها را مطرح کرد. این بحث در دهه های بعد نیز گسترش پیدا کرد، که کیلپ^۲ و همکارانش کتاب تکواره ها، عمل ها و رسته ها را در این زمینه منتشر کردند. یکی از زمینه های مطالعاتی برجسته ای که در این زمینه مورد مطالعه قرار گرفته است، عمل های آزاد و عمل های تصویری اند. کنائر^۳ در سال ۱۹۷۲ در مقاله [۹] ساختار عمل های تصویری را بررسی کرد. در سال ۱۹۹۹، اولتمنز^۴ و کنائر مفهوم جدیدی به نام S - عمل های تصویری ضعیف در مقاله [۱۱]، تعریف کردند. در مقاله [۱۲] کنائر و اولتمنز با گسترش مفهوم تصویری ضعیف، مفهوم $(S/I, S/J)$ - تصویری را در سال ۲۰۰۶ معرفی کرده اند.

در سال ۲۰۰۵، کیلپ و کنائر شرایط لازم و کافی برای تصویری ضعیف بودن هم حاصلضرب ملقمه ای دو کپی از S توسط اید آل راست I ، یعنی $S \amalg^I S$ ، در مقاله [۷] مطرح کردند.

این پایان نامه متشکل از چهار فصل است. در فصل اول تعدادی تعریف، لم و قضیه که در فصل های بعدی مورد نیاز است، آورده ایم. فصل دوم شامل چهار بخش است که در بخش اول به تعریف عمل های تصویری و رابطه آن با عمل های آزاد می پردازیم. در بخش دوم عمل های تصویری ضعیف را معرفی می کنیم. بخش سوم را با گزاره ای آغاز می کنیم که رابطه درون بر و عمل های خارج قسمتی تصویری ضعیف را بیان می کند و در بخش آخر به دسته بندی همولوژیکی تکواره ها توسط عمل های تصویری می پردازیم. فصل سوم از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول را با تعریف هم حاصلضرب ملقمه ای آغاز می کنیم. در بخش دوم به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن $S \amalg^I S$ ، تصویری ضعیف باشد. در قضیه پایانی این بخش شرایط معادلی برای اینکه $S \amalg^I S$ تصویری ضعیف باشد، بیان می کنیم. در فصل چهارم با گسترش مفهوم تصویری ضعیف، مفهوم $(S/I, S/J)$ - تصویری را تعریف

Skornjakov^۱

Kilp^۲

Knauer^۳

Oltmanns^۴

می‌کنیم. در ادامه با کمک نمودار رابطه آن‌ها را با انواع عمل‌های تصویری ضعیف بیان می‌کنیم و با کمک دسته‌بندی همولوژیکی تکواره‌ها شرایط معادلی را برای عمل‌های $(S/sS, S/J)$ - تصویری و $(S/sS, S/tS)$ - تصویری مطرح می‌کنیم.

مفاهیم این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های [۱۱]، [۷] و [۱۲] تنظیم شده است.

فهرست مندرجات

۱۱	مفاهیم اولیه	۱
۱۱ نیم گروه‌ها، تکواره‌ها	۱.۱
۱۴ رشته‌ها	۲.۱
۲۲ رشته S —عمل‌ها و برخی از ویژگی‌های آن	۳.۱
۴۰	عمل‌های تصویری و تصویری ضعیف	۲
۴۰ عمل‌های تصویری	۱.۲
۴۷ عمل‌های تصویری ضعیف	۲.۲

۴۹	۳.۲	درون‌برها و عمل‌های خارج‌قسمتی تصویر ضعیف
۵۴	۴.۲	دسته‌بندی همولوژیکی تکواره‌ها
۵۸		۳	هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای تصویر ضعیف
۵۸	۱.۳	هم‌حاصلضرب ملقمه‌ای
۶۲	۲.۳	شرایط تصویر ضعیف بودن $S \amalg^I S$
۶۹		۴	عمل‌های $(S/I, S/J)$ - تصویر
۶۹	۱.۴	عمل‌های $(S/I, S/J)$ - تصویر
۷۷	۲.۴	خارج‌قسمت‌های ریس و $(S/sS, S/J)$ - تصویر
۸۳	۳.۴	دسته‌بندی همولوژیکی تکواره‌ها
۹۵			کتاب نامه
۹۸			واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

۱۰۱

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

۱۰۴

فهرست راهنما

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در بخش اول این فصل به تعریف نیم گروه و تکواره می پردازیم. بخش دوم را با تعریف رسته آغاز می کنیم. در ادامه این بخش مثال هایی از رسته ها می آوریم که تا کنون با آنها آشنا بوده ایم و حال آنها را به عنوان رسته معرفی می کنیم. در بخش سوم رسته S - عمل ها را تعریف کرده و با توجه به اهمیت این رسته در این پایان نامه به بیان چند قضیه و گزاره مهم از جمله قضیه هم ریختی ها در S - عمل ها می پردازیم.

بخش کامل از این حوزه در ریاضیات را می توان در کتاب تکواره ها، عمل ها و رسته ها اثر ماتی کیلپ و همکارانش که در سال ۲۰۰۰ میلادی منتشر شد، یافت.

۱.۱ نیم گروه ها، تکواره ها

تعریف ۱.۱.۱ یک نیم گروه^۱ عبارت است از مجموعه ای ناتهی مانند G همراه با عملی دوتایی بر G با خاصیت زیر:

$$a(bc) = (ab)c \quad \text{به ازای هر } a, b, c \in G \quad (\text{شرکت پذیری})$$

^۱semigroup

تعریف ۲.۱.۱ یک تکواره^۲، نیم گروهی است مانند G که شامل یک عنصر همانی دو طرفه مانند $1 \in G$ است، یعنی به ازای هر $a \in G$ $a1 = 1a = a$.

تعریف ۳.۱.۱ عنصر $z \in S$ صفر چپ (صفر راست) تکواره S نامیده می شود، هرگاه برای هر $t \in S$ داشته باشیم، $(tz = z)zt = z$ و یک صفر S است، اگر صفر چپ و راست باشد. تکواره S یک تکواره صفر چپ (صفر راست) است، اگر همه اعضای $S \setminus \{1\}$ صفر چپ (صفر راست) باشند. S یک تکواره صفر است هرگاه همه اعضای $S \setminus \{1\}$ صفر باشند.

مثال ۴.۱.۱ مجموعه $S = \{1, s, t\}$ همراه با ضربی که در جدول زیر آمده است، یک تکواره صفر چپ می باشد.

.	1	s	t
1	1	s	t
s	s	s	s
t	t	t	t

تعریف ۵.۱.۱ عضو $e \in S$ خودتوان نامیده می شود، اگر $e.e = e$. مجموعه تمام عضوهای خودتوان S را با $E(S)$ نمایش می دهیم. حال اگر در تکواره S ، $E(S) = S$ باشد، به S تکواره خودتوان گوئیم.

مثال ۶.۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی همراه با عمل کوچکترین مضرب مشترک دو عدد، یک تکواره خودتوان است.

تعریف ۷.۱.۱ عضو c از تکواره S حذف پذیر^۳ راست (حذف پذیر چپ) نامیده می شود، هرگاه برای هر $r, t \in S$ تساوی $(cr = ct)rc = tc$ ، تساوی $r = t$ را نتیجه دهد. همچنین به تکواره S حذف پذیر راست (حذف پذیر چپ) گوئیم، هرگاه همه عناصر آن حذف پذیر راست (حذف پذیر چپ) باشد.

monoid^۲
cancellable^۳

مثال ۸.۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی همراه با ضرب معمولی یک تکواره حذف‌پذیر راست و حذف‌پذیر چپ است.

تعریف ۹.۱.۱ تکواره S جمع‌شدنی^۴ چپ (جمع‌شدنی راست) است، هرگاه برای هر $p, q \in S$ ، عنصر $r \in S$ وجود داشته باشد، به طوری که $rp = rq$ ($pr = qr$).

مثال ۱۰.۱.۱ تکواره S که شامل یک صفر چپ باشد، یک تکواره جمع‌شدنی چپ است.

مثال ۱۱.۱.۱ تکواره (\mathbb{N}, \max) ، جمع‌شدنی راست و جمع‌شدنی چپ است.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر S یک تکواره باشد، گوئیم $I \subseteq S$ یک ایدآل راست از S است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) I ناتهی باشد،

(۲) برای هر $s \in S$ و $a \in I$ ، داشته باشیم $as \in I$.

به طور مشابه می‌توان ایدآل چپ را نیز تعریف کرد.

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر S یک تکواره باشد و $s \in S$ ، کوچکترین ایدآل راست S که شامل s است، به این صورت تعریف می‌شود:

$$sS = \{st \mid t \in S\}$$

که ایدآل اصلی راست تولید شده توسط s نامیده می‌شود.

به طور مشابه می‌توان ایدآل اصلی چپ تولید شده توسط s را نیز تعریف کرد.

^۴ collapsible

تعریف ۱۴.۱.۱ S یک تکواره ایدآل اصلی راست (ایدآل اصلی چپ) نامیده می‌شود، هرگاه هر ایدآل راست (ایدآل چپ) آن ایدآل اصلی راست (ایدآل اصلی چپ) باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ تکواره S را برگشت‌پذیر چپ^۵ (راست) نامیم، هرگاه اشتراک هر دو ایدآل چپ (راست) در آن ناتهی باشد.

۲.۱ رسته‌ها

تعریف ۱.۲.۱ هر رسته C ^۶ خانواده‌ای است از اشیا که معمولاً آن‌ها را با A, B, C, \dots نشان می‌دهیم، با این ویژگی که

(۱) هر دو شی A و B ، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Hom(A, B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی مثل A, B, C, D که $(A, B) \neq (C, D)$ ،

$$Hom(A, B) \cap Hom(C, D) = \emptyset$$

(۲) به ازای هر سه شی A, B, C ، تابع

$$\cdot: Hom(B, C) \times Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$$

$$(g, f) \longmapsto gf$$

موجود است که

• به ازای هر چهار شی مثل A, B, C, D ، اگر $f \in Hom(A, B)$ ، $g \in Hom(B, C)$ و

$$h \in Hom(C, D)$$

$$h(gf) = (hg)f$$

left inversible^۵
category^۶

• به ازای هر شی مثل A ، عضوی از $\text{Hom}(A, A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو

از $\text{Hom}(A, B)$ مثل f و هر عضو از $\text{Hom}(C, A)$ مثل g ، $1_{Ag} = g$ و $1_A = f$.

در رسته‌ای مثل C ، به ازای هر دو شی مثل A و B ، هر عضو از $\text{Hom}(A, B)$ را ریختار از A به B می‌نامند. نماد $f: A \rightarrow B$ هم یعنی این که f ریختاری از A به B است.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم S رده تمام مجموعه‌ها باشد. به ازای $A, B \in S$ ، $\text{Hom}(A, B)$ مجموعه تمام توابع $f: A \rightarrow B$ است. به آسانی دیده می‌شود که S یک رسته است.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم S رده تمام گروه‌ها باشد. $\text{Hom}(A, B)$ مجموعه‌ی تمام هم‌ریختی‌های گروهی بین A و B می‌باشد. می‌بینیم که S یک رسته می‌باشد.

مثال ۴.۲.۱ گروه ضربی G را می‌توان رسته‌ای با یک شی، یعنی G در نظر گرفت. فرض کنیم $\text{Hom}(G, G)$ مجموعه همه عناصر G باشد. ترکیب هم‌ریختی‌های a و b چیزی جز ab با عمل دوتایی در G نیست و 1_G ، عنصر همانی e از G است.

تعریف ۵.۲.۱ شی I در رسته C را شی آغازی^۷ یا ابتدایی گوئیم اگر به ازای هر شی C ، از C یک و فقط یک ریخت مانند $I \rightarrow C$ وجود داشته باشد.

مثال ۶.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، \emptyset شی آغازی است.

مثال ۷.۲.۱ در رسته گروه‌ها، هر گروه بدیهی شی آغازی است.

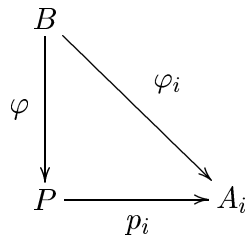
^۷initial object

تعریف ۸.۲.۱ شی T در رسته \mathcal{C} را شی نهایی^۱ یا پایانی گویند اگر به ازای هر شی C از \mathcal{C} یک و فقط یک ریخت $C \rightarrow T$ وجود داشته باشد.

مثال ۹.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، مجموعه‌های تک‌عضوی شی نهایی هستند.

مثال ۱۰.۲.۱ در رسته گروه‌ها، هر گروه بدیهی شی نهایی است.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض می‌کنیم \mathcal{C} یک رسته بوده و $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیا \mathcal{C} باشد. یک حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ ، شیئی است مانند P از \mathcal{C} همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{p_i : P \rightarrow A_i \mid i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شی B و هر خانواده $\{\varphi_i : B \rightarrow A_i \mid i \in I\}$ از ریخت‌های \mathcal{C} ، ریخت منحصر به فردی مانند $\varphi : B \rightarrow P$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$ ، $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ ، یعنی به ازای هر $i \in I$ ، نمودار زیر جابه‌جایی است.



شی حاصلضرب P برای $\{A_i \mid i \in I\}$ را معمولاً با $\prod_{i \in I} A_i$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۲.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، حاصلضرب دکارتی $\prod_{i \in I} A_i$ شی حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از مجموعه‌ها است.

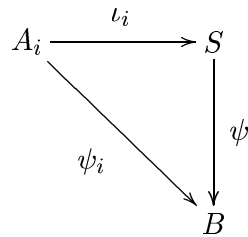
در رسته گروه‌ها حاصلضرب مستقیم، $\prod_{i \in I} G_i$ شی حاصلضرب برای خانواده $\{G_i \mid i \in I\}$ از گروه‌ها است.

^۱terminal object

قضیه ۱۳.۲.۱ هرگاه $(P, \{p_i\})$ و $(Q, \{q_i\})$ هر دو شی حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از اشیا رسته C باشند، آن گاه P و Q معادلند.

■ برهان . قضیه ۳.۷.۱ از مرجع [۲۰] را ببینید.

تعریف ۱۴.۲.۱ یک هم حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از اشیا در رسته C شیئی است مانند S از C همراه با خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از ریختها مانند $\{\iota_i : A_i \rightarrow S \mid i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شی B و خانواده $\{\psi_i : A_i \rightarrow B \mid i \in I\}$ از ریختهای دلخواه، ریخت منحصر به فردی مانند $\psi : S \rightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$ $\psi \circ \iota_i = \psi_i$ ، یعنی، برای هر $i \in I$ نمودار زیر جابه جایی است.



شی هم حاصلضرب S برای $\{A_i \mid i \in I\}$ معمولاً با $\prod_{i \in I} A_i$ نشان داده می شود.

مثال ۱۵.۲.۱ در رسته مجموعه ها، برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ ، اجتماع مجزای آنها، یعنی $\cup A_i$ ، شی هم حاصلضرب این خانواده است.

قضیه ۱۶.۲.۱ هرگاه $(S, \{b_i\})$ و $(S', \{\lambda_i\})$ هر دو شی هم حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از اشیا رسته C باشند، آن گاه S و S' معادلند.

■ برهان . قضیه ۵.۷.۱ از مرجع [۲۰] را ببینید.

تعریف ۱۷.۲.۱ رسته ملموس^۹ رسته ای است مانند C همراه با تابعی چون σ که به هر شی A از C مجموعه $\sigma(A)$ (به نام مجموعه زمینه A) را نسبت می دهد به طوری که

^۹concrete

(۱) هر ریخت $A \rightarrow B$ از C تابعی بر مجموعه‌های زمینه $\sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$ است.

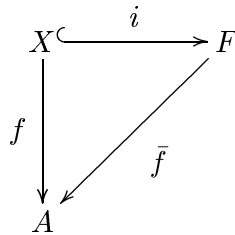
(۲) ریخت همانی هر شی A از C ، تابع همانی بر مجموعه زمینه $\sigma(A)$ است.

(۳) ترکیب ریخت‌ها در C با ترکیب توابع بر مجموعه‌های زمینه یکی است.

در ادامه شی و مجموعه زمینه را با یک علامت نشان داده و از ذکر صریح σ خودداری می‌کنیم.

مثال ۱۸.۲.۱ رسته گروه‌ها همراه با تابعی که به هر گروه مجموعه زمینه‌اش در معنی عادی را نسبت می‌دهد یک رسته ملموس است. ولی در مثال ۴.۲.۱، هرگاه تابع σ به گروه G مجموعه زمینه معمولی G را نسبت دهد، آن‌گاه رسته مورد نظر ملموس نیست. (زیرا ریخت‌ها بر مجموعه G تابع نیستند.)

تعریف ۱۹.۲.۱ فرض می‌کنیم F شیئی در رسته ملموس C ، X مجموعه‌ای ناتهی و $i: X \rightarrow F$ یک نگاشت (از مجموعه‌ها) باشد. گوئیم F بر مجموعه X آزاد است اگر به ازای هر شی A از C و نگاشت $f: X \rightarrow A$ (از مجموعه‌ها)، ریخت منحصر به فردی از C مانند $\bar{f}: F \rightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که $\bar{f}i = f$.

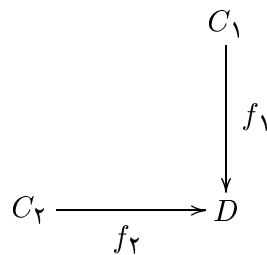


مثال ۲۰.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و $g \in G$. به آسانی دیده می‌شود که نگاشت $\bar{f}: \mathbb{Z} \rightarrow G$ تعریف شده با $\bar{f}(n) = g^n$ ، هم‌ریختی منحصر به فردی است که $1 \mapsto g$. در نتیجه هرگاه $X = \{1\}$ و $i: X \rightarrow \mathbb{Z}$ نگاشت شمول باشد آن‌گاه \mathbb{Z} بر X در رسته گروه‌ها، آزاد است. (اگر $f: X \rightarrow G$ فرض می‌کنیم $g = f(1)$ و \bar{f} را مانند بالا تعریف می‌کنیم.)

قضیه ۲۱.۲.۱ هرگاه C یک رسته ملموس، F و F' اشیایی از C باشند به طوری که F بر مجموعه X و F' بر مجموعه X' آزاد باشد و نیز $|X| = |X'|$ ، آن گاه F با F' معادلند.

برهان . قضیه ۸.۷.۱ از مرجع [۲۰] را ببینید.

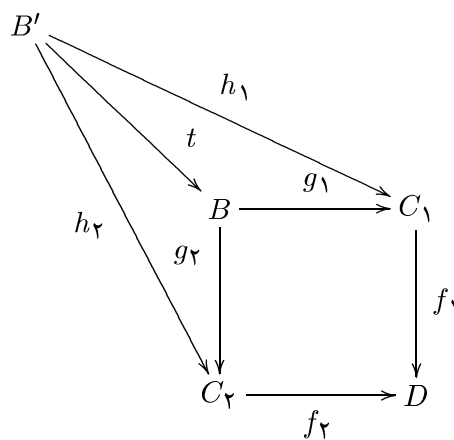
تعریف ۲۲.۲.۱ موقعیت عقب بر^۱ در رسته C را ملاحظه کنید



دوتایی $(B, (g_1, g_2))$ که برای $i = 1, 2$ ، $g_i : B \rightarrow C_i$ ، در رسته C یک عقب بر^۱ برای f_1 و f_2 نام دارد، اگر

$$f_1 g_1 = f_2 g_2 \quad (۱)$$

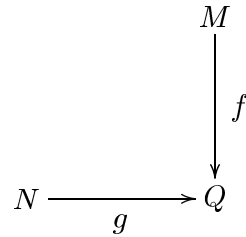
(۲) به ازای هر جفت ریخت $h_1 : B' \rightarrow C_1$ و $h_2 : B' \rightarrow C_2$ که $f_1 h_1 = f_2 h_2$ ، ریخت منحصر به فردی مانند $t : B' \rightarrow B$ وجود داشته باشد که $h_1 = g_1 t$ و $h_2 = g_2 t$.



pullback situation^{۱۰}
pullback^{۱۱}

مثال ۲۳.۲.۱ شی عقب‌بر در رسته مجموعه‌ها.

موقعیت عقب‌بر در رسته مجموعه‌ها را ملاحظه کنید



دوتایی $(P, (p_1, p_2))$ که $p_1: P \rightarrow M$ و $p_2: P \rightarrow N$ در رسته مجموعه‌ها یک عقب‌بر برای f و g است زیرا

مجموعه P را این گونه در نظر می‌گیریم

$$P = \{(m, n) \in M \times N; f(m) = g(n)\}$$

حال شرط (۱) و (۲) در تعریف ۲۲.۲.۱، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای هر $(m, n) \in P$ داریم

$$fp_1(m, n) = f(m) = g(n) \quad (۳)$$

$$gp_2(m, n) = g(n) = f(m) \quad (۴)$$

با توجه به تساوی‌های (۳) و (۴)، $fp_1 = gp_2$.

حال اگر فرض شرط (۲) برقرار باشد، باید هم‌ریختی منحصر به فرد $t: P' \rightarrow P$ را بیابیم. ابتدا وجود آن را نشان می‌دهیم.

برای هر $a \in P'$ ، $h_1(a) \in M$ و $h_2(a) \in N$ و با توجه به این‌که برای هر جفت تابع h_1 و h_2 ، $fh_1 = gh_2$ است پس

$$f(h_1(a)) = g(h_2(a))$$

که به این ترتیب با توجه به تعریف مجموعه P ، $(h_1(a), h_2(a)) \in P$ است. بنابراین t را این گونه تعریف می‌کنیم که برای هر $a \in P'$

$$t(a) = (h_1(a), h_2(a))$$