چکیده

فضای $\mathcal{H}^1(\mathfrak{A},\mathfrak{A}^{(n)})$، نخستین گروه همانستگی $\mathfrak{A}$ با ضرایب در$\mathfrak{A}^{(n)}$ نامیده می شود. جبر $\mathfrak{A}$ را میانگین‌پذیر ضعیف می‌نامند در صورتی که $\mathcal{H}^1(\mathfrak{A},\mathfrak{A}^*)=\{0\}$. به ازای عدد صحیح $n\geq 0$، جبر $\mathfrak{A}$، nـمیانگین‌پذیر ضعیف نامیده می‌شود در صورتی که $\mathcal{H}^1(\mathfrak{A},\mathfrak{A}^{(n)})=\{0\}$، که در آن به ازای $n\geq 1$، $\mathfrak{A}^{(n)}$ دوگان n ام $\mathfrak{A}$ است و به ازای $n=0$، برابر $\mathfrak{A}$ است.

در این پایان نامه، کار یانگ ژانگ [1] تحت عنوان *"میانگین پذیری ضعیف توسیع مدولی جبرهای باناخ"* را با جزئیات کامل شرح دهیم.

این مقاله بر اساس پاسخ به سؤال باز زیر، که توسط دلز[2]، قهرمانی و گرونبک [3] مطرح شده است، شکل گرفته است.

" آیا میانگین‌پذیری ضعیف، ۳ـمیانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه می‌دهد؟ "

در مقاله ژانگ یک مثال نقض برای پاسخ به این سؤال ساخته شده است. برای این منظور، nـمیانگین‌پذیری ضعیف توسیع مدولی جبر باناخ $\mathfrak{A}\oplus X$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم؛ که در آن $\mathfrak{A}\oplus X$، ℓ_1ـجمع مستقیم جبر باناخ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ ناصفر X است و ضرب جبری آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a,x)\cdot(b,y)=(ab,ay+xb)\qquad(a,b\in\mathfrak{A},x,y\in X)$$

همچنین، حالت‌های ویژه مختلف را مورد بررسی قرار می دهیم. در نهایت، مطالعه همه این حالتها، راهی برای ساختن یک مثال از یک جبر باناخ میانگین‌پذیر ضعیف که ۳ـمیانگین‌پذیر ضعیف نیست برای ما فراهم می‌سازد.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46H20، 47B47، 46H10، 46H25، 46H35.

واژه‌های کلیدی: nـمیانگین‌پذیر ضعیف، مدول، مدول دوگان، اشتقاق، جبر عملگرها.

[1] Yong zhang

[2] Dales

[3] Grønbæk

مقدمه

مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف برای جبرهای باناخ تعویض‌پذیر را، ابتدا باده[۴]، کرتیس[۵] و دلز در سال ۱۹۸۷ در [۱] معرفی کردند. سپس جانسون[۶] در سال ۱۹۸۸ در [۱۹] (همچنین [۶]، [۷]، [۱۴]ـ[۹]، [۱۸] و [۲۱] را ببینید) این مفهوم را برای جبرهای باناخ تعویض ناپذیر ارائه کرد. دلز، قهرمانی و گرونبک در سال ۱۹۸۸ در [۸]، بررسی nـمیانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را آغاز کردند و تعداد زیادی از خاصیت‌های مهم این نوع از جبرهای باناخ را بدست آوردند.

یک مسأله جالب مربوط به این نوع جبرها، این است که به ازای اعداد صحیح متفاوت n و m، چه رابطه‌ای بین nـمیانگین‌پذیری ضعیف و mـمیانگین‌پذیری ضعیف برقرار است. بعد از بررسی چند جبر باناخ کلاسیک، دلز، قهرمانی و گرونبگ، در مقاله ذکر شده در فوق، یک مسئله باز به این شکل مطرح کردند که، آیا میانگین‌پذیری ضعیف، ۳ـمیانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه می‌دهد؟

این پایان‌نامه بر اساس پاسخ به این پرسش شکل گرفته است. منبع اصلی این پایان‌نامه، مقالهٔ

Yong Zhang, *Weak amenability of module extensions of Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 4131-4151.

است. همچنین، از مقاله زیر نیز استفادهٔ زیادی شده است:

H. G. Dales, F. Ghahramani and N. Grønbæk, *Derivations into iterated duals of Banach algebras*, Studia Math. 128 (1998), 19-54. MR99g: 46064

فصل اول، شامل تعاریف و مفاهیم اولیه برای استفاده در فصل‌های بعد است.

در فصل دوم، اعمال دو مدولی دوگان $2m$ـام جبرها روی دوگان $2m$ـام مدول‌ها، همچنین، اعمال دو مدولی توسیع مدولی جبر باناخ $\mathfrak{A} \oplus X$ روی دوگان nـام آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این اعمال دو مدولی در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند.

در فصل سوم، ابتدا، در مورد توسیع دادن اشتقاق‌ها بحث می‌کنیم و قضیه‌هایی در این مورد بیان می‌کنیم. سپس، دو قضیهٔ اساسی در مورد شرایط لازم و کافی برای اینکه جبر $\mathfrak{A} \oplus X$، nـمیانگین‌پذیر ضعیف شود بیان می‌کنیم و با استفاده از قضیه‌های مربوط به توسیع اشتقاق‌ها که در ابتدای فصل بیان شد به اثبات آنها می‌پردازیم. همچنین، در این فصل، به طور مختصر، به معرفی جبرهای باناخ مثلثی می‌پردازیم.

در فصل چهارم، به ازای حالت‌های $X = \mathfrak{A}$، $X = \mathfrak{A}^*$ و $X = X_\circ$، که $X_\circ$ یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول با اعمال مدولی راست بدیهی است، nـمیانگین‌پذیری ضعیف جبر $\mathfrak{A} \oplus X$ را بررسی می‌کنیم.

---

[۴] Bade

[۵] Curtis

[۶] Johnson

در فصل پنجم، به بررسی n-میانگین‌پذیری ضعیف جبر $\mathfrak{A}\oplus X_1 \dotplus X_2$ می‌پردازیم و در نهایت، یک مثال از یک جبر باناخ میانگین‌پذیر ضعیف به همین شکل ارائه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که ۳-میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف. مجموعه‌ای مانند X را که در آن دو عمل جمع و ضرب اسکالر با خواص جبری زیر تعریف شده باشد فضای برداری می‌نامند. این خواص عبارتند از:

۱. به ازای هر x و y از X، داریم

$$x+y=y+x \quad \text{و} \quad x+(y+z)=(x+y)+z.$$

و به ازای هر $x \in X$، عضوی یکتا، مانند $-x$ و عضوی یکتا، مانند $\circ$ (صفر یا مبدا) در X موجود است به طوری که

$$x+\circ=x \quad \text{و} \quad x+(-x)=\circ.$$

۲. به ازای هر x و y از X و اسکالرهای α و β، داریم

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad \text{و} \quad ۱x=x \quad \text{و} \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad \text{و} \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$$

عضوهای فضای برداری را *بردار* می‌نامند.

در صورتی که میدان اسکالر اعداد حقیقی (مختلط) باشد، فضای برداری را یک فضای برداری حقیقی (مختلط) می‌نامیم.

تعریف. فضای برداری X را یک **فضای نرم‌دار** می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $x \in X$، یک عدد حقیقی نامنفی به نام نرم x، که با نماد $\|x\|$ نشان داده می‌شود، وجود داشته باشد به‌طوری‌که دارای خواص زیر باشد:

۱. به ازای هر x و y از X ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۲. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳. به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

با توجه به تعریف فوق، فضای نرم‌دار را می‌توان یک فضای متریک در نظر گرفت که متریک تعریف‌شده روی آن با ضابطه $d(x,y) = \|x-y\|$ تعریف می‌شود. اما، هر فضای متریک یک فضای نرم دار نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و σ-فشرده باشد. یعنی، $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} K_n$، که در آن $\{K_n\}$ یک دنباله از مجموعه های فشرده است و فرض کنید که $C(X)$ گردایه ای از توابع با مقادیر حقیقی پیوسته بر X باشد. همچنین، فرض کنید که $C(K_n) = \{f|_{K_n} : f \in C(X)\}$. در این صورت، به ازای هر n، $C(K_n)$ با نرم زیر یک فضای برداری نرم دار است.

$$\|f\|_n = \sup_{x \in K_n} |f(x)|.$$

به ازای f و g از $C(X)$، متریک زیر تعریف میشود.

$$d(f,g) = \sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^n \frac{\|f-g\|_n}{۱ + \|f-g\|_n}.$$

بنابراین، $C(X)$ یک فضای متریک پذیر است ولی یک فضای نرم دار نیست.

فضای نرم‌دار X یک **فضای باناخ** نامیده می‌شود، درصورتی‌که با متریک $d(x,y) = \|x-y\|$ یک فضای متریک کامل باشد؛ یعنی، هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.
فضای نرم‌دار X را **جدایی‌پذیر** گوییم، درصورتی‌که دارای زیرمجموعه‌ای چگال و شمارش‌پذیر باشد.

تعریف. فرض می‌کنیم X و Y دو فضای برداری باشند. نگاشت T از X به Y را یک **نگاشت خطی (عملگر خطی)** می‌نامیم، درصورتی‌که به ازای هر x و y از X و اسکالر α، داشته باشیم:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

درصورتی‌که $Y = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ ، عملگر خطی را یک تابعک خطی می‌نامیم.

تعریف. عملگر T را **کران‌دار** گوییم، درصورتی‌که عدد ثابتی مانند M وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

نرم عملگر T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\|T\|$ نمایش می‌دهیم.

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|};\ \|x\| \neq ۰\right\} = \sup_{\|x\| \leq ۱} \|T(x)\|.$$

گردایه تمام عملگرهای خطی از X به Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{L}(X,Y)$ با اعمال زیر یک فضای برداری است.

$$(T+S)(x)=T(x)+S(x) \quad (\alpha T)(x)=\alpha(T(x)) \quad (T,S\in\mathcal{L}(x,y)).$$

همچنین، $\mathcal{L}(X,Y)$ با نرم عملگری یک فضای نرم‌دار است.

زیرفضای $\mathcal{L}(X,Y)$ را که شامل همهٔ عملگرهای خطی پیوسته است با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. $B(X,Y)$ نیز تحت نرم عملگری یک فضای نرم‌دار است. اگر $X=Y$، $\mathcal{L}(X,Y)$ را با $\mathcal{L}(X)$ و $B(X,Y)$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم و اگر $Y=\mathbb{R}$ (یا $Y=\mathbb{C}$)، $\mathcal{L}(X,Y)$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را **فضای دوگان حقیقی (مختلط)** X می‌نامیم. همچنین، فضای $\mathcal{L}(X^*,\mathbb{C})$ را با X^{**} نمایش می‌دهیم و آن را **فضای دوگان دوم** X می‌نامیم. به همین ترتیب، دوگان‌های بالاتر X را با X^{***} یا $X^{(۳)}$ و ... و $X^{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

به ازای هر $x\in X$، $\hat{x}:X^*\to\mathbb{C}$ به صورت $\hat{x}(f)=f(x)$ تعریف می‌شود. در این صورت، نگاشت $x\to\hat{x}$ از X به توی X^{**} را **نشانندهٔ طبیعی** می‌نامند[31, 23.28].

اکنون، فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در حالت کلی به ازای $m>۱$، تصویر X در $X^{(۲m)}$ تحت نگاشت طبیعی را با $\hat{X}$ نمایش می‌دهیم. همچنین، **پوچساز** $\hat{X}$ را، که زیرفضای $X^{(۲m+۱)}$ است، با $X^{\perp}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X^{\perp}=\{F\in X^{(۲m+۱)};F\big|_{X^{(۲m)}}=\circ\}.$$

عملگر T در $B(X)$ را **فشرده** گوییم، در صورتی که به ازای گوی واحد بسته ای مانند $X_۱$، $\overline{T(X_۱)}$ با توپولوژی نرم X فشرده باشد. مجموعهٔ عملگرهای فشرده در $B(X)$ را با $K(X)$ نمایش می‌دهیم.

اینک، فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و S زیرفضای X باشد. نقطهٔ $x\in X$، **نقطه انباشتگی (نقطه حدی)**S نامیده می‌شود، در صورتی که به ازای هر همسایگی باز x مانند U داشته باشیم، $(U\setminus\{x\})\cap S\neq\emptyset$.

تعریف. فضای برداری مختلط H را **فضایی با ضرب داخلی** می‌نامیم، درصورتی‌که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y متعلق به H، عدد مختلط (x,y) نظیر شده باشد، به‌طوری‌که در خواص زیر صدق می‌کند. به ازای هر x و y و z از H و هر اسکالر α، داشته باشیم:

۱. $\overline{(x,y)}=(y,x)$.

۲. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ و $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$.

۳. $(x,x)\geq\circ$ و $(x,x)=\circ$ اگر و فقط اگر $x=\circ$.

با توجه به خاصیت (۳)، می‌توان به ازای $x \in H$، نرم x را به صورت $||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ تعریف کرد. بنابراین، فضایی با ضرب داخلی را می‌توان با استفاده از این نرم، نرم‌دار کرد.

درصورتی‌که فضای نرم‌دار حاصل کامل باشد(یعنی، هر دنباله کشی در فضای نرم‌دار H همگرا باشد)، H را **فضای هیلبرت** می‌نامیم.

تبدیل خطی P از فضای برداری X به توی خودش را یک **تصویر** نامیم، در صورتی که داشته باشیم $P^2 = P$. توجه کنید که اگر $P^2 = P$ نمی‌توان گفت P یک تبدیل خطی است. زیرا، به عنوان مثال، فرض می‌کنیم $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$P(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ -1 & x \leq -1 \end{cases}$$

در این صورت، $PoP = P^2 = P$. اما، P خطی نیست. زیرا،

$$P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = P(1) = 1 \quad \text{و} \quad P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 0 = 0 \neq P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

حال، فرض کنید H یک فضای هیلبرت و M یک زیرفضای خطی بستهٔ H باشد.تعریف می کنیم

$$M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M \quad (x, y) = 0\}$$

به ازای $h \in H$، بنا بر قضیه ای می دانیم عنصر منحصر به فرد m در M موجود است به طوری که $h - m \in M^{\perp}$. بنابراین، می توان تابع $P : H \to M$ را با $Ph = m$ تعریف کرد.P را ***تصویر متعامد*** H به روی M می‌نامیم. اگر P تصویر متعامد H روی M باشد، آنگاه P یک تبدیل خطی روی H است، $P^2 = P$ و همچنین، $rankP \perp kerP$. برای نشان دادن وابستگی P به M معمولاً آن را با P_M نمایش می‌دهیم.

فرض کنید که زیرمجموعهٔ $\xi = \{e_i; i = 1, \ldots, \infty\}$ از فضای هیلبرت H باشد. در این صورت، زیرمجموعه ξ ***یکامتعامد*** نامیده می‌شود، در صورتی که در خواص زیر صدق کند:

۱. به ازای هر $e_i \in \xi$، $||e_i|| = 1$.

۲. هر دو عضو متمایز از مجموعهٔ ξ بر هم عمود باشند؛ یعنی، اگر $e_1 \in \xi$ و $e_2 \in \xi$ و $e_1 \neq e_2$ آنگاه، $e_1 \perp e_2$.

به ازای هر $n \geq 1$، زیر فضای H، تولید شده توسط $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ را با V_n نمایش می‌دهیم.

تابع حقیقی $P : X \to \mathbb{R}$ را **نیم نرم** گوییم هرگاه به ازای هر x و y از X و هر $t \geq 0$، $P(tx) = tP(x)$ و $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$.

قضیه ۱.۱.۱. (**قضیه هان-باناخ**[۱])[**32, 3.3**] . فرض می‌کنیم Y یک زیرفضای برداری حقیقی X و P یک نیم‌نرم بر X باشد. همچنین، f یک تابعک خطی روی Y باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in Y$، $|f(x)| \leq p(x)$. در این صورت، f به یک تابعک خطی Λ بر X توسیع می‌یابد به‌طوری‌که، به ازای هر $x \in X$، $|\Lambda x| \leq P(x)$.

۲.۱ توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره

تعریف. فرض می‌کنیم X یک فضای نرم‌دار و X^* فضای دوگان آن باشد. در این صورت، توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X را که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته باشد، ***توپولوژی ضعیف*** روی X می‌نامیم و آن را با نماد $\sigma(X, X^*)$ یا w نمایش می‌دهیم.

حال فرض می‌کنیم $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ تابع خطی بر X^* باشد که با ضابطه $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌شود. در این صورت، توپولوژی تولید شده توسط X روی X^*، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* را که به ازای هر $x \in X$، تابع خطی $\hat{x}$ تحت آن پیوسته باشد، ***توپولوژی ضعیف ستاره*** روی X^* می‌نامیم و آن را با نماد $\sigma(X^*, X)$ یا w^*-توپولوژی نمایش می‌دهیم.

تعریف فوق هم ارز با این است که، فرض کنیم تور (f_α) در X^* باشد. در این صورت، تور (f_α) با *توپولوژی ضعیف ستاره* به $f \in X^*$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم $\lim_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$ و می‌نویسیم:

$$w^* - \lim_\alpha f_\alpha = f \quad \text{یا} \quad f_\alpha \xrightarrow{w^*} f.$$

۳.۱ جبرهای باناخ

تعریف. فضای برداری A روی میدان F را یک **جبر** می‌نامیم، هرگاه در آن یک ضرب تعریف شده باشد که در خواص شرکت‌پذیری و پخش‌پذیری صدق کند. یعنی، به ازای هر x و y و z از A، داریم:

$$x(y+z) = xy + xz \quad (x+y)z = xz + yz \quad x(yz) = (xy)z.$$

همچنین، به ازای هر x و y از A و اسکالر α، داریم:

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y.$$

[۱] Hann Banach theorem

اگر جبر A نرم‌دار و کامل باشد و در نامساوی زیر صدق کند، A را **جبر باناخ** می‌نامیم.

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad (x, y \in A).$$

نگاشت $x \to x^*$ از جبر مختلط A به توی A را یک **برگشت** روی A می‌نامند، در صورتی که در خاصیت‌های زیر صدق کند. به ازای هر x و y از A و $\lambda \in \mathbb{C}$، داشته باشیم:

$$(x+y)^* = x^* + y^* \quad \text{و} \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \quad \text{و} \quad (xy)^* = y^* x^* \quad \text{و} \quad x^{**} = x.$$

یک جبر مجهز به یک برگشت، **$*$-جبر** نامیده می‌شود و یک $*$-جبر باناخ که به ازای هر $x \in A$، در تساوی زیر صدق می‌کند، **C^*-جبر** نامیده می‌شود.

$$||x^* x|| = ||x||^۲.$$

فرض کنیم A یک جبر بدون واحد باشد. زیرفضای I از A را یک **ایده‌ال راست** گوییم هرگاه $IA \subseteq I$؛ یعنی، به ازای هر $x \in A$ و $y \in I$، $yx \in I$.

ایده‌ال چپ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. درصورتی‌که I هم ایده‌ال راست و هم ایده ال چپ باشد، آن را ***ایده‌ال*** می‌نامیم.

حال فرض کنید E زیرفضای خطی A باشد. در این صورت، عضو u متعلق به A را ***واحد مدولی راست*** برای E می‌نامند، در صورتی که

$$A(۱ - u) = \{a - au; a \in A\} \subseteq E.$$

در صورتی که برای یک ایده‌ال چپ، واحد مدولی راست موجود باشد آن را **ایده‌ال چپ مدولی** می‌نامند.

فرض کنید A یک جبر نرم دار با نرم $||\ .\ ||$ باشد. **همانی تقریبی راست (چپ)** A، یک تور مانند (e_α) در A است به‌طوری‌که به ازای هر $a \in A$، $\lim_\alpha a \cdot e_\alpha = a$ ($\lim_\alpha e_\alpha \cdot a = a$).

درصورتی‌که، تور (e_α) در A همانی تقریبی چپ و راست باشد آن را ***همانی تقریبی*** A می‌نامیم. همچنین، همانی تقریبی (e_α) کراندار است درصورتی‌که، $\sup_\alpha \|e_\alpha\| < \infty$.

قضیه ۱.۳.۱. (قضیه گلدشتاین[۲])[7, A.3.29]. به ازای هر $F \in X^{**}$، توری مانند (x_α) در X موجود است به‌طوری‌که به ازای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|F\|$ و (x_α) با توپولوژی ضعیف ستاره به F همگرا است؛ یعنی، X در X^{**} با توپولوژی ضعیف ستاره، چگال می‌باشد.

[۲] Goldstine theorem

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر و X یک فضای خطی باشد. عملگر دوخطی $m : \mathfrak{A} \times X \to X$، **ضرب بیرونی چپ (راست)** در X توسط عناصر $\mathfrak{A}$ نامیده می‌شود درصورتی‌که، به ازای $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$، داشته باشیم:

$$m(a,x) = a \cdot x \qquad (m(a,x) = x \cdot a).$$

فضای خطی X همراه با نگاشت دوخطی $m : \mathfrak{A} \times X \to X$، $(a,x) \mapsto a \cdot x$ ($(a,x) \mapsto x \cdot$) یک $\mathfrak{A}$ـمدول چپ (راست) نامیده می‌شود، درصورتی‌که در خاصیت زیر صدق کند.

$$(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \qquad (x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b) \qquad (a, b \in \mathfrak{A}, x \in X).$$

فضای خطی X یک $\mathfrak{A}$ـ***دو مدول*** نامیده می‌شود، در صورتی که، $\mathfrak{A}$ـمدول راست و چپ باشد و در خاصیت زیر صدق کند:

$$a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b \quad (a, b \in \mathfrak{A},\ x \in X).$$

به عنوان مثال، با در نظر گرفتن $X = \mathfrak{A}$ و تعریف‌های ارائه شده، جبر $\mathfrak{A}$ خود یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول است.

فرض کنید X یک فضای خطی باشد. در این صورت، X با توجه به نگاشت دو خطی $f : L(X) \times X \to X$، که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک $L(X)$ـمدول چپ است.

$$f(T,x) = Tx \quad (T \in L(X),\ x \in X).$$

اکنون، فرض کنید E یک $\mathfrak{A}$ـمدول چپ یا راست باشد. به ازای $\lambda \in E^*$ و $a \in \mathfrak{A}$، عضوهای $\lambda \cdot a$ و $a \cdot \lambda$ از E^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle x, \lambda \cdot a \rangle = \langle a \cdot x, \lambda \rangle \quad , \quad \langle x, a \cdot \lambda \rangle = \langle x \cdot a, \lambda \rangle \quad (x \in E).$$

در این صورت، E^* با توجه به نگاشت $\mathfrak{A} \times E^* \to E^*$، $(a,\lambda) \mapsto \lambda \cdot a$ یک $\mathfrak{A}$ـمدول راست است و با توجه به نگاشت $\mathfrak{A} \times E^* \to E^*$، $(a,\lambda) \mapsto a \cdot \lambda$ یک $\mathfrak{A}$ـمدول چپ است. همچنین، زمانی که E یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول می‌باشد، E^* با توجه به نگاشت‌های فوق یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول است. برای بررسی این موضوع، فرض می‌کنیم که a و b از $\mathfrak{A}$ باشند و $\lambda \in E^*$. در این صورت، با توجه به تعریف‌های فوق داریم:

$$\begin{aligned}
\langle x, \lambda \cdot (ab) \rangle &= \langle (ab) \cdot x, \lambda \rangle = \langle a \cdot (b \cdot x), \lambda \rangle = \langle b \cdot x, \lambda \cdot a \rangle = \langle x, (\lambda \cdot a) \cdot b \rangle, \\
\langle x, (ab) \cdot \lambda \rangle &= \langle x \cdot (ab), \lambda \rangle = \langle (x \cdot a) \cdot b, \lambda \rangle = \langle x \cdot a, b \cdot \lambda \rangle = \langle x, a \cdot (b \cdot \lambda) \rangle, \\
\langle x, a \cdot (\lambda \cdot b) \rangle &= \langle x \cdot a, \lambda \cdot b \rangle = \langle b \cdot (x \cdot a), \lambda \rangle = \langle (b \cdot x) \cdot a, \lambda \rangle = \langle b \cdot x, a \cdot \lambda \rangle \\
&= \langle x, (a \cdot \lambda) \cdot b \rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین، $\lambda\cdot(ab)=(\lambda\cdot a)\cdot b$، $(a\cdot b)\cdot\lambda=a\cdot(b\cdot\lambda)$، $a\cdot(\lambda\cdot b)=(a\cdot\lambda)\cdot b$ و با توجه به تعریف‌های قبلی E^* یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول است.

فرض کنید X یک $\mathfrak{A}$ـمدول چپ و Y زیرفضای X باشد. اگر به ازای هر $y\in Y$ و $a\in\mathfrak{A}$، داشته باشیم $a\cdot y\in Y$ آنگاه، Y یک $\mathfrak{A}$ـ***زیر مدول* چپ** از X نامیده می‌شود. $\mathfrak{A}$ـزیرمدول راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

X یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول ***متقارن*** است، درصورتی‌که به ازای هر $a\in\mathfrak{A}$ و $x\in X$، داشته باشیم $x\cdot a=a\cdot x$.

حال فرض کنید X و Y هر یک $\mathfrak{A}$ـمدول راست (چپ) باشند. نگاشت $\varphi:X\to Y$ یک ریختار $\mathfrak{A}$ـ مدول راست (چپ) نامیده می‌شود، درصورتی‌که یک عملگر خطی باشد و نیز به ازای هر $a\in\mathfrak{A}$ و $x\in X$ خاصیت زیر برقرار باشد.

$$\varphi(x\cdot a)=\varphi(x)\cdot a \quad [\varphi(a\cdot x)=a\cdot\varphi(x)]\,.$$

فرض کنید X و Y هر یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باشند. نگاشت $\varphi:X\to Y$ یک **ریختار** $\mathfrak{A}$ـدو مدول نامیده می‌شود، درصورتی‌که ریختار $\mathfrak{A}$ـمدول راست و نیز ریختار $\mathfrak{A}$ـمدول چپ باشد.

قضیه ۱.۳.۲. (قضیه تجزیه کوهن[۳]) [2, 10.11]. فرض کنید A یک جبر باناخ با نرم $\|\ \|$ و دارای همانی تقریبی کراندار باشد. اگر E یک Aـمدول باناخ چپ باشد آنگاه، $A\cdot E$ یک زیرفضای خطی بسته از E است. حال، فرض کنید S یک ترکیب خطی بسته از $A\cdot E$ باشد و $z\in S$. در این صورت، به ازای هر $z\in S$ و $\delta>0$، عضوهای $a\in A$ و $y\in E$ وجود دارند به طوری که، $z=a\cdot y$ و $\|y-z\|\le\delta$.

۱.۴ میانگین پذیری جبرهای باناخ

تعریف. فرض کنید A یک جبر و E یک Aـدو مدول باشد. نگاشت خطی $D:A\to E$ را **اشتقاق** می‌نامیم، درصورتی‌که رابطه زیر برقرار باشد.

$$D(ab)=a\cdot Db+Da\cdot b \quad (a,b\in A).$$

گردایهٔ همهٔ اشتقاق‌ها از A به E را با $Z^1(A,E)$ نمایش می‌دهیم که زیرفضای خطی $\mathcal{L}(A,E)$ است.

به عنوان مثال، به ازای $x\in E$، نگاشت δ_x را که به صورت زیر تعریف می‌کنیم یک اشتقاق است.

$$\delta_x(a)=a\cdot x-x\cdot a \quad (a\in A).$$

[۳] Cohen's factorization theorem

در این صورت، به ازای هر a و b از A، داریم

$$\delta_x(ab) = a \cdot (b \cdot x - x \cdot b) + (a \cdot x - x \cdot a) \cdot b = a \cdot \delta_x(b) + \delta_x(a) \cdot b.$$

اشتقاق‌هایی که با ضابطه فوق تعریف می شوند **اشتقاق درونی** نامیده می‌شوند. بنابراین، اشتقاق D درونی است در صورتی که، $x_\circ \in E$ ای وجود داشته باشد به طوری که $D(a) = \delta_{x_\circ}(a)$.

مجموعه همه اشتقاق‌های درونی از A به E را با $N^\backslash(A, E)$ نمایش می‌دهیم که زیرفضای خطی $Z^\backslash(A, E)$ است.

اینک، به ازای $n \in \mathbb{N}$، n***امین گروه همانستگی*** A با ضرایب در E را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$H^n(A, E) = Z^n(A, E) \,/\, N^n(A, E).$$

بنابراین، نخستین گروه همانستگی، خارج‌قسمت فضای اشتقاق‌ها به فضای اشتقاق‌های درونی است؛ یعنی،

$$H^\backslash(A, E) = Z^\backslash(A, E) \,/\, N^\backslash(A, E).$$

جبر باناخ A **میانگین‌پذیر** نامیده می‌شود، درصورتی‌که به ازای هر A-دومدول باناخ X، هر اشتقاق از A به X^* یک اشتقاق درونی باشد؛ یعنی، $H^\backslash(A, X^*) = \{\circ\}$.

جبر باناخ A **میانگین‌پذیر ضعیف** است، درصورتی‌که هر اشتقاق از A به توی A^* درونی باشد؛ یعنی، $H^\backslash(A, A^*) = \{\circ\}$.

جبر باناخ A، n-**میانگین‌پذیر ضعیف** است، درصورتی‌که هر اشتقاق از A به توی $A^{(n)}$ درونی باشد؛ یعنی، $H^\backslash(A, A^{(n)}) = \{\circ\}$.

همچنین، جبر باناخ A **دائماً میانگین‌پذیر ضعیف** است، درصورتی‌که به ازای همهٔ $n \geq ۱$، n-میانگین‌پذیر ضعیف باشد.

۵.۱ آرنز منظم

فرض کنید X، Y و Z فضاهای نرم‌دار باشند و $f : X \times Y \to Z$ یک نگاشت دو خطی و کراندار باشد. در این صورت، مزدوج f، یعنی $f^* : Z^* \times X \to Y^*$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود، یک نگاشت دو خطی و کراندار است.

$$\langle y, f^*(z^*, x)\rangle = \langle f(x, y), z^*\rangle \qquad (x \in X, y \in Y, z^* \in Z^*).$$

حال اگر $f^{**}=(f^*)^*$، یعنی f^{**} مزدوج f^* باشد، آنگاه، می‌توانیم عمل فوق را به صورت زیر ادامه دهیم. $f^{**}:Y^{**}\times Z^*\to X^*$ و $f^{***}:X^{**}\times Y^{**}\to Z^{**}$ که، به ترتیب، هر یک به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\langle x, f^{**}(y^{**},z^*)\rangle = \langle f^*(z^*,x), y^{**}\rangle \qquad (x^{**}\in X^{**}, y^{**}\in Y^{**}),$$
$$\langle z^*, f^{***}(x^{**},y^{**})\rangle = \langle f^{**}(y^{**},z^*), x^{**}\rangle.$$

در این صورت، f^{***} توسیع یکتای f است به طوری که، به ازای هر $y^{**}\in Y^{**}$ و هر $x\in X$، نگاشت‌های $f^{***}(\circ, y^{**})$ و $f^{***}(\hat{x},\circ)$ با توپولوژی ضعیف ستاره (w^*-توپولوژی) پیوسته هستند؛ یعنی، اگر $x^{**}\in X^{**}$ و تور (x_α) در X با w^*-توپولوژی به x^{**} همگرا باشد، همچنین، اگر $y^{**}\in Y^{**}$ و تور (y_β) در Y با w^*- توپولوژی به y^{**} همگرا باشد آنگاه،

$$w^*-\lim_\alpha f^{***}(\hat{x}_\alpha, y^{**}) = f^{***}(x^{**},y^{**}),$$
$$w^*-\lim_\beta f^{***}(\hat{x}, \hat{y_\beta}) = f^{***}(\hat{x},y^{**}).$$

حال، فرض کنید نگاشت $f^r: Y\times X\to Z$ به ازای $x\in X$ و $y\in Y$، با ضابطه $f^r(y,x)=f(x,y)$ تعریف شود. f^r یک نگاشت دو خطی و کراندار است و به طریق مشابه، مطابق صورت فوق، می‌توان f^r را به تابع $f^{r***r}:X^{**}\times Y^{**}\to Z^{**}$ توسیع داد، که این توسیع به صورت یکتا انجام می‌شود به طوری که به ازای هر $x^{**}\in X^{**}$، نگاشت $f^{r***r}(x^{**},\circ)$ با w^*-توپولوژی پیوسته است؛ یعنی، اگر تور (y_β) با w^*-توپولوژی به y^{**} همگرا باشدآنگاه،

$$w^*-\lim_\beta f^{r***r}(x^{**},\hat{y}_\beta) = f^{r***r}(x^{**},y^{**}).$$

بطریق مشابه، به ازای هر $y\in Y$، می توان در مورد نگاشت $f^{r***r}(\circ,\hat{y})$ عمل کرد. چون نگاشت f دو خطی و کراندار است، f^*، f^{**} و f^{***} با w^*-توپولوژی نسبت به متغیر اول پیوسته خواهند بود. بنابراین، روابط زیر برقرار خواهند شد.

فرض کنید (x_α) و (y_β) دو تور، به ترتیب، در X و Y باشند. به طوری که، با w^*-توپولوژی به x^{**} و y^{**} همگرا باشند. در این صورت،

$$f^{***}(x^{**},y^{**}) = w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta f(x_\alpha,y_\beta),$$
$$f^{r***r}(x^{**},y^{**}) = w^*-\lim_\beta w^*-\lim_\alpha f(x_\alpha,y_\beta).$$

نگاشت f را **آرنز منظم** می‌نامیم در صورتی که، $f^{***}=f^{r***r}$.

اینک، فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $X=Y=Z=A$. در این صورت، نگاشت $\pi: A\times A\to A$ با ضابطه $\pi(a,b)=ab$ و نگاشت $\pi^r: A\times A\to A$ با ضابطه $\pi^r(a,b)=ba$ نگاشت‌های دو خطی و کراندار

هستند که مشابه آنچه تاکنون گفته شد برای آنها توسیع‌های π^{***} و π^{r***r} تعریف می‌شوند. π^{***} و π^{r***r}، به ترتیب، اولین و دومین ضرب آرنز نامیده می‌شوند که با نمادهای $\Box$ و $\Diamond$ نمایش داده می‌شوند.

جبر A را آرنز منظم می‌خوانند در صورتی که، π آرنز منظم باشد. این بدین معنی است که، به ازای هر a^{**} و b^{**} از A، داشته باشیم

$$a^{**}\Box b^{**} = a^{**}\Diamond b^{**}.$$

بنابراین، جبر باناخ A را آرنز منظم نامیم در صورتی که، $\Diamond = \Box$.

به عنوان مثال: C^*–جبرها آرنز منظم‌اند [28] و اگر G یک گروه توپولوژی باشد(گروهی مانند G مجهز به یک توپولوژی می‌باشد که با توجه به آن اعمال گروه پیوسته هستند؛ یعنی، نگاشت xy $(x,y) \to$ از $G \times G$ به G و نگاشت $x \to x^{-1}$ از G به G پیوسته هستند)آنگاه، $L^1(G)$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر G متناهی باشد [29].

در صورتی که A جبر باناخ تعویض‌پذیر باشد، تساوی زیر همیشه برقرار است. به ازای $a^{**}, b^{**} \in A^{**}$:

$$a^{**}\Box b^{**} = b^{**}\Diamond a^{**}.$$

بنابراین، A آرنز منظم است اگر و تنها اگر $(A^{**}, \Box)$ جابجایی باشد.

قضیه‌ای مهم در این قسمت وجود دارد که تنها به بیان صورت آن بسنده می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۱. [30, 2.1]. فرض می‌کنیم $f: X \times Y \to Z$ نگاشت دو خطی کرانداری باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. f آرنز منظم است.

۲. $f^{****} = f^{r*****r}$.

۳. $f^{****}(Z^*, X^{**}) \subseteq Y^*$.

۴. نگاشت خطی $x \mapsto f^*(z^*, x)$ از X به Y^*، به ازای هر $z^* \in Z^*$، ضعیف–فشرده است.

ضرب‌های $\Box$ و $\Diamond$، اعمال مدولی را روی A^{**} توسیع می‌دهند؛ به این معنی که، به ازای $a \in A$ و $a^{**} \in A^{**}$، تساوی‌های زیر برقرار هستند:

$$a \cdot a^{**} = \hat{a}\Box a^{**} = \hat{a}\Diamond a^{**}$$

$$a^{**} \cdot a = a^{**}\Box \hat{a} = a^{**}\Diamond \hat{a}$$

فصل ۲

بررسی اعمال دومدولی

در این فصل، با در نظر گرفتن $\mathfrak{A}$ به عنوان یک جبر باناخ و X به عنوان یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ، به بررسی اعمال دو مدولی $\mathfrak{A}^{(2m)}$ روی $X^{(2m)}$ می‌پردازیم. سپس، جبر $\mathfrak{A} \oplus X$ را معرفی می‌کنیم و اعمال دو مدولی آن روی فضای دوگان nـام آن؛ یعنی، $(\mathfrak{A} \oplus X)^{(n)}$ را بدست می آوریم.

متذکر می‌شویم، از این فصل به بعد برای جلوگیری از سردرگمی، به جای استفاده از نمادهای فصل اول، بخش آرنز منظم، از نمادهای دیگری استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، به جای x^* که عضوی از X^* است از f، یا به جای x^{**} که عضوی از X^{**} می‌باشد از Φ استفاده می‌کنیم.

۱.۲ اعمال دو مدولی $\mathfrak{A}^{(2m)}$ روی $X^{(2m)}$

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ باشد. نشان می‌دهیم X^{**} یک $\mathfrak{A}^{**}$ـدو مدول باناخ است بطوری که، $\mathfrak{A}^{**}$ توسط اولین ضرب آرنز مجهز شده باشد. ابتدا، چند تعریف ارایه می‌دهیم:

فرض کنید که $\Phi \in X^{**}$، $u \in \mathfrak{A}^{**}$، $f \in X^*$ و $a \in \mathfrak{A}$ باشد. در این صورت، $\Phi \cdot f \in \mathfrak{A}^*$ و $u \cdot \Phi \in X^{**}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، که در آن $u \cdot \Phi$، عمل $\mathfrak{A}^{**}$ـمدولی چپ روی X^{**} است:

$$\begin{aligned} &\langle a, \Phi \cdot f \rangle = \langle f \cdot a, \Phi \rangle, \\ &\langle f, u \cdot \Phi \rangle = \langle \Phi \cdot f, u \rangle. \end{aligned} \tag{$*$}$$

همچنین، به ازای $x \in X$، نگاشت‌های $f \cdot x \in \mathfrak{A}^*$ ، $u \cdot f \in X^*$ و $\Phi \cdot u \in X^{**}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، که در آن $\Phi \cdot u$، عمل $\mathfrak{A}^{**}$ـدو مدولی راست روی X^{**} است:

$$\langle a, f \cdot x \rangle = \langle x \cdot a, f \rangle,$$

$$\langle x, u\cdot f\rangle = \langle f\cdot x, u\rangle, \tag{**}$$

$$\langle f, \Phi\cdot u\rangle = \langle u\cdot f, \Phi\rangle. \tag{***}$$

با توجه به قضیه گلدشتاین، فرض می‌کنیم (a_α) و (x_β)، به ترتیب تورهایی در $\mathfrak{A}$ و X باشند، به طوری که $a_\alpha \xrightarrow{w^*} u$ و $x_\beta \xrightarrow{w^*} \Phi$. در این صورت، داریم:

$$u\cdot\Phi = w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta a_\alpha\cdot x_\beta,\quad \Phi\cdot u = w^*-\lim_\beta w^*-\lim_\alpha x_\beta\cdot a_\alpha.$$

ادعا می‌کنیم که X^{**} با توجه به نگاشت‌های $(u,\Phi)\mapsto u\cdot\Phi$ و $(u,\Phi)\mapsto \Phi\cdot u$، از $\mathfrak{A}^{**}\times X^{**}$ به X^{**}، یک $\mathfrak{A}^{**}$ـدو مدول باناخ است. یعنی، به ازای u و v از $\mathfrak{A}^{**}$ و $\Phi\in X^{**}$، روابط زیر برقرار هستند:

$$(\Phi\cdot u)\cdot v = \Phi\cdot(u\cdot v),\quad u\cdot(\Phi\cdot v) = (u\cdot\Phi)\cdot v,\quad u\cdot(v\cdot\Phi) = (u\cdot v)\cdot\Phi.$$

برای اثبات روابط بالا، فرض می‌کنیم (x_β) و (a_α) همان تورهایی در نظر گرفته شدهٔ قبلی باشند و (b_γ) تور دیگری در $\mathfrak{A}$ باشد، به طوری که $b_\gamma \xrightarrow{w^*} v$. در این صورت، با توجه به اینکه X یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ است، داریم:

$$\begin{aligned}(\Phi\cdot u)\cdot v &= (w^*-\lim_\beta w^*-\lim_\alpha x_\beta\cdot a_\alpha)\cdot v = (w^*-\lim_\beta w^*-\lim_\alpha x_\beta\cdot a_\alpha)\cdot w^*-\lim_\gamma b_\gamma\\ &= w^*-\lim_\beta w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\gamma (x_\beta\cdot a_\alpha)\cdot b_\gamma = w^*-\lim_\beta x_\beta\cdot w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\gamma (a_\alpha\cdot b_\gamma)\\ &= w^*-\lim_\beta x_\beta\cdot(u,v) = \Phi\cdot(u\cdot v).\end{aligned}$$

دو رابطه دیگر نیز به طریق مشابه ثابت می‌شوند. بنابراین، X^{**} یک $\mathfrak{A}^{**}$ـدو مدول باناخ است که اعمال $\mathfrak{A}^{**}$ـمدولی چپ و راست آن در $(*)$ و $(* * *)$ بیان شده است. همچنین، تعریفی که برای $u\cdot f$ در $(**)$ ارائه دادیم، عمل $\mathfrak{A}^{**}$ـمدولی چپ روی X^* را نتیجه می‌دهد.

زمانی که $u = a\in\mathfrak{A}$، اعمال $\mathfrak{A}^{**}$ـمدولی بالا تبدیل به اعمال $\mathfrak{A}$ـمدولی روی X^{**} و X^* می‌شوند.

به ازای $n\geq ۱$، $\mathfrak{A}^{(n)}$ فضای دوگان nـام $\mathfrak{A}$ با اعمال مدولی، که به استقرا به صورت زیر تعریف می‌شوند، یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ است.

$$\langle u, F\cdot a\rangle = \langle a\cdot u, F\rangle,\qquad \langle u, a\cdot F\rangle = \langle u\cdot a, F\rangle\qquad (F\in\mathfrak{A}^{(n)}, u\in\mathfrak{A}^{(n-1)}, a\in\mathfrak{A}). \tag{*}$$

برای اثبات، ابتدا فرض می‌کنیم $n = ۱$. در این صورت، $\mathfrak{A}^*$ با توجه به نگاشت‌های $(a,f)\mapsto af$ و $(a,f)\mapsto fa$ که از $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}^*$ به $\mathfrak{A}^*$ تعریف می‌شوند و اعمال مدولی زیر که بنا بر ضرب‌های آرنز با معنا می‌باشند، یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ می‌باشد.

$$\langle x, fa\rangle = \langle ax, f\rangle\quad,\quad \langle x, af\rangle = \langle xa, f\rangle\qquad (x\in\mathfrak{A}).$$

به همین ترتیب، به ازای $n=۲$ نیز $\mathfrak{A}^{**}$ یک $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ است. حال، فرض می‌کنیم رابطه‌های $(*)$ به عنوان فرض استقرا برقرار باشند. در این صورت، $\mathfrak{A}^{(n+۱)}$ به عنوان $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ چنین تعریف می‌شود:

$$\langle F, G\cdot a\rangle = \langle a\cdot F, G\rangle \quad , \quad \langle F, a\cdot G\rangle = \langle F\cdot a, G\rangle \qquad (G\in \mathfrak{A}^{(n+۱)}).$$

تعریف‌های بالا با توجه به فرض استقرا با معنی است. بنابراین، $\mathfrak{A}^{(n)}$ با اعمال $(*)$، $\mathfrak{A}$ـدو مدول باناخ است.

اینک، $\mathfrak{A}^{(۲m)}$ را به جای $\mathfrak{A}$ و $X^{(۲m)}$ را به جای X در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که $X^{(۲m+۲)}$ یک $\mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ـدو مدول باناخ است. طی این فرایند، توجه می‌کنیم که روی هر $\mathfrak{A}^{(۲m)}$، اولین ضرب آرنز در نظر گرفته شده است.

فرض می‌کنیم به ازای $m\geq ۱$، اعمال دو مدولی $\mathfrak{A}^{(۲m)}$ روی $X^{(۲m)}$ تعریف شده است. در این صورت، به ازای $k\geq ۱$، $X^{(۲m+k)}$ با توجه به اعمال مدولی Λu و$u\Lambda$ از $X^{(۲m+k)}$ ، که به استقرا با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند، یک $\mathfrak{A}^{(۲m)}$ـدو مدول باناخ است.

$$\langle \gamma, u\Lambda\rangle = \langle \gamma u, \Lambda\rangle \quad , \quad \langle \gamma, \Lambda u\rangle = \langle u\gamma, \Lambda\rangle \qquad (u\in\mathfrak{A}^{(۲m)}, \Lambda\in X^{(۲m+k)}, \gamma\in X^{(۲m+k-۱)}).$$

توجه کنید که، γu و $u\gamma$ عضوهای $X^{(۲m+k-۱)}$ می‌باشند که با توجه به فرض استقرا تعریف شده‌اند. بنابراین، عبارت‌های بالا با معنی هستند.

اینک، فرض کنید $u=a\in\mathfrak{A}$. در این صورت، اعمال مدولی بالا با اعمال $\mathfrak{A}$ـمدولی روی $X^{(۲m+k)}$ یکسان‌اند. بنابراین، به ازای $F\in X^{(۲m+۱)}$ و $\Phi\in X^{(۲m+۲)}$، اعضای ΦF و $F\Phi$ که عضو $\mathfrak{A}^{(۲m+۱)}$ هستند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle u, F\Phi\rangle = \langle F, \Phi u\rangle (= \langle uF, \Phi\rangle), \tag{$*$}$$

$$\langle u, \Phi F\rangle = \langle Fu, \Phi\rangle (= \langle F, u\Phi\rangle) \qquad (u\in\mathfrak{A}^{(۲m)}). \tag{$**$}$$

حال، فرض می‌کنیم Y یک فضای باناخ باشد و $y\in Y$. در این صورت، تصویر y در Y^{**} تحت نگاشت طبیعی را با $\hat{y}$ نشان می‌دهیم. زمانی که $F\in X^{(۲m+۱)}$ و $\varphi\in X^{(۲m)}$، $F\hat{\varphi}$ را با $F\varphi$ و $\hat{\varphi}F$ را با φF نشان می‌دهیم و با توجه به روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\langle u, F\varphi\rangle = \langle u, F\hat{\varphi}\rangle = \langle F, \hat{\varphi}u\rangle = \langle \hat{\varphi}u, \hat{F}\rangle = \langle \varphi u, F\rangle,$$

$$\langle u, \varphi F\rangle = \langle u, \hat{\varphi}F\rangle = \langle Fu, \hat{\varphi}\rangle = \langle F, u\hat{\varphi}\rangle = \langle u\hat{\varphi}, \hat{F}\rangle = \langle u\varphi, F\rangle \qquad (u\in\mathfrak{A}^{(۲m)}).$$

در حالت کلی، به روش استقرا، به ازای $F\in X^{(۲m+۱)}$ و $\Phi\in X^{(۲n)}$، ثابت می‌شود که ΦF و $F\Phi$ اعضای $\mathfrak{A}^{(۲k+۱)}$ هستند به طوری که، $k=\max\{m, n-۱\}$. برای اثبات این موضوع، به روش زیر عمل می‌کنیم: فرض می کنیم $k=۱$. در این صورت، $m=n=۱$ یا $m=۱$ و $n=۲$. در حالت اول، $F\in X^{***}$

و $\Phi \in X^{**}$ و با توجه به اعمال مدولی، ΦF و $F\Phi$ اعضای $\mathfrak{A}^{***}$ می‌باشند. در حالت دوم، $F \in X^{***}$ و $\phi \in X^{****}$ و با توجه به اعمال مدولی ΦF و $F\Phi$ اعضای $\mathfrak{A}^{***}$ هستند. در نتیجه، حکم به ازای $k = ۱$ صحیح است. اکنون فرض می کنیم حکم برای k برقرار باشد. به سادگی می توان حکم را برای $k + ۱$ نیز به دست آورد.در نتیجه حکم صحیح است.

حال، برای $\mu \in \mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ و $F \in X^{(۲m+۱)}$، عضو $\mu F \in X^{(۲m+۱)}$ را، به استقرا، با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle \varphi, \mu F\rangle = \langle F\varphi, \mu\rangle \qquad (\varphi \in X^{(۲m)}).$$

توجه کنید که $F\varphi$ قبلاً تعریف شده است.

در واقع، این تعریف یک عمل $\mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ـ‌مدولی روی $X^{(۲m+۱)}$ است. با توجه به تعریف‌ها و اعمال مدولی بالا، در نهایت، برای $\mu \in \mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ و $\Phi \in X^{(۲m+۲)}$، اعضای $\Phi\mu$ و $\mu\Phi$ از$X^{(۲m+۲)}$ را، به استقرا، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle F, \mu\Phi\rangle = \langle \Phi F, \mu\rangle \quad , \quad \langle F, \Phi\mu\rangle = \langle \mu F, \Phi\rangle \qquad (F \in X^{(۲m+۱)}).$$

یادآوری می کنیم، که μF و ΦF قبلاً تعریف شده‌اند. این روابط اعمال $\mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ـ‌مدولی روی $X^{(۲m+۲)}$ را تعریف می‌کنند، که نتیجه می‌دهد $X^{(۲m+۲)}$ یک $\mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ـ‌دو مدول می‌باشد.

اگر (u_α) و (y_β)، به ترتیب، دو تور در $\mathfrak{A}^{(۲m)}$ و $X^{(۲m)}$ باشند، به طوری که $u_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$ و $y_\beta \xrightarrow{w^*} \Phi$. در این صورت، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\mu\Phi = w^* - \lim_\alpha w^* - \lim_\beta u_\alpha y_\beta \quad , \quad \Phi\mu = w^* - \lim_\beta w^* - \lim_\alpha y_\beta u_\alpha.$$

از طرفی، به ازای $\mu \in \mathfrak{A}^{(۲m+۲)}$ و $\varphi \in X^{(۲m)}$، همانطور که قبلاً اشاره کردیم $\mu\varphi = \mu\hat{\varphi}$ و $\varphi\mu = \hat{\varphi}\mu$. بنابراین، با توجه به روابط قبلی، می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$\langle F, \mu\varphi\rangle = \langle F, \mu\hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{\varphi}F, \mu\rangle = \langle \varphi F, \mu\rangle$$
$$\langle F, \varphi\mu\rangle = \langle F, \hat{\varphi}\mu\rangle = \langle \mu F, \hat{\varphi}\rangle = \langle \varphi, \mu F\rangle = \langle F\varphi, \mu\rangle \qquad (F \in X^{(۲m+۱)}).$$

اینک، به ازای $m \geq ۱$، عضوهای $f \in X^{(۲m-۱)}$، $\varphi \in X^{(۲m)}$ و $u \in \mathfrak{A}^{(۲m)}$ را در نظر می‌گیریم. روابط زیر بین این عضوها برقرار هستند که با توجه به آنچه تاکنون گفته شد به آسانی ثابت می شوند:

لم ۱.۱.۲. فرض می‌کنیم به ازای $m \geq ۱$، $f \in X^{(۲m-۱)}$، $\varphi \in X^{(۲m)}$ و $u \in \mathfrak{A}^{(۲m)}$. در این صورت، رابطه‌های زیر برقرارند:

$$u\hat{f} = \hat{u}\hat{f} = (uf)\hat{}$$