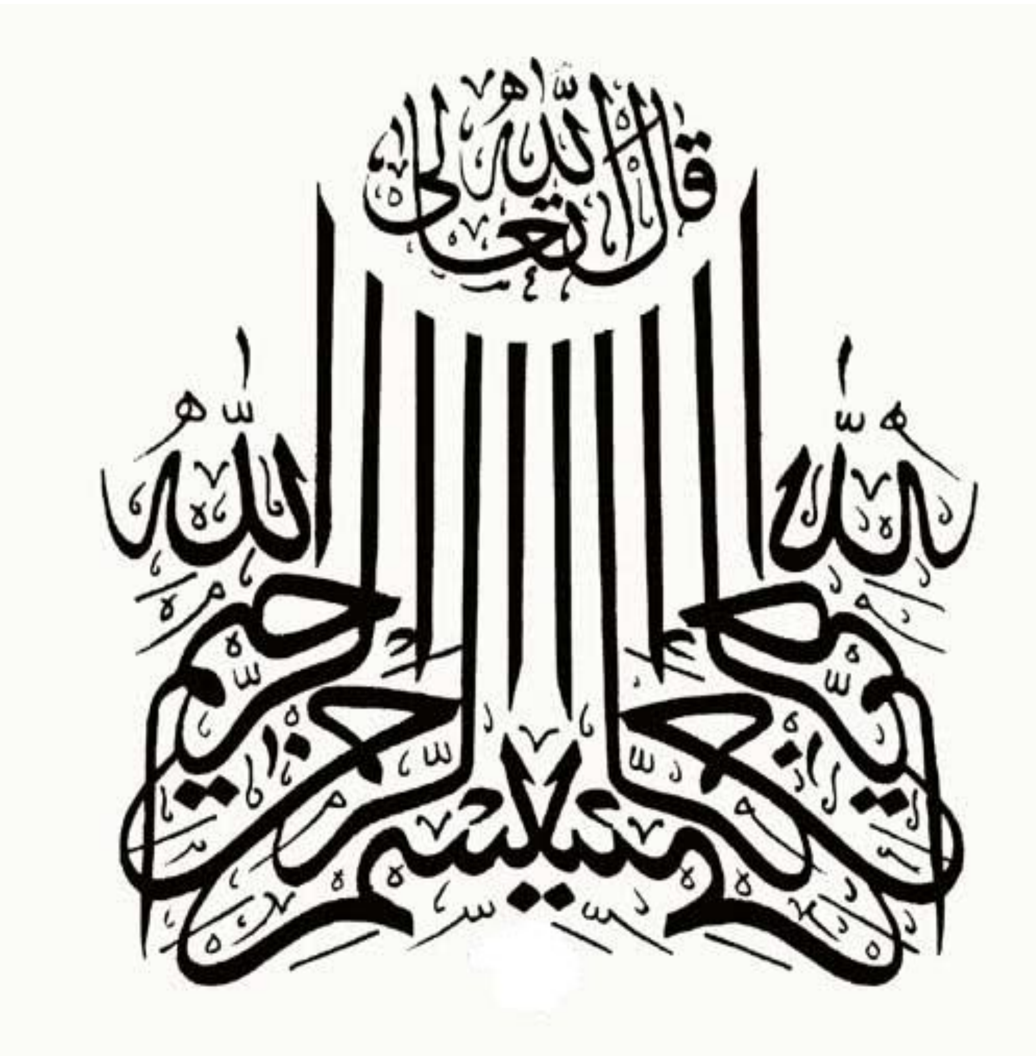
قال الله تعالى
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای روح‌اله براتی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۹۰۵۲۰۵۱۰۰۵ تحت عنوان: «**ساختار گروه‌های متناهی بر اساس صفرهای جدول سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آن‌ها**» را در تاریخ ۱۳۹۲/۸/۱ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر محمدرضا درفشه	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته است که در سال

در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار

خانم/جناب آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر

و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب روح الله براتی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد

تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: روح الله براتی

تاریخ و امضا: روح الله براتی ۹۲/۸/۵

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب روح الله براتی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۹۰-۹۱ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده ~~[illegible]~~ علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: روح الله براتی

تاریخ: ۹۴/۸/۱

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان پایان‌نامه

ساختار گروه‌های متناهی بر اساس صفرهای جدول سرشت‌های تحویل ناپذیر آن‌ها

دانشجو

روح‌الله براتی

استاد راهنما

دکتر علی ایرانمنش

آبان ۹۲

تقدیم به

خانواده مهربانم

و تمام اساتید و دوستداران ریاضی

تشکر و قدردانی...

"منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت"

خداوند بزرگ را شاکرم؛ که پدر و مادری مهربان و دلسوز را نصیبم نمود و همچنین توفیق نگارش این پایان‌نامه را به من عطا کرد.

بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای عزیزم جناب دکتر علی ایرانمنش به خاطر علاقه‌مند کردن من به موضوع زیبا و کاربردی نظریه نمایش و سرشت گروه‌های متناهی و راهنمایی‌های ایشان در زمینه نگارش این پایان‌نامه تشکر کنم.

مهرماه ۱۳۹۲

روح‌الله براتی

چکیده

ویژگی‌های عام نظریه نمایش و سرشت گروه‌های متناهی روی میدان اعداد مختلط ابتدا توسط ریاضیدان آلمانی، جرج فردیناند فروبنیوس، در قرن نوزدهم کشف گردید. سپس ریچارد براور نظریه نمایش پیمانه‌ای را ارائه کرد. یکی از قدیمی‌ترین قضیه‌ها در زمینه نظریه سرشت قضیه مشهور برنساید است که بیان می‌کند هر سرشت تحویل ناپذیر غیرخطی یک گروه متناهی دارای صفر است.

هدف اصلی این پایان‌نامه، بررسی ارتباط صفرهای سرشت‌های تحویل ناپذیر یک گروه متناهی و ویژگی‌های ساختاری آن گروه است. مراجع اصلی در این پایان‌نامه [۴] ، [۱۶] ، [۲۱] می‌باشد.

کلمات کلیدی : صفرهای سرشت‌ها، صفرهای سرشت‌های گروه‌های متناهی.

فهرست مطالب

فهرست نماد ها

$GL(n,F)$	گروه خطی عام از درجه n روی میدان F؛ ۵
a_M	تبدیل خطی A-مدول M، که توسط a القا می‌شود؛ ۵
$h(G)$	ارتفاع فیتینگ G؛ ۲۴
$F(G)$	زیرگروه فیتینگ G؛ ۲۵
$Irr(G)$	مجموعه سرشت های تحویل ناپذیر گروه G؛ ۶
$Lin(G)$	مجموعه سرشت های تحویل ناپذیر خطی گروه G؛۷
$Irr_۱(G)$	مجموعه سرشت‌های تحویل ناپذیر غیرخطی؛ ۴۵
$F[G]$	گروه جبر G روی میدان F؛ ۴
χ_H	تحدید سرشت χ به زیرگروه H؛ ۸
$ker\,\chi$	هسته سرشت χ؛ ۷
φ^G	سرشت القایی حاصل از سرشت φ به گروه G؛ ۸
ϑ^g	مزدوج سرشت ϑ تحت g؛ ۹
H^g	مزدوج H تحت g؛ ۱۰
$Z(\chi)$	مرکز سرشت χ؛ ۱۱
$L_n(۲^n)$	گروه خطی عام تصویری روی میدان $Z_۲$؛ ۳۶
$I_G(\varphi)$	گروه اینرسی (لختی) φ در گروه G؛ ۱۰
$Z(G,A)$	گروه ۲-هم دورها؛ ۱۹
$B(G,A)$	گروه ۲-هم مرزها؛ ۱۹
$H(G,A)$	گروه کوهمولوژی دوم؛ ۱۹
$M(G)$	ضریب شور گروه G؛ ۱۹
(Γ,π)	توسیع مرکزی گروه G با همریختی π؛ ۱۹
(G,N,ϑ)	۳-گانه سرشتی؛ ۲۰
(τ,σ)	یکریختی ۳-گانه سرشت ها؛ ۲۱
$c.d.(G)$	مجموعه درجات سرشت های تحویل ناپذیر گروه G؛ ۱۶
$O_p(G)$	زیرگروه ماکسیمال نرمال از مرتبه توانی از عدد اول p؛ ۲۶
$Z_۲(G)$	مرکز دوم گروه G؛ ۳۹
$V(\chi)$	پوچی χ؛ ۴۱
(G,G')	زوج کامینا؛ ۴۴

پیشگفتار

نظریه سرشت ابزاری قوی برای اثبات قضیه‌های گروه‌های متناهی است. در واقع، نتایج مهمی وجود دارند، نظیر قضیه فروبنیوس که بدون استفاده از نظریه سرشت برای آن‌ها برهانی وجود ندارد. از طرفی می‌توان بسیاری از خواص یک گروه متناهی نظیر حل پذیری و پوچتوان بودن یا یافتن زیرگروه‌های مشتق و غیره را با استفاده از جدول سرشت یک گروه به دست آورد. یکی از قضیه‌های معروف در نظریه سرشت قضیه مشهور برنساید است که بیان می‌کند هر سرشت تحویل ناپذیر غیرخطی یک گروه متناهی دارای صفری در گروه می‌باشد. همین قضیه زمینه بسیاری از پژوهش‌ها در این زمینه شده است. کارهایی که با استفاده از صفرهای جدول سرشت یک گروه متناهی تا کنون انجام گرفته است به طور خلاصه به قرار زیر است.

۱. تشخیص یکسری عناصر زیرگروه فیتینگ یک گروه حل پذیر متناهی ([۵] ، [۱۳]).

۲. تشخیص تحویل ناپذیری تحدید یک سرشت تحویل ناپذیر از یک گروه مادر به زیرگروه‌های نرمال آن ([۲۱]).

۳. کراندر کردن ارتفاع فیتینگ یک گروه متناهی ([۲۰]).

۴. یافتن p-متمم نرمال پوچتوان در یک گروه ([۶]).

۵. تشخیص فروبنیوس بودن یک گروه ([۴]).

۶. رده‌بندی گروه‌های متناهی به ویژه گروه‌های حل پذیر ([۲۶]).

۷. تعمیم قضیه $p^\alpha q^\beta$ برنساید ([۶]).

در این پایان‌نامه صفرهای سرشت‌های تحویل ناپذیر یک گروه متناهی و ارتباط آن با ساختار گروه در سه فصل ۴،۳ و ۵ مورد بررسی قرار گرفته است. به طور معمول فصل اول به مفاهیم پیش‌نیازی که در فصول آتی مورد نیاز می‌باشند و فصل دوم به مروری مختصر بر کارهایی که تا کنون در این زمینه انجام‌گرفته اختصاص داده شده است. فصل سوم ارتباط بین صفرهای سرشت‌های تحویل ناپذیر یک گروه متناهی و یک سری ویژگی‌های ساختاری آن را مورد بحث قرار می‌دهد. در فصل چهارم گروه‌های متا آبلی متناهی که در هر سطر جدول سرشت آن ها حداکثر ۳ تا صفر وجود دارد رده‌بندی گردیده است. در قضیه کلیفورد (قضیه ۲۲.۱.۱) عنوان می‌شود که (مؤلفه تحویل ناپذیری χ_N) و مزدوج‌های

متمایز آن با ضرایب یکسان است. اما در فصل پنجم یکی از زیباترین قضیه‌ها بیان و اثبات شده است، که این قضیه در واقع یک شرط معادل برای تحویل ناپذیری یک سرشت تحدید شده از گروه مادر به زیرگروه‌های نرمال آن ارائه می‌کند. با توجه به آنچه که در بالا گفته شد ضرورت مطالعه صفرهای سرشت‌های تحویل ناپذیر یک گروه متناهی، این اعداد به ظاهر ساده، بیش از پیش روشن می‌شود. سعی شده است مراجع اصلی که برای نگارش این پایان‌نامه استفاده گردیده است جزو مقالات با ارجاع بالا در این حوزه باشد.

۱

پیش‌نیازها

مقدمه

در این فصل تمام پیش‌نیازها اعم از تعاریف، نتایج و قضیه‌هایی که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌شود که برگرفته شده از [۱۴] و مقالات مرتبط است. این فصل به ۴ بخش تقسیم شده است. که در بخش اول عمده مفاهیم ضروری تمامی فصول آتی، در بخش دوم مفاهیم پیش‌نیاز فصل سوم، در بخش سوم ضروریات فصل چهارم و در بخش آخر قضیه‌های پیش‌نیاز فصل پنجم آورده شده است.

۱۰۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان و A یک F-فضای برداری باشد که یک حلقه یکدار نیز هست. فرض کنید برای هر $c \in F$ و $x, y \in A$ داشته باشیم

$$(cx)y = c(xy) = x(cy)$$

در این صورت A را یک F-جبر گویند.

اکنون یکی از مهم‌ترین جبرها که نقشی اساسی در نظریه نمایش و سرشت دارد یعنی جبر گروهی را در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و F یک میدان باشد. قرار می دهیم

$$F[G] = \{\sum_{g\in G} a_g g \,|a_g \in F\}$$

روی $F[G]$ عمل‌های جمع ، ضرب و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g\right) g$$

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} a_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (a_g a_h) gh$$

$$\forall c \in F \;;\; c\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} \left(c a_g\right) g$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که $F[G]$ به همراه اعمال فوق تمام شرایط تعریف (۱.۱.۱) را دارا می‌باشد. $F[G]$ را جبر گروهی گویند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم A یک F–جبر و V یک F-فضای برداری متناهی بعد باشد. فرض کنیم برای هر $v \in V$ و $x \in A$ عبارت یکتای $vx \in V$ تعریف شده باشد. فرض کنیم برای هر $x, y \in A$ و $v, w \in V$ و $c \in F$ داشته باشیم:

۱. $(v + w)x = vx + wx$
۲. $v(x + y) = vx + vy$
۳. $(vx)y = v(xy)$
۴. $(cv)x = c(vx) = v(cx)$
۵. $v۱ = v$

در این صورت V را یک A-مدول گویند.

اگر V یک A-مدول و $W \subseteq V$ یک F–زیر فضای پایا از V باشد، آنگاه W را A-زیر مدول V گویند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم V یک A-مدول نا صفر باشد. در این صورت V را یک A -مدول تحویل ناپذیر گوییم هرگاه تنها زیر مدول‌های آن o و خود V باشند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم A یک F-جبر باشد. یک نمایش از A یک همریختی جبری چون $T: A \to M_n(F)$ است. عدد صحیح n را درجه نمایش T گویند. دو نمایش T و T' را هم ارز گوییم هرگاه ماتریس نا منفرد $n \times n$، P موجود باشد، به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$.T(a) = P^{-۱}T'(a)P$$

به وضوح، تشابه یک رابطه هم ارزی بین نمایش‌ها است. همچنین، اگر T' یک نمایش از درجه n و P یک ماتریس نا منفرد $n \times n$ دلخواه باشد، آنگاه فرمول $T(a) = P^{-۱}T'(a)P$ نمایش جدید T را تعریف می کند.

به آسانی می‌توان مدول‌ها را از نمایش‌ها و نمایش‌ها را از مدول‌ها ساخت. اگر T یک نمایش درجه n از F-جبر A باشد، آنگاه V را فضای سطری برداری n-بعدی روی میدان F در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $v \in \mathrm{V}$ و X یک ماتریس $n \times n$ دلخواه روی میدان F باشد، در این صورت $vX \in V$. برای $a \in A$ تعریف می کنیم $va = vT(a)$. بررسی اینکه این تعریف، ساختار یک A-مدول به V می دهد آسان است.

برعکس، اگر M یک A-مدول باشد، یک F-پایه برای M انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $T(a)$ ماتریس a_M بر حسب این پایه باشد. اکنون به آسانی می‌توان بررسی کرد که T یک نمایش است. توجه داشته باشید که انتخاب متفاوت پایه می‌تواند یک نمایش متفاوت به دست دهد.

تعریف ۶.۱.۱. نمایش درجه n، T از F-جبر A را تحویل ناپذیر گویند هرگاه A-مدول القایی حاصل از آن تحویل ناپذیر باشد.

فرض کنید G یک گروه، F یک میدان و T یک نمایش با درجه n از $F[G]$ باشد. چون T یک همریختی جبری است لذا $T(۱) = I$. در نتیجه برای $g \in G$، $T(g)$ نا منفرد است و $T(g)^{-۱} = T(g^{-۱})$. اگر تابع T را به $G \subseteq F[G]$ تحدید کنیم، یک همریختی گروهی از G به درون گروه خطی عام $GL(n,F)$، یعنی، گروه ضربی ماتریس‌های نا منفرد $n \times n$ روی میدان F، به دست می‌آوریم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان و G یک گروه باشد. در این صورت یک F-نمایش از G یک همریختی چون $T: G \to GL(n, F)$ است که $n \in N$.

همان طور که در بالا مشاهده کردیم یک نمایش از $F[G]$ با تحدید، یک F-نمایش از G را مشخص می‌کند. برعکس، F-نمایش T_o از G یک نمایش چون T از $F[G]$ را با توسیع خطی به دست می‌دهد. یعنی،

$$T\left(\sum a_g g\right) = \sum a_g T_o(g)$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم T یک F-نمایش از گروه G باشد. در این صورت F-سرشت χ از گروه G که توسط T تأمین می‌شود تابعی است که به صورت $\chi(g) = tr(T(g))$ تعریف می‌شود. سرشت χ را تحویل ناپذیر گویند هرگاه نمایش تأمین کننده آن T، تحویل ناپذیر باشد. مجموعه تمام سرشت‌های تحویل ناپذیر G را با نماد $Irr(G)$ نشان می دهیم.

اکنون سؤالی که مطرح می‌شود این است که تعداد سرشت‌های تحویل ناپذیر گروه متناهی G چه ارتباطی با خود گروه دارند و از طرفی آیا تعداد آن‌ها متناهی است یا نه؟ در نتیجه ذیل به این سؤال پاسخ کاملی داده می‌شود.

نتیجه ۹.۱.۱. [۱۴؛ ۷.۲] فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت $|Irr(G)|$ برابر با تعداد کلاس‌های تزویج G است و $\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|$.

تعریف ۱۰.۱.۱ : تابع $\varphi: G \to C$ را یک تابع کلاسی گویند هرگاه روی کلاس‌های تزویج G ثابت باشد.

تذکر : سرشت‌های یک گروه توابعی کلاسی هستند.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم φ و ϑ توابعی کلاسی از گروه G باشند. در این صورت تعریف می کنیم

$$[\varphi, \vartheta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\vartheta(g)}$$

عبارت فوق را ضرب داخلی توابع کلاسی φ و ϑ گویند.

قضیه ۱.۱.۱۲. [۱۴؛ نتیجه ۱۴.۲] (رابطه تعامد اول) : فرض کنیم $\chi_i , \chi_j \in Irr(G)$. در این صورت

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}$$

قضیه ۱.۱.۱۳. [۱۴؛ قضیه ۱۸.۲](رابطه تعامد دوم) : فرض کنیم $g,h \in G$ و $\chi \in Irr(G)$ باشند. در این صورت اگر g با h در G مزدوج نباشد آنگاه

$$\sum_{\chi\in Irr(G)}\chi(g)\overline{\chi(h)} = o$$

در غیر این صورت مجموع فوق برابر با $|C_G(g)|$ است.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم χ سرشتی از گروه G باشد. در این صورت هسته سرشت χ را با نماد $ker\,\chi$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$.\ ker\,\chi = \left\{g \in G \,\middle|\, \chi(g) = \chi(1)\right\}$$

لم ۱.۱.۱۵. [۱۴؛ لم ۲۲.۲] فرض کنیم $N \trianglelefteq G$ باشد. آنگاه

۱. اگر χ سرشتی از G و $N \le ker\,\chi$ باشد، آنگاه χ روی همدسته‌های N در G ثابت و تابع $\hat{\chi}$ روی G/N که به صورت $\hat{\chi}(Ng) = \chi(g)$ تعریف می‌شود سرشتی از G/N است.
۲. اگر $\hat{\chi}$ سرشتی از گروه G/N باشد، در این صورت تابع χ که به صورت $\chi(g) = \hat{\chi}(Ng)$ تعریف می‌شود سرشتی از گروه G است.
۳. در هر دو حالت (۱) و (۲)، $\chi \in Irr(G)$ اگر و تنها اگر $\hat{\chi} \in Irr(G/N)$.

معمولاً سرشت χ را با سرشت $\hat{\chi}$ یکی می‌گیریم. که تحت این یکسان انگاری خواهیم داشت

$$.\ Irr(G/N) = \{\chi \in Irr(G) |\, N \le ker\,\chi\}$$

نتیجه ۱۶.۱.۱. [۱۴؛ نتیجه ۲۳.۲] فرض کنیم G یک گروه با زیرگروه جابجاگر G' باشد. در این صورت

۱. $G' = \bigcap\{ker\,\lambda \mid \lambda \in Lin(G)\}$.

۲. $[G: G']$ برابر با تعداد سرشت‌های خطی G است.

نتیجه ۱۷.۱.۱. [۱۴؛ نتیجه ۲۴.۲] فرض کنیم $g \in G$ و $N \trianglelefteq G$ باشد. در این صورت

$$\left|C_{G/N}(Ng)\right| \leq |C_G(g)|.$$

فرض کنیم $H \leq G$ یک زیرگروه از G باشد. برای سرشت داده شده χ از G، سرشت χ_H از H را با تحدید به دست می‌آوریم. اکنون در تعریف ذیل فرایند دوگان آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. یعنی سرشت‌های G از روی سرشت‌های H القا می‌شوند.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم $H \leq G$ زیرگروه G و φ تابعی کلاسی از H باشد. در این φ^G، تابع کلاسی القایی روی G را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x \in G}\varphi^{\circ}\left(xgx^{-1}\right).$$

که φ° به این صورت تعریف می‌شود: اگر $h \in H$ آنگاه $\varphi^{\circ}(h) = \varphi(h)$ و اگر $h \notin H$ آنگاه $\varphi^{\circ}(h) = o$.

واضح است که φ^G به واقع یک تابع کلاسی روی G است و $\varphi^G(1) = [G:H]\varphi(1)$. با انتخاب مجموعه مورب T برای همدسته‌های راست H در G فرمول مفید $\varphi^G(g) = \sum_{t \in T}\varphi^{\circ}(tgt^{-1})$ برای φ^G به دست می‌آید. فرمول مفید دیگر برای محاسبه $\varphi^G(g)$ به صورت زیر است :

$$\varphi^G(g) = |C_G(g)|\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi(x_i)}{|C_H(x_i)|}$$

که $x_1, \ldots\ldots, x_{m-1}, x_m$ نماینده‌های کلاس‌های تزویج H مشمول در $Cl_G(g)$ می‌باشند. بدیهی است اگر $H \cap Cl_G(g) = \emptyset$ باشد آنگاه $\varphi^G(g) = o$.

قضیه ۱.۱.۱۹. [۱۴؛ لم ۵.۲] (قانون تقابل فروبنیوس) : فرض کنیم $H \leq G$ زیر گروهی از G و φ یک تابع کلاسی روی H و ϑ یک تابع کلاسی روی G باشد. در این صورت

$$[\varphi, \vartheta_H] = [\varphi^G, \vartheta]$$

تذکر ۱.۱.۲۰. فرض کنیم $H \leq K \leq G$ و φ یک تابع کلاسی از H باشد. در این صورت

$$(\varphi^K)^G = \varphi^G$$

فرض کنیم $\chi \in Irr(G)$ و $H \leq G$ باشد. در حالت کلی، در مورد سرشت تحدید شده χ_H خیلی کم می‌توان حرف زد. اما اگر H در G نرمال باشد این وضعیت خیلی متفاوت خواهد بود. فرض کنیم $H \trianglelefteq G$ است. اگر ϑ یک تابع کلاسی از H و $g \in G$ باشد، تابع $\vartheta^g: H \to C$ را به صورت $\vartheta^g(h) = \vartheta(ghg^{-1})$ تعریف می‌کنیم. ϑ^g را مزدوج ϑ در G گویند.

لم ۱.۱.۲۱. [۱۴؛ لم ۶.۱] فرض کنیم $H \trianglelefteq G$ و φ و ϑ توابع کلاسی از H و $x, y \in G$ باشند. در این صورت

۱. φ^x یک تابع کلاسی است.

۲. $(\varphi^x)^y = \varphi^{xy}$.

۳. $[\varphi^x, \vartheta^x] = [\varphi, \vartheta]$.

۴. $[\chi_H, \varphi^x] = [\chi_H, \varphi]$ برای تابع کلاسی χ از G.

۵. اگر φ یک سرشت باشد آنگاه φ^x نیز یک سرشت است.

قضیه ۱.۱.۲۲. [۱۴؛ قضیه ۶.۲](کلیفورد) : فرض کنیم $H \trianglelefteq G$ و $\chi \in Irr(G)$ باشد. فرض کنیم ϑ مؤلفه تحویل ناپذیری χ_H و $\vartheta = \vartheta_1, \dots, \dots, \vartheta_{t-1}, \vartheta_t$ مزدوج‌های متمایز ϑ در G باشند. در این صورت

$$\chi_H = e\sum_{i=1}^{t}\vartheta_i$$

که $e = [\chi_H, \vartheta]$.