

دانشکده فنی مهندسی مکانیک

گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

عنوان

# تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر با ترک خستگی

استاد راهنما

دکتر موسی رضائی

استاد مشاور

دکتر محمد زهساز

پژوهشگر

هادی فکرمندی

مهر ۱۳۸۸

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیر و تشکر:

از پروردگار بی‌همتا،

پدر دلسوز و مادر مهربانم،

استاد بزرگوارم دکتر رضائی،

دوستان و همکلاسی‌های عزیزم،

و تمامی عزیزانی که به هر نحو مرا در انجام این پایان‌نامه یاری رسانده‌اند،

از صمیم قلب متشکرم.

نام خانوادگی دانشجو: فرمندی	نام : هادی
عنوان پایان نامه: تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر با ترک خستگی	
<p>استاد راهنما: دکتر موسی رضائی</p> <p>استاد مشاور: دکتر محمد زهساز</p>	
<p>مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد      رشته: مهندسی مکانیک      گرایش: طراحی کاربردی      دانشگاه: تبریز</p> <p>دانشکده: فنی مهندسی مکانیک      تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۸/۷/۱      تعداد صفحه: ۹۵</p>	
کلید واژه‌ها: تیر ترک‌دار، ترک خستگی، رفتار غیرخطی، روش اغتشاشات.	
<p><b>چکیده:</b></p> <p>ترک‌های خستگی یک عامل اصلی از کارافتادگی سازه‌ها می‌باشند. به منظور پیش‌گیری از این‌گونه خرابی، محققان بسیاری تحقیقات جامعی را به منظور توسعه روش‌های تست غیرمخرب انجام داده‌اند. مطالعات نشان می‌دهد که پاسخ دینامیکی سازه سالم و سازه معیوب متفاوتند و از این تفاوت بر اساس مدلی از سازه معیوب می‌توان برای تشخیص پارامترهای عیب ( عمق و موقعیت ترک ) استفاده کرد. بسیاری از این مطالعات بر اساس مدل‌های خطی ترک انجام شده‌اند. در این مدل‌ها ترک در سازه به صورت یک شیار همیشه باز در نظر گرفته می‌شود. با این وجود تحقیقات مختلفی که در طول دهه‌های اخیر صورت گرفته است نشان می‌دهد که ترک خستگی واقعی در هنگام ارتعاش باز و بسته می‌شود که این امر موجب می‌شود که پاسخ دینامیکی سازه غیرخطی باشد. مشخصه اصلی چنین رفتاری حضور مؤلفه‌های سوپرهارمونیک در پاسخ دینامیکی سازه معیوب است. از سوی دیگر روش‌های عیب‌یابی خطی که بر اساس مدل‌های ترک باز انجام می‌شوند، حساسیت کمی نسبت به حضور ترک‌های خستگی دارند. اخیراً با توجه به این امر تلاش‌های بسیاری به منظور تحلیل ارتعاش سازه‌های معیوب بر اساس مدل‌های باز و بسته شونده ترک صورت پذیرفته است. این در حالی است که به دلیل تغییر پارامترهای سیستم در هنگام ارتعاش که از رفتار غیرخطی سیستم نشأت می‌گیرد، عمده تحقیقات صورت گرفته در این زمینه بر اساس روش‌های عددی یا المان محدود انجام شده است.</p>	

## ادامه چکیده پایان‌نامه:

در این پژوهش، غیرخطی ارتعاشات آزاد یک تیر یکسرگیردار دارای ترک خستگی از یک دیدگاه تحلیلی و با استفاده از روش اغتشاشات مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا، بر اساس هر دو مدل اصلی موجود در این زمینه، ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار در مود اول ارتعاشی به صورت یک سیستم یک درجه آزادی با جرم، میرایی و سفتی معادل مدل‌سازی شده است. مدل جدیدی برای سفتی دوخطی تیر با ترک باز و بسته شونده ارائه شده است. سپس با استفاده از این مدل و توسط عملیات ریاضی معادله دیفرانسیل حاکم بر هر دو مدل به شکل استاندارد قابل تحلیل به روش اغتشاشات نوشته شده است. نتایج نشان می‌دهد که پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات از دو قسمت تشکیل شده است. بخش اصلی پاسخ، پاسخ سیستمی با میانگین سفتی‌های معادل سیستم در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک است. این سیستم در اصطلاح سیستم خطی متناظر نامیده می‌شود. بخش دیگر از جملات تصحیحی تشکیل یافته است که اثرات باز و بسته شده ترک را در پاسخ منظور می‌کنند. در حقیقت جملات تصحیحی شامل مؤلفه‌های سوپرهارمونیک موجود در پاسخ سازه معیوب هستند. بنابراین در تحقیق حاضر رابطه تحلیلی بین دامنه مؤلفه‌های سوپرهارمونیک از یک سو و پارامترهای ترک و مشخصه‌های سیستم از سوی دیگر استخراج شده است.

## فهرست مطالب

مقدمه	۱
۱- پیشینه پژوهش	۳
۱-۱- مدل‌های ترک باز	۳
۱-۱-۱- مدل تیر کوتاه	۳
۱-۱-۲- مدل مدول یانگ و ممان اینرسی کاهش یافته	۵
۱-۱-۳- مدل مکانیک شکست	۵
۱-۲- مدل‌های ترک باز و بسته شونده	۷
۲- مبانی و روش‌ها	۲۰
۱-۲- تحلیل کیفی سیستم‌های غیرخطی	۲۰
۲-۲- تحلیل کمی سیستم‌های غیرخطی	۲۶
۱-۲-۲- روش بسط سراسر	۲۷
۲-۲-۲- شرایط اولیه	۲۸
۲-۲-۳- جملات سکولار	۳۰
۲-۲-۴- روش لیندست پوانکاره	۳۱
۲-۲-۵- روش مقیاس‌های چندگانه	۳۵

۴۰	۳-۲- مدل یک درجه آزادی تیر یکسر گیردار ترک‌دار
۴۰	۳-۲-۱- مدل ریاضی تیر اولر- برنولی
۴۴	۳-۲-۲- مدل هارمونیک ساده
۴۸	۳-۳-۳- مدل نوسانگر دوخطی
۵۰	۴-۲- ارائه روش حل برای معادله دیفرانسیل حاکم
۵۰	۴-۲-۱- تحلیل مدل هارمونیک ساده به روش مقیاس‌های چندگانه
۵۶	۴-۲-۲- تحلیل مدل نوسانگر دوخطی به روش لیندست- پوانکاره
۵۶	۴-۲-۱- ارائه مدل جدید برای سفتی دوخطی تیر ترک‌دار
۵۷	۴-۲-۲- استخراج پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم به روش لیندست- پوانکاره
۶۳	۳- نتایج و بحث
۶۳	۳-۱- نتایج به دست آمده از تحلیل مدل هارمونیک ساده به روش مقیاس‌های چندگانه
۷۲	۳-۲- به دست آمده از تحلیل مدل سفتی دوخطی به روش لیندست- پوانکاره
۸۲	۳-۳- بحث و نتیجه‌گیری
۸۴	منابع
۸۹	ضمائم

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱- مدل تیر کوتاه [۵] . . . . . ۴
- شکل ۲-۱- تیر دو سر مفصل ترک‌دار در حالت‌های الف- ترک تحت فشار و ب- ترک تحت کشش [۱۵] . . . . . ۸
- شکل ۳-۱- پاسخ میرای ارتعاشات آزاد مدل فریسول و پنی [۱۵] . . . . . ۹
- شکل ۴-۱- طیف فرکانسی پاسخ ارتعاشات آزاد مدل دوخطی فریسول و پنی [۱۵]. . . . . ۹
- شکل ۵-۱- پاسخ ارتعاشات مدل دوخطی فریسول و پنی تحت تحریک هارمونیک [۱۵]. . . . . ۱۰
- شکل ۶-۱- پاسخ در حوزه فرکانس مود اول ارتعاشی تیر در اطراف فرکانس طبیعی برای تیر الف- سالم و (ب) معیوب [۱۶] . . . . . ۱۲
- شکل ۷-۱- پاسخ در حوزه فرکانس مود اول ارتعاشی تیر در اطراف فرکانس تحریک برای تیر الف- سالم و (ب) معیوب [۱۶] . . . . . ۱۲
- شکل ۸-۱- تغییر نسبت فرکانس ارتعاشات عرضی یک تیر ترک‌دار به تیر سالم ( $\omega/\omega_{\text{intact beam}}$ ) به صورت تابعی از عمق نسبی ترک ( $a/b$ ) در مدل ترک باز (----) و مدل ترک باز و بسته شونده (—) [۳۱] . . . . . ۱۷
- شکل ۱-۲- نمودار تابع پتانسیل  $F(x)$  در حالت صعودی یکنوا و منحنی‌های سطح ( $T_i$ ها) متناظر با سطوح مختلف انرژی مکانیکی ( $h_i$ ها) . . . . . ۲۲
- شکل ۲-۲- نمودار تابع پتانسیل  $F(x)$  و منحنی‌های سطح ( $T_i$ ها) متناظر با سطوح مختلف انرژی مکانیکی ( $h_i$ ها) حول نقطه زینی . . . . . ۲۳
- شکل ۳-۲- نمودار تابع پتانسیل  $F(x)$  و منحنی‌های سطح ( $T_i$ ها) متناظر با سطوح مختلف انرژی مکانیکی ( $h_i$ ها) حول نقطه تعادل پایدار. . . . . ۲۴
- شکل ۴-۲- تیر یکسرگیردار با سطح مقطع مستطیلی یکنواخت . . . . . ۴۱
- شکل ۵-۲- معادله فرکانسی مدل تیر اولر- برنولی یکسرگیردار . . . . . ۴۳
- شکل ۶-۲- فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نرمال برای سه مود اول ارتعاشی تیر یکسرگیردار . . . . . ۴۴
- شکل ۷-۲- تیر ترک‌دار یکسرگیردار و مدل یک‌درجه‌آزادی معادل [۳۱]. . . . . ۴۴



- شکل ۲-۸- نمودار تغییرات سفتی معادل تیر ترک‌دار بر حسب زمان [۳۱]. . . . . ۴۵
- شکل ۲-۹- مقایسه شکل مود اول تیر یکسرگیردار به دست آمده از حل تحلیلی معادلات حرکت تیر اولر- برنولی (—) و تابع تقریبی پیشنهاد شده در مرجع [۳۷] (---) . . . . . ۴۶
- شکل ۲-۱۰- تیر یکسرگیردار ترک‌دار و مدل یک‌درجه آزادی معادل [۱۶]. . . . . ۴۸
- شکل ۲-۱۱- نمودار دوخطی بار- جایجایی تیر ترک‌دار با ترک خستگی. . . . . ۴۹
- شکل ۳-۱- پاسخ ارتعاشات آزاد میرای به دست آمده به روش اغتشاشات (---) و پاسخ به دست آمده به روش عددی رانگ- کوتا (—) برای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0.9$  . . . . . ۶۳
- شکل ۳-۲- (الف) پیک‌های بالایی جمله اول (ب) جمله تصحیح و (ج) پیک‌های پایینی جمله اول پاسخ اغتشاشات (---) و پاسخ به روش عددی رانگ- کوتا (—)، به ازای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0.9$  . . . . . ۶۴
- شکل ۳-۳- (الف) پیک‌های بالایی و (ب) پیک‌های پایینی پاسخ نهایی به دست آمده به روش اغتشاشات (---) و پاسخ به روش عددی رانگ- کوتا (—)، برای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0.9$  . . . . . ۶۵
- شکل ۳-۴- مقایسه پیک‌های پایینی جمله اول پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات (---) و پاسخ نهایی به دست آمده به روش عددی رانگ- کوتا (—)، برای موقعیت نسبی  $\beta = 0.9$  و عمق‌های نسبی ترک (الف)  $\alpha = 0.3$  (ب)  $\alpha = 0.5$  و (ج)  $\alpha = 0.7$  . . . . . ۶۵
- شکل ۳-۵- جمله تصحیح پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات برای موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.9$  و عمق‌های نسبی (الف)  $\alpha = 0.3$  (ب)  $\alpha = 0.5$  و (ج)  $\alpha = 0.7$  . . . . . ۶۶
- شکل ۳-۶- جمله تصحیح پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات برای عمق نسبی ترک  $\alpha = 0.5$  و موقعیت‌های نسبی (الف)  $\beta = 0.3$  (ب)  $\beta = 0.6$  و (ج)  $\beta = 0.9$  . . . . . ۶۷
- شکل ۳-۷- طیف فرکانسی پاسخ حل اغتشاشات برای عمق نسبی ترک  $\alpha = 0.5$  در موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.6$  . . . . . ۶۸
- شکل ۳-۸- طیف فرکانسی پاسخ حل اغتشاشات برای عمق نسبی ترک  $\alpha = 0.7$  در موقعیت نسبی  $\beta = 0.6$  . . . . . ۶۸
- شکل ۳-۹- طیف فرکانسی پاسخ حل اغتشاشات برای عمق نسبی ترک  $\alpha = 0.7$  موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.9$  . . . . . ۶۹
- شکل ۳-۱۰- نسبت مؤلفه سوپرهارمونیک بر جمله اول پاسخ بر حسب عمق نسبی ترک در موقعیت سبی  $\beta = 0.9$  . . . . . ۶۹
- شکل ۳-۱۱- نسبت مؤلفه سوپرهارمونیک بر جمله اول پاسخ بر حسب موقعیت نسبی ترک در عمق نسبی  $\alpha = 0.5$  . . . . . ۷۰
- شکل ۳-۱۲- نسبت مؤلفه سوپرهارمونیک بر جمله اول پاسخ اغتشاشات بر حسب عمق و موقعیت نسبی ترک . . . . . ۷۰

شکل ۳-۱۳- تغییر فرکانس طبیعی سیستم با فرض ترک باز (---) و فرض ترک باز و بسته شونده (—) بر حسب

عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۱

شکل ۳-۱۴- تغییر فرکانس طبیعی سیستم با فرض ترک باز (---) و فرض ترک باز و بسته شونده (—) بر حسب

موقعیت نسبی ترک برای عمق نسبی  $\alpha = 0.5$  . . . . . ۷۱

شکل ۳-۱۵- پاسخ نامیرای ارتعاشات آزاد به دست آمده به روش اغتشاشات (---) و پاسخ به دست آمده به روش

عددی رانگ- کوتا (—) برای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۲

شکل ۳-۱۶- (الف) پیک‌های بالایی پاسخ سیستم خطی متناظر (ب) جمله تصحیح مرتبه اول و (ج) پیک‌های پایینی

پاسخ سیستم خطی متناظر (---) و پاسخ به دست آمده به روش عددی رانگ- کوتا (—)، برای  $\alpha = 0.5$

و  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۳

شکل ۳-۱۷- (الف) پیک‌های بالایی و (ب) پیک‌های پایینی پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره پس از اعمال

تصحیح مرتبه اول (---) و پاسخ به دست آمده به روش عددی رانگ- کوتا (—)، برای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0.9$  . ۷۴

شکل ۳-۱۸- مقایسه پیک‌های پایینی پاسخ سیستم خطی متناظر (---) و پاسخ نهایی به دست آمده به روش عددی

رانگ- کوتا (—) برای موقعیت نسبی  $\beta = 0.9$  و عمق‌های نسبی ترک (الف)  $\alpha = 0.3$  (ب)  $\alpha = 0.5$  و (ج)  $\alpha = 0.7$

. . . . . ۷۴

شکل ۳-۱۹- جمله تصحیح مرتبه اول پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره برای موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.9$

و عمق‌های نسبی (الف)  $\alpha = 0.3$  (ب)  $\alpha = 0.5$  و (ج)  $\alpha = 0.7$  . . . . . ۷۵

شکل ۳-۲۰- جمله تصحیح پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره برای عمق نسبی ترک  $\alpha = 0.5$  و موقعیت‌های

نسبی (الف)  $\beta = 0.3$  (ب)  $\beta = 0.6$  و (ج)  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۶

شکل ۳-۲۱- جمله تصحیح مرتبه دوم پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره برای موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.6$

و عمق‌های نسبی (الف)  $\alpha = 0.3$  (ب)  $\alpha = 0.5$  و (ج)  $\alpha = 0.7$  . . . . . ۷۶

شکل ۳-۲۲- جمله تصحیح پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات برای عمق نسبی ترک  $\alpha = 0.5$  و موقعیت‌های نسبی

(الف)  $\beta = 0.3$  (ب)  $\beta = 0.6$  و (ج)  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۷

شکل ۳-۲۳- طیف فرکانسی پاسخ پس از اعمال جمله تصحیح مرتبه اول در پاسخ اغتشاشات برای عمق نسبی ترک

$\alpha = 0.7$  و موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۸

شکل ۳-۲۴- طیف فرکانسی پاسخ پس از اعمال جملات تصحیح مرتبه اول و مرتبه دوم در پاسخ اغتشاشات برای عمق

نسبی ترک  $\alpha = 0.7$  و موقعیت نسبی ترک  $\beta = 0.9$  . . . . . ۷۸

شکل ۳-۲۵- تغییرات پارامترهای  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{E}^2$  به صورت تابعی از عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی  $\beta = 0.9$  . . . ۷۹

شکل ۳-۲۶- نسبت تغییرات پارامترهای  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{E}^2$  به صورت تابعی از موقعیت نسبی ترک در عمق نسبی  $\alpha = 0.5$  . ۸۰

شکل ۳-۲۷- تغییر فرکانس طبیعی سیستم در مدل ترک باز (---) و در مدل ترک باز و بسته شونده (—) بر

حسب عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی  $\beta = 0.9$  . . . . . ۸۱

شکل ۳-۲۸- تغییر فرکانس طبیعی سیستم در مدل ترک باز (---) و در مدل ترک باز و بسته شونده (—) بر حسب

موقعیت نسبی ترک برای عمق نسبی  $\alpha = 0.5$  . . . . . ۸۱

## فهرست اختصارات

$A$	دامنه ارتعاش
$A_c$	سطح ترک
$A_n$	ضرایب سری دامنه
$C$	ماتریس انعطاف پذیری
$D_n$	مشتق نسبت به متغیرهای جدید در روش مقیاس‌های چندگانه
$E$	مدول الاستیسیته
$F$	تابع پتانسیل
$I$	ممان اینرسی سطح مقطع تیر
$J$	نرخ آزاد شدن انرژی کرنشی
$K_I$	ضریب شدت تنش برای مود اول شکست
$K_{II}$	ضریب شدت تنش برای مود دوم شکست
$K_{III}$	ضریب شدت تنش برای مود سوم شکست
$L$	طول تیر
$S$	مساحت سطح مقطع تیر
$T$	انرژی جنبشی
$T_n$	متغیرهای جدید در روش مقیاس‌های چندگانه
$V$	انرژی پتانسیل
$Y(x)$	بخش زمانی پاسخ ارتعاشات تیر اولر-برنولی
$Z(t)$	بخش زمانی پاسخ ارتعاشات تیر اولر-برنولی
$a$	عمق ترک
$b$	ضخامت سطح مقطع تیر
$c$	میرایی معادل سیستم

$h$	سطح انرژی مکانیکی سیستم
$k$	سفتی معادل سیستم
$k_c$	سفتی معادل سیستم در حالت ترک کاملاً بسته
$k_o$	سفتی معادل سیستم در حالت ترک کاملاً باز
$k_\Delta$	نصف اختلاف سفتی‌های معادل سیستم در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک
$\bar{k}$	میانگین سفتی معادل در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک
$l_c$	فاصله ترک از انتهای آزاد تیر
$m$	جرم معادل سیستم
$\bar{m}$	جرم واحد طول تیر
$q$	نیرو
$u$	جابجایی
$v$	سرعت
$x$	مکان
$y$	جابجایی عرضی تیر
$w$	عرض سطح مقطع تیر
$\Phi$	تابع ترک
$\Psi$	تابع پریودیک موج مربعی
$\alpha$	عمق نسبی ترک
$\beta$	موقعیت نسبی ترک
$\rho$	چگالی تیر
$\psi$	تابع تقریبی شکل مود اول ارتعاشی تیر یکسرگیردار
$\phi$	تابع تحلیلی شکل مود اول ارتعاشی تیر یکسرگیردار
$\zeta$	نسبت میرایی سیستم
$\nu$	نسبت پواسون

$\sigma$	تنش
$\eta$	پارامتر تماس
$\varepsilon_{xx}$	کرنش عمودی در صفحه ترک
$\omega_b$	فرکانس دوخطی سیستم
$\omega_o$	فرکانس طبیعی سیستم در حالت ترک کاملاً باز
$\omega_c$	فرکانس طبیعی سیستم در حالت ترک کاملاً بسته
$\mu$	ضریب اصطکاک خشک
$\omega_q$	فرکانس نیروی تحریک
$\alpha_n$	ضرایب سری تیلور
$\varepsilon$	پارامتر کوچک و بی بعد
$\omega_0$	فرکانس سیستم خطی متناظر
$\omega$	فرکانس پاسخ
$\tau$	متغیر جدید در روش لیندست- پوانکاره
$\omega_n$	ضرایب سری فرکانس

در سال‌های اخیر توجه زیادی به توسعه روش‌های تست غیر مخرب<sup>۱</sup> شده است. اخیراً روش‌های مبتنی بر ارتعاشات به دلیل مزایایی چون سرعت و دقت بالا در کنار هزینه کم مورد توجه قرار گرفته‌اند. حضور ترک در سازه باعث ایجاد انعطاف‌پذیری موضعی در محل ترک می‌شود که این امر بر رفتار دینامیکی سازه به میزان قابل ملاحظه‌ای اثر می‌گذارد. از جمله این اثرات می‌توان به کاهش فرکانس‌های طبیعی و تغییر در شکل مودهای ارتعاشی اشاره کرد. تحقیقات نشان می‌دهد که با اندازه‌گیری این تغییرات بر اساس مدلی از سازه معیوب می‌توان پارامترهای عیب (عمق و محل ترک) را تعیین کرد [۱]. بسیاری از محققین در تحقیقات خود بر روی ارتعاشات تیر ترک‌دار از مدل‌های ترک باز<sup>۲</sup> استفاده کرده‌اند. در این مدل‌ها ترک در سازه به صورت یک شیار<sup>۳</sup> همیشه باز در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه سفتی سازه اگرچه در اثر حضور ترک کاهش می‌یابد، در طول زمان ارتعاش ثابت می‌ماند و تغییری نمی‌کند. در این تحقیقات، عمق و موقعیت ترک از تغییرات ایجاد شده در فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و همین‌طور دامنه ارتعاشات اجباری تشخیص داده می‌شود.

با این وجود تحقیقات مختلفی که در طول دو دهه گذشته انجام شده است نشان می‌دهد که ترک خستگی در هنگام ارتعاش سازه باز و بسته می‌شود [۲]. علاوه بر این استفاده از مدل ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهمترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کمتر از مقدار واقعی آن است. چنین تخمین نادرستی می‌تواند خطراتی را در پی داشته باشد. لذا اخیراً توجه محققین به مدل‌های ترک باز و بسته شونده<sup>۴</sup> معطوف شده است. رفتار باز و بسته شونده ترک

---

<sup>1</sup> -Non-Destructive Testing Methods

<sup>2</sup> - Open Crack Models

<sup>3</sup> - Notch

<sup>4</sup> - Breathing Crack Models

خستگی منجر به تغییر سفتی سازه در هنگام ارتعاش و در نتیجه رفتار غیرخطی سیستم می‌شود که مشخصه اصلی این رفتار حضور مؤلفه‌های سوپرهارمونیک در پاسخ دینامیکی سازه است.

با وجودیکه در بسیاری از تحقیقات انجام شده به حضور اجزای سوپرهارمونیک در پاسخ دینامیکی سازه معیوب و حساسیت آنها نسبت به پارامترهای ترک اشاره شده است، تغییر پارامترهای سیستم در طول زمان، استفاده از روش‌های تحلیلی برای ریشه‌یابی این رفتار و بررسی پارامترهای تأثیرگذار بر آن را بسیار دشوار می‌کند به طوریکه عمده تحقیقات انجام شده در این زمینه بر اساس روش‌های عددی یا امان محدود است. از طرف دیگر ماهیت عددی و محاسبات طولانی به کار رفته در بیشتر این روش‌ها استفاده از آنها را برای تعریف نشانگرهای دینامیکی عیب به منظور استفاده در روش‌های عیب‌یابی مبتنی بر ارتعاشات با مشکل مواجه می‌کند.

هدف از این تحقیق تعیین رابطه بین اجزای سوپرهارمونیک ظاهر شده در پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار و پارامترهای ترک و مشخصه‌های سیستم از یک دیدگاه تحلیلی و با استفاده از روش اغتشاشات است. بدین منظور بر اساس هر یک از دو مدل اصلی و پرکاربرد موجود در این زمینه ابتدا ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده به صورت یک سیستم یک درجه آزادی مدل‌سازی شده است. سپس در هر مورد معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از عملیات ریاضی به شکل استاندارد قابل تحلیل به روش اغتشاشات نوشته شده است. در نهایت به منظور استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد در هر مدل از یکی از روش‌های مناسب اغتشاشات استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در تحلیل هر دو مدل، جملات تصحیحی که توسط روش اغتشاشات به بخش اصلی پاسخ سیستم اضافه می‌شود، در برگزیده اجزای سوپرهارمونیک ظاهر شده در پاسخ ناشی از رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد. بنابراین در تحلیل حاضر ضابطه جملات تصحیح بیانگر رابطه تحلیلی میان دامنه اجزای سوپرهارمونیک و خصوصیات سیستم و پارامترهای ترک است.



## ۱- پیشینه پژوهش

همانطور که در مقدمه اشاره شد تحقیقات انجام شده بر روی رفتار دینامیکی سازه‌های ترک‌دار عمدتاً بر اساس مدل‌های ترک باز انجام شده است و تعداد کمتری از محققین از مدل‌های ترک باز و بسته شونده استفاده کرده‌اند. در ادامه به ارائه پیشینه‌ای از تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌پردازیم.

### ۱-۱- مدل‌های ترک باز

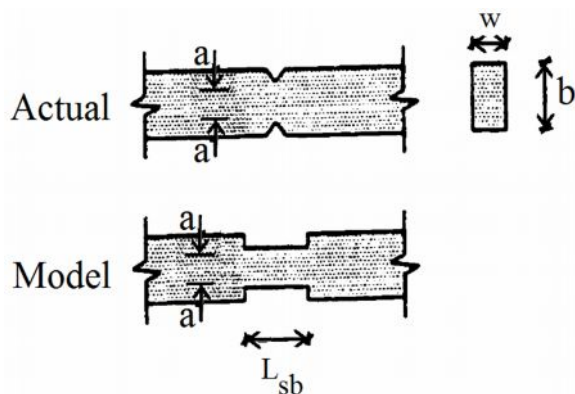
برخی از این مدل‌ها عبارتند از: مدل تیر کوتاه، مدل مدول یانگ و ممان اینرسی کاهش‌یافته و مدل مکانیک شکست.

#### ۱-۱-۱- مدل تیر کوتاه

حضور ترک در تیر موجب کاهش سفتی خمشی می‌شود. سفتی خمشی خاصیتی از ماده است که در برابر تغییر شکل خمشی مقاومت می‌کند. در مدل تیر کوتاه تأثیر حضور ترک به صورت کاهش سطح مقطع در محل ترک مدل‌سازی می‌شود. در حقیقت ترک در تیر توسط یک المان تیر کوتاه با سطح مقطع کاهش‌یافته در محل ترک جایگزین می‌شود ( شکل ۱-۱). در این مدل میزان کاهش ضخامت به اندازه عمق ترک در نظر گرفته شده و طول تیر کوتاه توسط آزمایشات تجربی به دست می‌آید. تا به امروز این مدل پرکاربردترین مدل ترک بوده است. برای این مدل، حل تحلیلی موجود است و تحلیل المان محدود نیز به راحتی می‌تواند برای بررسی صحت نتایج انجام شود.

کریسمر [۳] در سال ۱۹۴۴ برای اولین بار توسط روش انرژی به بررسی رابطه میان تغییر در اولین فرکانس طبیعی یک تیر با تکیه‌گاه ساده دارای یک شیار به عمق معین پرداخته است. او از داده‌های تجربی برای ارائه عبارتی که طول معادل ناحیه کم ضخامت مدل تیر کوتاه را مشخص می‌کند، استفاده کرده است و به این نتیجه رسیده است که اگر طول ناحیه کم ضخامت پنج برابر عمق شیار در نظر گرفته شود، تطابق خوبی بین داده‌های تجربی و نتایج تحلیلی حاصل می‌شود. تامسون [۴] در سال ۱۹۴۹ از یک مدل تیر کوتاه برای مشخص نمودن اثر ترک بر روی ارتعاشات عرضی، طولی و پیچشی تیر استفاده کرده است. او به این نکته اشاره کرده است که این مدل‌سازی تنها در صورتی قابل استفاده است که طول ناحیه کم ضخامت توسط آزمایشات تجربی تعیین شود. پتروسکی [۵] در سال ۱۹۸۱ با انجام آزمایشات خمشی بر روی یک نمونه تیر ترک‌دار و به کمک تئوری مکانیک شکست، یک رابطه تجربی را برای طول ناحیه کم ضخامت معادل ترک استخراج کرده است.

ترک در تیر باعث ایجاد ناپیوستگی در توزیع تنش و در نتیجه تغییر شکل‌های موضعی (مانند کرنش، شیب، انحنای و ...) در همسایگی ترک می‌شود. بنابراین بخشی از تیر در اثر تغییر در توزیع تنش تحمل کمتری در برابر بارهای وارده خواهد داشت. مهمترین کاستی مدل تیر کوتاه در این است که تغییر شکل‌های ناگهانی در محل ترک را در نظر نمی‌گیرد.



شکل ۱-۱- مدل تیر کوتاه [۵]

### ۱-۱-۲- مدل مدول یانگ و ممان اینرسی کاهش یافته

این مدل اغلب در روش‌های مدل‌سازی المان محدود به کار می‌رود. با توجه به اینکه حضور ترک سبب کاهش موضعی در سفتی خمشی می‌شود، می‌توان تأثیر حضور ترک در سازه را به کمک کاهش فرضی در مدول یانگ سازه در محل ترک مدل‌سازی کرد. مدول یانگ یکی از خاصیت‌های مکانیکی ماده است. اگرچه هر تغییری در سفتی سازه را می‌توان به این روش مدل‌سازی کرد، این تغییر یک تغییر حقیقی نیست. استفاده از این مدل در روش المان محدود تنها نیازمند یک تصحیح ساده در المان ترک است و نیاز به ارائه المان جدیدی نمی‌باشد. کاهش ممان اینرسی نیز نشان دهنده فقدان بخشی از سازه است و به نوبه خود می‌تواند کاهش موضعی در سفتی سازه را نشان دهد. توزیع پیچیده تنش، کرنش در ناحیه ترک در این روش به درستی مدل نمی‌شود. یوئن [۶] در سال ۱۹۸۵ از این مدل برای بررسی رفتار ارتعاشی یک تیر یک سرگیردار معیوب استفاده کرده است. در تحقیق او بیشتر بر روی حساسیت پارامترهای مودال مانند شکل مودها و انحنای شکل مودها تأکید می‌شود. ریتر [۷] در سال ۱۹۹۳ نشان داده است که تغییر در فرکانس‌های طبیعی متناظر با اندازه آسیب در این مدل دقت کمی دارد و آن‌ها را بیشتر از آنچه در عمل رخ می‌دهد پیش‌بینی می‌کند.

### ۱-۱-۳- مدل مکانیک شکست

حضور ترک در سازه باعث ایجاد انعطاف‌پذیری موضعی در محل ترک می‌شود که تابعی از عمق و موقعیت ترک است. این تغییر، رفتار دینامیکی سازه و خواص پایداری آن را دچار تغییر می‌کند. ایده اصلی در این مدل بر این اساس استوار است که ناحیه ترک در سازه توسط یک ماتریس انعطاف‌پذیری موضعی مدل‌سازی می‌شود که این ماتریس بر اساس روش انرژی و به کمک اصول مکانیک شکست به دست می‌آید.

برای تشکیل ماتریس انعطاف‌پذیری موضعی یک عضو ترک‌دار، از قضیه انرژی کاستیگلیانو استفاده

می‌شود. مؤلفه‌های ماتریس انعطاف‌پذیری  $C_{ij}$  از رابطه زیر به دست می‌آید [۸]:

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \int_0^{A_c} J dA \quad (1-1)$$

که در این رابطه  $u$  جابجایی سازه ترک‌دار در اثر اعمال نیروی  $q$ ،  $J$  تابع نرخ آزاد شدن انرژی کرنشی و  $A_c$  سطح ترک است. در الاستسیته خطی تابع چگالی انرژی کرنشی تابعی از ضرایب شدت تنش<sup>۱</sup> به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J = \frac{R}{E} K_I^2 + \frac{R}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2-1)$$

که در آن  $\nu$  نسبت پواسون،  $E$  مدول الاستسیته،  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{III}$  ضرایب شدت تنش به ترتیب برای مودهای اول، دوم و سوم شکست می‌باشد و

$$R = \begin{cases} 1 & \text{for plane stress} \\ 1 - \nu^2 & \text{for plane strain} \end{cases} \quad (3-1)$$

بنابراین ماتریس انعطاف‌پذیری موضعی ناشی از حضور ترک از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \int_0^{A_c} \left\{ \frac{R}{E} K_I^2 + \frac{R}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \right\} dA \quad (4-1)$$

میزان دقت این مدل به میزان اعتبار عبارات به کار رفته برای ضرایب شدت تنش و توصیف دقیق از

هندسه ناحیه ترک بستگی دارد.

استاچوویچ و کراویچ [۹] در سال ۱۹۹۱ ضریب شدت تنش  $K_I$  برای تغییر شکل خمشی تیر با سطح

مقطع مستطیلی را به صورت زیر ارائه کرده‌اند:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \Gamma \left( \frac{a}{b} \right) \quad (5-1)$$

<sup>1</sup> - Stress Intensity Factors