بنام خداوند جان

و خرد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان

tt^* – هندسه روی کلاف مماس یک خمینه تقریبا مختلط

اساتید راهنما

دکتر ابراهیم پوررضا– دکتر غفار فرزدی

پژوهشگر

عباس رزلانسری

بهمن ۱۳۸۷

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند منان که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آنچه را که آموخته‌ام در راه پیشرفت میهن خویش به کار گیرم. بر خود وظیفه می‌دانم ازاستادان بسیار بزرگوارم آقایان **دکتر ابراهیم پوررضا** و **دکتر غفار فرزدی** به پاس تمام زحماتی که در طول دوره کارشناسی ارشد برای اینجانب کشیده‌اند و راهنمائی‌های ارزنده‌ای که داشته‌اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از استاد گرامی جناب آقای **دکتر مگردیچ تومانیان** زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند و در جلسه دفاعیه شرکت کردند، کمال سپاس و قدردانی را دارم.

از تمامی اعضای خانواده‌ام خصوصا پدر و مادرم که همواره یاریگر و مشوق من بوده‌اند و با تحمل تمامی مشکلات، راه تحصیل را برای من هموار نمودند، سپاسگذارم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از دوستان گرامی آقایان محمد زرزا، رسول شهسواری، محسن ناظمیان، شاهو خانی و مهدی رادنیا تشکر و قدردانی نمایم.

نام خانوادگی: رزلانسری **نام:** عباس

عنوان پایان نامه: tt^* – هندسه روی کلاف مماس یک خمینه تقریبا مختلط

اساتید راهنما: دکتر ابراهیم پوررضا- دکتر غفار فرزدی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** هندسه

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** بهمن ۱۳۸۷

تعداد صفحات: ۹۰

کلیدواژه ها: tt^* – هندسه و tt^* –کلاف ها- خمینه های مختلط مخصوص و کاهلر مخصوص- خمینه های کاهلر نزدیک- نگاشت های چندهمساز- فضاهای متقارن شبه- ریمانی

چکیده: موضوع این پایاننامه tt^* –کلاف های (TM,D,S) روی یک خمینه تقریباً مختلط (M,J) می باشد.فرض کنیم ∇ یک ارتباط مسطح روی M باشد. ما tt^* – کلاف هایی با $\nabla = D + S$ که به وسیله خانواده ۱- پارامتری از ارتباط های $\nabla^\theta = \exp(\theta J)\circ\nabla\circ\exp(-\theta J)$ القاء می شوند را مشخص می کنیم و جواب های منحصربفردی برای حالتی که D مختلط است بدست می آوریم.یک کلاس از این جواب ها خمینه های کاهلر نزدیک و خمینه های کاهلر مخصوص می باشد.بعلاوه tt^* –کلاف ها را در حالتی که یک ساختار سیمپلکتیک یا متری می پذیرند مطالعه می کنیم. سرانجام مفهوم نگاشت های چندهمساز را به نگاشت هایی ازخمینه های تقریباً مختلط به توی خمینه های شبه ریمانی تعمیم می دهیم و tt^* –کلاف های سیمپلکتیک و متری فوق را به نگاشت های چندهمساز از (M,J) بترتیب به توی فضاهای متقارن شبه – ریمانی $SO_0(p,q)/U(p,q)$ و $Sp(\mathbb{R}^{2n})/U(p,q)$ ربط می دهیم.

فهرست مطالب

این پایاننامه بر اساس مقاله:

tt^* – Geometry on the tangent bundle of an almost complex manifold

می باشد که توسط:

Lars Schafer

نوشته شده است و در

Journal of geometry and physics ٥٧ (٢٠٠٧) ٩٩٩ ١٠١٤

به چاپ رسیده است.

در این پایاننامه tt^*-کلاف های روی کلاف مماس یک خمینه تقریبا مختلط (M,J) را به عنوان خمینه پایه مطالعه می کنیم.در کارهای قبل در مورد tt^*-کلاف ها فقط حالتی را که (M,J) خمینه مختلط بود در نظر گرفته بودیم [٥و٢٦]. مناسب به نظر می رسد که در مطالعه کلاف ها، خمینه های تقریبا مختلط را نیز در نظر بگیریم چون در این صورت خمینه های کاهلر نزدیک[١] با ارتباط لوی- چویتای مسطح به عنوان جوابی از این tt^*- هندسه بدست خواهند آمد. شفر در یک کار مشترک با کورتس[٢] [٦] یک کلاس بندی ساختاری به خمینه های کاهلر نزدیک با ارتباط لوی- چویتای مسطح داده است. دیگر کلاس جالب از جواب ها خمینه های کاهلر مخصوص اند که در [٥] مطالعه شده اند. به عبارت دیگر tt^*-کلاف های روی کلاف مماس یک خمینه تقریبا مختلط (M,J) تعمیم مشترکی از این دو هندسه می باشند. خمینه های کاهلر نزدیک در فیزیک نظریه ریسمان[٣] و ابرتقارن ها[٤] [١٣] ودر ریاضی هولونومی ضعیف[٥]کاربرد دارند (کارهای Gray. A را مقایسه کنید). مفهوم خمینه های کاهلر مخصوص به وسیله دی وایت[٦]و ون رووین[٧] [١٠] معرفی شد و منشاء آن در نظریه میدان های ابر- متقارن می باشد. برای یک بررسی در این موضوع می توان به [٤] رجوع کرد.

---
[١] nearly Kahler manifold
[٢] Cortes
[٣] String theory
[٤] suprsymmetrics
[٥] weak holonomy
[٦] de Wit
[٧] Van Proeyen

برای تشریح ساختار این مقاله ابتدا مفهوم tt^*-کلاف های (متری- سیمپلکتیک[1]) را معرفی می کنیم و یک معادله صریح برای این ساختار هندسی که tt^*- معادله نامیده میشود بیان می کنیم.سپس نگاشت چند همساز[2]

را تعریف می کنیم.سرانجام رابطه ی بین نگاشت های چندهمساز و tt^*- هندسه را که در [۹و۲۶و۲۷و۵] مطالعه شده است را تعمیم می دهیم. ما در اینجا مفهوم نگاشت های چندهمساز از یک خمینه تقریبا مختلط به توی خمینه های شبه- ریمانی تعمیم می دهیم. نگاشت های $\mathbb{S}^1$- چندهمساز را که تعمیمی از مفهوم خانواده وابسته ی یک نگاشت چندهمساز است [۱۱] را به نگاشت های از یک خمینه تقریبا مختلط به توی خمینه های شبه- ریمانی، معرفی می کنیم.در ادامه شرط هایی برای نگاشت ها ی $\mathbb{S}^1$- چندهمساز ارائه می دهیم که تحت آن تبدیل به نگاشتی چندهمساز می شود و به وسیله یک نتیجه نگاشت های چندهمساز تعمیم یافته را به نگاشت های چندهمساز ربط می دهیم. در پایان با این مفاهیم نگاشت های چندهمساز را به ترتیب به توی فضا های $Sp(\mathbb{R}^{2n})/U(p,q)$ و $SO_0(2p,2q)/U(p,q)$ به کلاف های متری و سیمپلکتیک وابسته خواهیم کرد.

این پایاننامه در ٤ فصل به صورت زیر تدوین شده است:

۱- فصل اول: تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۲- فصل دوم: tt^*- هندسه و نگاشت های چندهمساز

۳- فصل سوم: رابطه نگاشت های چندهمساز و نگاشت های همساز

٤- فصل چهارم: نتیجه گیری های جدید

[1] symplectic
[2] Pluriharmonic

این پایاننامه بر اساس مقاله:

tt^* – Geometry on the tangent bundle of an almost complex manifold

می باشد که توسط:

Lars Schafer

نوشته شده است و در

Journal of geometry and physics ٥٧ (٢٠٠٧) ٩٩٩ ١٠١٤

به چاپ رسیده است.

در این پایاننامه tt^*-کلاف های روی کلاف مماس یک خمینه تقریبا مختلط (M,J) را به عنوان خمینه پایه مطالعه می کنیم.در کارهای قبل در مورد tt^*-کلاف ها فقط حالتی را که (M,J) خمینه مختلط بود در نظر گرفته بودیم [٥و٢٦]. مناسب به نظر می رسد که در مطالعه کلاف ها، خمینه های تقریبا مختلط را نیز در نظر بگیریم چون در این صورت خمینه های کاهلر نزدیک[١] با ارتباط لوی- چویتای مسطح به عنوان جوابی از این tt^*- هندسه بدست خواهند آمد. شفر در یک کار مشترک با کورتس[٢] [٦] یک کلاس بندی ساختاری به خمینه های کاهلر نزدیک با ارتباط لوی- چویتای مسطح داده است. دیگر کلاس جالب از جواب ها خمینه های کاهلر مخصوص اند که در [٥] مطالعه شده اند. به عبارت دیگر tt^*-کلاف های روی کلاف مماس یک خمینه تقریبا مختلط (M,J) تعمیم مشترکی از این دو هندسه می باشند. خمینه های کاهلر نزدیک در فیزیک نظریه ریسمان[٣] و ابرتقارن ها[٤] [١٣] ودر ریاضی هولونومی ضعیف[٥]کاربرد دارند (کارهای Gray. A را مقایسه کنید). مفهوم خمینه های کاهلر مخصوص به وسیله دی وایت[٦]و ون روین[٧] [١٠] معرفی شد و منشاء آن در نظریه میدان های ابر- متقارن می باشد. برای یک بررسی در این موضوع می توان به [٤] رجوع کرد.

---

[١] nearly Kahler manifold
[٢] Cortes
[٣] String theory
[٤] suprsymmetrics
[٥] weak holonomy
[٦] de Wit
[٧] Van Proeyen

برای تشریح ساختار این مقاله ابتدا مفهوم tt^*-کلاف های (متری- سیمپلکتیک[۱]) را معرفی می کنیم و یک معادله صریح برای این ساختار هندسی که tt^*- معادله نامیده میشود بیان می کنیم.سپس نگاشت چند همساز[۲]

را تعریف می کنیم.سرانجام رابطه ی بین نگاشت های چندهمساز و tt^*- هندسه را که در [۹و۲۶و۲۷و۵] مطالعه شده است را تعمیم می دهیم. ما در اینجا مفهوم نگاشت های چندهمساز از یک خمینه تقریبا مختلط به توی خمینه های شبه- ریمانی تعمیم می دهیم. نگاشت های $\mathbb{S}^1$- چندهمساز را که تعمیمی از مفهوم خانواده وابسته ی یک نگاشت چندهمساز است [۱۱] را به نگاشت های از یک خمینه تقریبا مختلط به توی خمینه های شبه- ریمانی، معرفی می کنیم.در ادامه شرط هایی برای نگاشت ها ی $\mathbb{S}^1$- چندهمساز ارائه می دهیم که تحت آن تبدیل به نگاشتی چندهمساز می شود و به وسیله یک نتیجه نگاشت های چندهمساز تعمیم یافته را به نگاشت های چندهمساز ربط می دهیم. در پایان با این مفاهیم نگاشت های چندهمساز را به ترتیب به توی فضا های $Sp(\mathbb{R}^{2n})/U(p,q)$ و $SO_0(2p,2q)/U(p,q)$ به کلاف های متری و سیمپلکتیک وابسته خواهیم کرد.

این پایاننامه در ٤ فصل به صورت زیر تدوین شده است:

۱- فصل اول: تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۲- فصل دوم: tt^*- هندسه و نگاشت های چندهمساز

۳- فصل سوم: رابطه نگاشت های چندهمساز و نگاشت های همساز

٤- فصل چهارم: نتیجه گیری های جدید

[۱] symplectic
[۲] Pluriharmonic

فصل اول

تعاریف مقدماتی

۱-۱ خمینه‌های ریمانی

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنیم M یک خمینه هموار (مشتق پذیر) باشد. میدان تانسوری g از نوع (۲و۰) روی Mرا یک متر ریمانی گوییم هرگاه برای هر $p \in M$ و هر X و $Y \in T_pM$ داشته باشیم:

$$g_p(X,Y) = g_p(Y,X) \quad (a)$$

$(b) \quad g_p(X,X) \geq 0$ و تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم $X = 0$.

که در آن $g_p = g|_p$. به عبارت دیگر g_p متقارن و معین مثبت باشد. در این صورت زوج (M,g) را یک خمینه ریمانی گوییم.

هرگاه شرط (a) برقرارباشد و بجای (b) داشته باشیم:

(c) اگر $g_p(X,Y) = 0$ برای هـــر $X \in T_pM$ ایجاب کند $Y = 0$ در این صورت متـر g را شبه- ریمانی و (M,g) را خمینه شبه – ریمانی گوییم.

تعریف ۱-۱-۲ فرض کنیـم M و N دو خمیـنه ریمانی باشند. دیفیومورفسیم $f : M \to N$ را ایزومتری گویند هرگاه داشته باشیم: $g(X,Y)_p = g(df_p(X), df_p(Y))_{f(p)}$ برای هر $p \in M$ و $Y \in T_pM$ و X که g متر ریمانی روی M می باشد.

تعریف ۱-۱-۳ فرض کنید $f : M^n \to N^{n+k}$ یک غوطه‌وری باشد. اگر g یک متر ریمانی روی N باشد f یک متر ریمانی روی M به صورت زیر القا می‌کند:

$$h_p(X,Y) = g_{f(p)}(df_p(X), df_p(Y))$$

که $h_p(\cdot,\cdot)$ را متر القائی توسط f روی M و fرا یک غوطه‌وری ایزومتری می‌نامند.

تعریف ۱-۱-٤ یک ارتباط آفین روی یک خمینه مشتق پذیر عبارتست از نگاشت مشتق پذیر

$$\nabla : \chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

که با نماد $(X,Y)\xrightarrow{\nabla}\nabla_X Y$ نشان داده می‌شود و در خواص زیر صدق می‌کند:

$$\nabla_{fX+gY}=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z \quad (i)$$

$$\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z \quad (ii)$$

$$.\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+X(f)Y \quad (iii)$$

برای هر $X,Y,Z\in\chi(M)$ و $f,g\in D(M)$.که در آن $\chi(M)$ مجموعه همه میدان های برداری C^∞ و $D(M)$ حلقه توابع حقیقی مقدار C^∞ روی M می باشند.

تعریف ۱-۱-۵ فرض کنید T یک تانسور از مرتبه p باشد. مشتق کوواریان ∇T از T تانسوری است از مرتبه $(p+1)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla T(Y_1,\ldots,Y_p,X)=X(T(Y_1,\ldots,Y_p))-T(\nabla_X Y_1,Y_z,\ldots,Y_p)-\ldots-T(Y_1,\ldots,\nabla_X Y_p)$$

برای هر $Y_1,\ldots,Y_p\in\chi(M)$ و X. همچنین برای هر $X\in\chi(M)$ مشتق کوواریان $\nabla_X T$ از T نسبت به X تانسوری است ازمرتبه p که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$.\nabla_X T(Y_1,\ldots,Y_p)=\nabla T(Y_1,\ldots,Y_p,X)$$

تعریف ۱-۱-۶ میدان تانسوری T را نسبت به ارتباط ∇ متوازی گویند هر گاه $\nabla T=0$.

تعریف ۱-۱-۷ فرض کنید (M,g) یک خمینه (شبه-) ریمانی و ∇ یک ارتباط آفین روی آن باشد. تانسورهای T^∇ از نوع $(1,2)$ با $T^\nabla(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$ و R^∇ از نوع $(1,3)$ را با $R^\nabla(X,Y)Z=[\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z$ برای هر $X,Y,Z\in TM$ به ترتیب تانسورهای تاب و انحنای ∇نامند. هر گاه $T^\nabla=0$ ارتباط ∇را بدون تاب و اگر $R^\nabla=0$آن‌را مسطح گویند.

قضیه ۱-۱-۱ فرض کنید (M,g) یک خمینه (شبه-) ریمانی باشد. آنگاه یک ارتباط آفین منحصر بفرد ∇ روی M وجود دارد که در شرایط (سازگاری) زیر صدق می‌کند:

(a) $T^{\nabla}=0$ یعنی ∇ متقارن یا بدون تاب است.

(b) $\nabla g=0$ یعنی ∇ با متر سازگار است.

اثبات: به [۸] قضیه ۶.۳ صفحه ۵۵ رجوع شود.

تعریف ۱-۱-۸ فرض کنید (M,g) یک خمینه ریمانی باشد. منحنی $c:I\rightarrow M$ را در $t_0\in I$ ژئودزیک گویند هرگاه داشته باشیم: $\nabla_{\frac{dc}{dt}}\left(\frac{dc}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}=0$. هر گاه c در هر نقطه $t\in I$ ژئودزیک باشد گوئیم c بر I ژئودزیک است.

فرض کنیم M یک خمینه $n-$ بعدی غوطه‌ور در خمینه (شبه) ریمانی N از بعد $n+k$ با غوطه‌وری $f:M\rightarrow N$ باشد. برای هر $p\in M$ بردار $v\in T_pM$ را با $df_p(v)\in T_{f(p)}N$ یکی می‌گیریم با این متحدسازی برای هر نقطه $p\in M$ ضرب داخلی روی T_pN، آنرا به جمع مستقیم $T_pN=T_pM\oplus T_p^{\perp}M$ که در آن $T_p^{\perp}M$ متمم قائم T_pM در T_pN می باشد تجزیه می کند. اگر $v\in T_pN$ می‌توانیم بنویسیم $v=v^T+v^N$ که در آن $v^T\in T_pM$ و $v^N\in T_p^{\perp}M$.

اگر $\overline{\nabla}$ ارتباط ریمانی روی N باشد و ارتباط القاء شده توسط $\overline{\nabla}$ روی T_pM را با $\nabla=\overline{\nabla}^T$ و ارتباط القائی روی $T_p^{\perp}M$ را با $\nabla^{\perp}$ نشان دهیم و تعریف کنیم:

$$\alpha(X,Y)=\overline{\nabla}^{\perp}{}_X Y \quad \text{با} \quad \alpha:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi^{\perp}(M)$$

$A:\chi(M)\times\chi^{\perp}(M)\to\chi(M)$ با $g(\alpha(X,Y),\xi)=g(A_{\xi}(X),Y)$ $Y\in\chi(M)$

برای هر X و $\xi\in\chi^{\perp}(M)$ که α را فرم اساسی دوم نامند.

تعریف ۱-۱-۹ فرض کنید $f:M\to N$ یک (شبه) غوطه‌وری ایزومتری باشد. f را کلاً - ژئودزیک گویند هر گاه $\alpha\equiv 0$.

۱-۲ خمینه‌های مختلط

تعریف ۱-۲-۱ یک ساختار مختلط روی یک فضای برداری V عبارتست از یک درون-ریختی $J:V\to V$ به طوری که $J^2=-1$ که 1 تبدیل همانی V را نشان می‌دهد. یک فضای برداری حقیقی V با یک ساختار مختلط را می‌توان به یک فضای برداری مختلط بوسیله تعریف ضرب اسکالر اعداد به صورت $(a+ib)X=aX+bJX$ برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ تبدیل کرد.

واضح است که بعد حقیقی V، m باید زوج باشد و $\frac{1}{2}m$ بعد مختلط V می باشد.

برعکس، فرض کنیم V یک فضای برداری مختلط V از بعد مختلط n باشد، فرض کنیم J درون ریختی خطی روی V تعریف شده با ضابطه‌ی $JX=iX$ برای هر $X\in V$ باشد. اگر V را بعنوان یک فضای برداری حقیقی از بعد حقیقی $2n$ در نظر بگیریم آنگاه J یک ساختار مختلط روی V است.

قضیه ۱-۲-۱ فرض کنیم J یک ساختار مختلط روی یک فضای برداری حقیقی $2n$- بعدی V باشد. آنگاه اعضایی از V مانند $X_1,\dots,X_n$ چنان موجودند که $\{X_1,\dots,X_n,JX_1,\dots,JX_n\}$ یک پایه برای V است.

اثبات: به [۱۶] گزاره ۱.۱ صفحه ۱۱٤ رجوع شود.

قضیه ۱-۲-۲ فرض کنیم J و J' ساختارهای مختلط روی فضاهای برداری حقیقی V و V' باشند. اگر V و V' را بعنوان فضاهای برداری مختلط در نظر بگیریم. آنگاه نگاشت خطی حقیقی $f:V\to V'$ به طور مختلط خطی است اگر و فقط اگر $J'of = foJ$.

اثبات: به [١٦] گزاره ١.٢ صفحه ١١٥رجوع شود.

مثال ۱-۲-۱ گروه خطی عمومی مختلط $GL(n,\mathbb{R})$ را می‌توان با زیر گروهی از $GL(2n,\mathbb{R})$شامل همه ماتریس هایی که با $J_0=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ جابجایی می‌شوند متحد کرد.

با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که این نمایش از $GL(n,\mathbb{C})$بتوی $GL(2n,\mathbb{R})$ که نمایش حقیقی $GL(n,\mathbb{C})$نامیده می‌شوند بوسیله نگاشت زیر داده می‌شود:

$$A+iB \to \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

که A و B ماتریس $n\times n$ حقیقی می‌باشند.

قضیه ۱-۲-۳ یک تناظر یک به یک بین مجموعه ساختارهای مختلط روی $\mathbb{R}^{2n}$ وفضای همگن $GL(2n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{C})$ وجود دارد.این نمایش برای هر $S\in GL(2n,\mathbb{R})$ متناظر با ساختار مختلط SJ_0S^{-1} که در آن J_0 ساختار مختلط کانونی روی $\mathbb{R}^{2n}$ می باشد.

اثبات: به [١٦] گزاره ١.٣ صفحه ١١٦رجوع شود.

قضیه ۱-۲-٤ فرض کنید J یک ساختار مختلط روی یک فضای برداری حقیقی V باشد. آنگاه زیر فضای V' از Vتحت J پایاست اگر و فقط اگر V' یک زیر فضای مختلط V باشد وقتی که V بعنوان یک فضای برداری مختلط در نظر گرفته شود.

اثبات: به [١٦] گزاره ١.٤ صفحه ١١٦رجوع شود.

تعریف ۱-۲-۲ فرض کنیم Vیک فضای برداری $m-$ بعدی و $V^{\mathbb{C}}$ مختلط سازی شده Vباشد یعنی $V^{\mathbb{C}}=V\otimes_R\mathbb{C}$. آنگاه Vیک زیر فضای حقیقی $V^{\mathbb{C}}$ است. در حالت کلی‌تر فضـــای تانسوری $T_q^p(V)$ از نوع (p,q) روی V می‌توانند به عنوان یک زیرفضـای حقیقی از فضای تانسوری $T_q^p(V^{\mathbb{C}})$ در نظر گرفته شود. مختلط مزدوج در $V^{\mathbb{C}}$ یک درون ریختی حقیقی به صورت $Z=X+iY\to\bar{Z}=X-iY$ برای $X,Y\in V$ تعریف می‌کند. فرض کنیم V یک فضای بردرای حقیقی $2m-$ بعدی و J یک ساختار مختلط روی آن باشد در این صورت J می‌تواند به طور منحصر بفردی به یک درون ریختی خطی مختلط از $V^{\mathbb{C}}$ توسیع. داده شود و $J^2=-1$. بنابراین مقادیر ویژه J عبارتند از $\pm i$. قرار می‌دهیم:

$V^{1,0}=\{Z\in V^{\mathbb{C}};JZ=iZ\}$ و $V^{0,1}=\{Z\in V^{\mathbb{C}};JZ=-iZ\}$ در این صورت داریم:

قضیه ۱-۲-۵

(آ) $V^{1,0}=\{X-iJX;X\in V\}$ و $V^{0,1}=\{X+iJX;X\in V\}$

(ب) $V^{\mathbb{C}}=V^{1,0}\oplus V^{0,1}$

(ج) مزدوج مختلط یک ایزومورفسیم خطی حقیقی بین $V^{1,0}$ و $V^{0,1}$ ایجاد می‌کند.

اثبات: به [۱٦] گزاره ۱.۵ صفحه ۱۱۷رجوع شود.

اگر فرض کنیم $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای برداری حقیقی $2m-$ بعدی با یک ضرب اسکالر باشد آنگاه دوگان V را با V^* نشان می‌دهیم. هرگاه J یک ساختار مختلط روی V باشد آنگاه ساختار مختلط J روی V یک ساختار مختلط روی V^* که آنرا هم با J نشان می‌دهیم به صورت زیر القاء می‌کند $\langle JX,X^*\rangle=\langle X,JX^*\rangle$ که $X\in V$ و $X^*\in V^*$. حال اگر مختلط-سازی شده V^* را با $V^{*\mathbb{C}}$ نشان بدهیم داریم: $V^{*\mathbb{C}}=V_{1,0}\oplus V_{0,1}$.

قضیه ۱-۲-۶

$$V_{1,0}=\left\{X^{*}\in V^{*\mathbb{C}}:\left\langle X,X^{*}\right\rangle=0 \quad \forall X\in V^{0,1}\right\} \quad (i)$$

$$V_{0,1}=\left\{X^{*}\in V^{*\mathbb{C}}:\left\langle X,X^{*}\right\rangle=0 \quad \forall X\in V^{1,0}\right\} \quad (ii)$$

اثبات: به [۱٦] گزاره ۱.٦ صفحه ۱۱۷رجوع شود.

حال اگر جبر خارجی $\wedge V_{1,0}$ و $\wedge V_{0,1}$ را به عنوان زیر جبرهایی از $\wedge V^{*\mathbb{C}}$ در نظر بگیریم. $\wedge^{p,q}V^{*\mathbb{C}}$ را بعنوان زیر فضایی از $\wedge V^{*\mathbb{C}}$ نشان داده که بوسیله $\alpha\wedge\beta$ تولید شده اند که $\alpha\in\wedge^{p}V_{1,0}$ و $\beta\in\wedge^{q}V_{0,1}$ و لذا داریم:

قضیه ۱-۲-۷ جبر خارجی $\wedge V^{*\mathbb{C}}$ می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود

$$\wedge V^{*\mathbb{C}}=\sum_{r=0}^{n}\wedge^{r}V^{*\mathbb{C}} \text{ با } \wedge^{r}V^{*\mathbb{C}}=\sum_{p+q=r}\wedge^{p,q}V^{*\mathbb{C}}$$

و مزدوج مختلط در $V^{*\mathbb{C}}$ توسیع یافته به $\wedge V^{*\mathbb{C}}$،یک ایزومورفیسم خطی حقیقی بین $\wedge^{p,q}V^{*\mathbb{C}}$ و $\wedge^{p,q}V^{*\mathbb{C}}$ ایجاد می‌کند.

اثبات: به [۱٦] گزاره ۱.۷ صفحه ۱۱۷رجوع شود.

تعریف ۱-۲-۳ یک ضرب هرمیتی روی یک فضای برداری حقیقی V با ساختار مختلط J عبارت است از یک ضرب داخلی h به طوری که $h(JX,JY)=h(X,Y)$ برای هر $X\in V$.

بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود که برای هر $X\in V$ داریم $h(JX,X)=0$.

قضیه ۱-۲-۸ فرض کنید h یک ضرب داخلی هرمیتی در یک فضای برداری $2n-$ بعدی V با ساختار مختلط Jباشد. آنگاه اعضایی از V مانند $X_1,\ldots,X_n$ چنان وجود دارند که $\{X_1,\ldots,X_n,JX_1,\ldots,JX_n\}$ پایه‌ای متعامد برای V نسبت به ضرب داخلی h می‌باشد.

اثبات به [١٦] گزاره ١.٨ صفحه ١١٨رجوع شود.

تعریف ١-٢-٤ فرض کنید M یک خمینه مشتق پذیر حقیقی باشد. یک ساختار تقریباً مختلط روی M عبارتست از یک میدان تانسوری $(1,1)$ روی M مانند J به طوری که در هر نقطه $p\in M$ داشته باشیم $J_p^2=-1$ که 1 درون ریختی همانی روی T_pM است. خمینه M همراه با ساختار تقریباً مختلط J را یک خمینه تقریباً مختلط می نامند و با (M,J) نشان می‌دهیم.

قضیه ١-٢-٩ هر خمینه تقریباً مختلط (M,J) دارای بعد زوج و جهت پذیر است.

اثبات: به [١٦] گزاره ٢.١ صفحه ١٢١رجوع شود.

تعریف ١-٢-٥ نگاشت $F=f+ig:U\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ را هولومورفیک نامند اگر در شرط کوشی- ریمان صدق کند یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}.$$

اگر $\mathbb{C}^n$ را با $\mathbb{R}^{2n}$ بوسیله $(z_1,\dots,z_m)\to(x_1+iy_1,\dots,x_m+iy_m)$ متحد کنیم و درون- ریختی $j_m=\begin{pmatrix}0 & I_m\\ -I_m & 0\end{pmatrix}$ را از $\mathbb{R}^{2m}$ در نظر بگیریم آنگاه نگاشت $F:U\subset\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2m}$ هولومورفیک است اگر و فقط اگر F_* از F بعنوان نگاشت حقیقی $F:U\subset\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2m}$ درمعادله $j_m\circ(F_*)_p=(F_*)_p\circ j_n$ برای $p\in M$ با $j_n=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$ صادق باشد. یعنی F حافظ ساختار مختلط باشد. عکس این مطلب نیز صحیح است.

اگر (M,J) یک خمینه تقریباً مختلط باشد از قضیه (١-٢-٤) می‌دانیم که $T_X^{\mathbb{C}}=T_X^{1,0}M\oplus T_X^{0,1}M$ که $T_X^{1,0}M$ و $T_X^{0,1}M$ ویژه فضاهای J متناظر با مقادیره ویژه به

ترتیب $+i$ و $-i$ می‌باشند یک میدان برداری مماس مختلط از نوع $(1,0)$(به ترتیب $(0,1)$) است اگر متعلق به $T_X^{1,0}M$ (به ترتیب $T_X^{0,1}M$) باشد. با استفاده از قضیه (۱-۲-۵) داریم:

قضیه ۱-۲-۱۰ یک بردار مماس مختلط Z از یک خمینه تقریباً مختلط (M,J) از نوع $(1,0)$ (به ترتیب $(0,1)$) می‌باشد اگر و فقط اگر $Z=X-iJX$ (به ترتیب $Z=X+iJX$) برای بردار مماس حقیقی X.

اثبات: به [١٦] گزاره ۲.٦ صفحه ۱۲۵رجوع شود.

با استفاده از قضیه (۱-۲-۵) اگر فضای فرم‌های دیفرانسیلی مختلط روی یک خمینه $2n$-بعدی (M,J)را با $A=A(M)$ نشان دهیم داریم:

$A=\sum_{p,q=0}^{n}A^{p,q}$، که اعضای $A^{p,q}$ را فرم مختلط از درجه (p,q) نامند.

قضیه ۱-۲-۱۱ اگر $A^{p,q}$ فضای فرم‌های از درجه (p,q) روی خمینه تقریباً مختلط (M,J) باشد آنگاه $dA^{p,q}\subset A^{p+2,q-1}+A^{p+1,q}+A^{q,p+1}+A^{p-1,q+2}$.

اثبات: به [١٦] گزاره ۲.۷ صفحه ۱۲۵رجوع شود.

قضیه ۱-۲-۱۲ برای هر خمینه تقریباً مختلط (M,J) شرایط زیر معادلند.

(a) اگر Z و W میدان‌های برداری مختلط از نوع $(1,0)$باشند آنگاه $[Z,W]$ نیز از نوع $(1,0)$است.

(b) اگر Z و W میدان‌های برداری مختلط از نوع $(0,1)$ باشند آنگاه $[Z,W]$ نیز از نوع $(0,1)$است.

(c) $dA^{1,0}\subset A^{2,0}+A^{1,1}$ و $dA^{0,1}\subset A^{1,1}+A^{0,2}$