دانشکده علوم ریاضی

(گرایش کاربردی)

روش هایی برای حل معادلات دیفیوژن کسری

از :

اکرم پورقاسمی

استاد راهنما :

دکتر آرمان عقیلی

(شهریور ۱۳۹۰)

تقدیم به . . .

این مجموعه را با تمام وجودم تقدیم می کنم به خانواده عزیزم به پاس همه صبرها ، همراهی ها و محبت هایشان .

با این امید که قطره ای از دریای محبت شان را پاسخگو بوده باشم.

تقدیر و تشکر . . .

تقدیر و تشکر می کنم از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر آرمان عقیلی که با صبر و حوصله فراوان ، در رسیدن به هدف نهایی ، همراهی ام نمودند .با امید اینکه در پناه مهربانترین وجود ، سلامت و کامروا باشند.

چکیده

روشهایی برای حل معادلات دیفیوژن کسری

اکرم پورقاسمی

معادله دیفیوژن کسری – زمان از معادله دیفیوژن استاندارد با جایگزینی مشتق مرتبه اول با مشتق کسری مرتبه $\alpha \in (۰,۲]$ بدست می آید . مشتق کسری در حالت کاپوتو توصیف می‌شود.

در این پایان نامه ، برای حل معادلات دیفیوژن کسری ، از روشهای مختلفی بهره بردیم همچون روش تبدیلات ، روش تکرار متغیر و روش تجزیه همچنین یک راه حل تحلیلی از معادله دیفیوژن کسری – زمان توسط روش تجزیه آدومین ارائه می شود . با استفاده از شرایط ابتدایی ، جواب معادله به فرم بسته ارائه خواهد شد و جواب عددی آنها بصورت نمودار نمایش داده می شود. مثال هایی برای نشان دادن کاربرد تکنیک فوق ارائه شده اند.

کلید واژه :

مشتق کسری کاپوتو ، انتگرال ریمان لیوویل ، روش تجزیه آدومین ، تبدیل فوریه .

Abstract

Methods for solving partial fractional Diffusion equations.

Akram pourghasemi

The time – fractional diffusion equation is obtained from the standard diffusion equation by replacing the first – order time derivative with a fractional derivative of order $\alpha \in (\circ,2]$.

The fractional derivative is described in the caputo sense. In this session, we use different methods for solving fractional Diffusion equations such as the Transform method, the Vartional iteration method and the decomposition method . so the analytical solution of the time fractional diffusion equation presents by the Adomian decomposition method. By using initial conditions, the solutions of the equations have been presented in the closed form and then their numerical solutions have been represented graphically. Some examples are presented to show the application of the present technique.

Keywords:

Caputo fractional derivative, Riemann- Liouville integral, Adomian decomposition method , Fourier transform.

فرم ت ت- ۷

شماره:
تاریخ:

دانشگاه گیلان

باسمه تعالی
صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسي ارشد

با تأییدات الهی و با استعانت از حضرت ولي عصر "عج"، دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خواهر/برادر **اکرم پورقاسمی** در رشته: **ریاضی کاربردی** گرایش **معادلات دیفرانسیل**
تحت عنوان : **روشهایی برای حل معادلات دیفیوژن کسری**

به ارزش 6 واحد، رأس ساعت **۱۲:۳۰** روز **دوشنبه** مورخ **۱۳۹۰/۶/۲۸** در محل **تالار شهید کریمی** دانشکده **علوم پایه**

دانشگاه گیلان تشکیل گردید. هیأت داوران به شرح زیر که قبلاً پایان نامه ایشان را مطالعه نموده اند، پس از استماع دفاعیات و پرسشهاي لازم در زمینه علمي و تحقیقاتي ایشان، نتیجه را به شرح زیر اعلام مي دارند:

☐ پایان نامه نامبرده با نمره و با امتیاز عالي☐، بسیار خوب☐، خوب☐، قابل قبول☐ مورد تأیید قرار گرفت؛

☑ پایان نامه در وضع فعلي با تصحیحات جزیي مورد قبول است و نامبرده نمره ۱۹/۲۵ و امتیاز عالي☐، بسیار خوب☐، خوب☐، قابل قبول☐ دریافت نمود.
نوزده و بیست و پنج صدم

☐ پایان نامه و پروژه به شکل فعلي، مورد تأیید قرار نگرفت و پیشنهاد شد که...

اعضاء هیأت داوران	مرتبه دانشگاهی	تخصص	امضا
استاد(ان) راهنما:			
۱- **دکتر آرمان عقیلی**	**دانشیار**	**معادلات با مشتقاتجزئی**	
استاد(ان)مشاور:			
استادان یا محققان مدعو:			
۱- **دکتر حسین پناهی**	**دانشیار**	**فیزیک نظری**	
۲- **دکتر سعید کتابچی**	**استادیار**	**تحقیق**	

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلي: نصیر تقی زاده

- سه نسخه اصل از صورتجلسه توسط نماینده تحصیلات تکمیلي تنظیم و به مدیر گروه تسلیم مي شود.
- یك نسخه در گروه آموزشي، یك نسخه در آموزش دانشکده و یك نسخه در اداره فارغ التحصیلان دانشگاه نگهداري خواهد شد.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل دوم– معرفی برخی توابع

فصل سوم– مشتقات و انتگرال های کسری کاپوتو و ریمان– لیوویل

فهرست اشکال

عنوان صفحه

پیشگفتار :

معادلات دیفرانسیل یکی از شاخه های بسیار مهم در ریاضی است که در علوم پایه و مهندسی بسیار کاربرد دارد و کارایی بالای آن در حل مسائل فیزیکی سبب شده است که به یک شاخه پویا در علم و صنعت تبدیل شود . در مسائل کاربردی برای توصیف اشکال یا رفتار یک سیستم فیزیکی از مدل های ریاضی استفاده می شود که با رعایت اصول فیزیکی ، معادلاتی متناسب با مجموعه های سازگار با شرایط مناسب ایجاد می نمایند . از جمله این معادلات ، معادلات دیفیوژن کسری بوده که نقش مهمی در مدل کردن سیستم های مختلف فیزیکی داشته و در این پایان نامه ما روش های متفاوتی را برای حل این دسته معادلات ارائه می نماییم .

فصل صفر

مفاهیم مقدماتی

۰–۱ مقدمه

۰–۲ قضیه لایب نیتز

۰–۳ توابع تحلیلی

۰–۴ مانده ها و قطب ها

۰–۵ برخی قضایای مهم برای انتگرال توابع مختلط

۰-۱ مقدمه

در این فصل به بیان برخی مفاهیم مقدماتی که در فصول آینده مورد استفاده قرار می گیرند، می پردازیم . البته دانشجویان مقطع کارشناسی ارشد با اغلب این مفاهیم ، کاملاً آشنا هستند و این فصل صرفاً جنبه یادآوری دارد.

۰-۲ قضیه لایب نیتز

قضیه ۰-۱ : تابع دو متغیره و پیوسته $f(x,y)$ را که روی مستطیل محدود با خطوط $x=a, x=b, y=c, y=d$ تعریف شده ، هم چنین انتگرال

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx,$$

را در نظر می گیریم . می توان ثابت کرد که $\varphi(y)$ تابعی پیوسته از y است . به علاوه فرض می کنیم تابع $f(x,y)$ دارای مشتق نسبی مرتبه اول پیوسته نسبت به y باشد که آنرا با $f_y(x,y)$ نمایش می دهیم . می توان ثابت کرد که

$$\varphi'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx \qquad (۰-۱)$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx \qquad (۰-۲)$$

یعنی می توان ترتیب دو عمل مشتق گیری و انتگرال گیری را تعویض نمود .(برای اثبات رجوع کنید به [۱])

قضیه ۰-۲ : فرض کنیم $f(x,y)$ تابع دو متغیره در قضیه قبل باشد و $h(y), g(y)$ توابعی از y هستند که دارای مشتقات مرتبه ی اول پیوسته نسبت به y می باشند و فرض می کنیم :

$$\varphi(y)=\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx$$

در اینصورت می توان ثابت کرد که :

$$\varphi'(y)=\int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x,y)dx+h'(y)f(h(y),y)-g'(y)f(g(y),y) \qquad (۰-۳)$$

(برای اثبات رجوع کنید به [۱])

۰-۳ توابع تحلیلی

تعریف ۰-۳-۱ : تابع f از متغیر مختلط z در یک مجموعه باز تحلیلی است اگر در هر نقطه از آن مجموعه مشتق پذیر باشد. به خصوص تابع f در نقطه $z_\circ$ تحلیلی است اگر در یک همسایگی $z_\circ$ تحلیلی باشد . [۲]

تعریف ۰-۳-۲ : یک تابع تام ، تابعی است که در تمام صفحه ی متناهی ، تحلیلی باشد . چون مشتق یک چند جمله ای همه جا موجود است ، نتیجه می شود که هر چند جمله ای یک تابع تام است . [۲]

تعریف ۰-۳-۳ : **نقطه‌ی** $z_\circ$ یک نقطه ی تکین تابع f نامیده می شود ، اگر f در $z_\circ$ تحلیلی نباشد اما در نقطه ای از هر همسایگی $z_\circ$ تحلیلی باشد . نقطه ی تکین $z_\circ$ را تنها می نامند هرگاه علاوه بر این ، همسایگی محذوفی از $z_\circ$ مانند $0<|z-z_\circ|<R$ موجود باشد که f در سراسر آن تحلیلی است . در این صورت تابع f را می توان در قرص سوراخ دار $0<|z-z_\circ|<R$ با سری

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n+\frac{b_1}{(z-z_\circ)}+\frac{b_2}{(z-z_\circ)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_\circ)^n}+\ldots \qquad (۴-۰)$$

نشان داد . بسط فوق را بسط لوران تابع f گویند که در آن :

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)dz}{(z-z_\circ)^{n+1}} \qquad (n=\circ,1,2,\ldots) \qquad (۵-۰)$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)dz}{(z-z_\circ)^{-n+1}} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (۶-۰)$$

می باشند و C معرف مسیر ساده بسته ای در جهت مثبت حول $z_\circ$ واقع در حوزه $\circ<|z-z_\circ|<R$ است . بخش

$$\frac{b_1}{(z-z_\circ)}+\frac{b_2}{(z-z_\circ)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_\circ)^n}+\ldots$$

از این سری را که شامل توان های منفی $z-z_\circ$ است، قسمت اصلی f در $z_\circ$ می نامند . حال با استفاده از قسمت اصلی، نقطه‌ی تکین تنهای $z_\circ$ را به عنوان یکی از سه نوع خاص مشخص می سازیم .

اگر قسمت اصلی f در $z_\circ$ شامل حداقل یک جمله نامنفی بوده اما تعداد این گونه جملات متناهی باشد ، عدد صحیح مثبتی مانند m هست به قسمتی که

$$b_m\neq\circ, b_{m+1}=b_{m+2}=\ldots=\circ,$$

یعنی بسط (۰-۴) به صورت زیر در می آید:

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n+\frac{b_1}{(z-z_\circ)}+\frac{b_2}{(z-z_\circ)^2}+\ldots+\frac{b_m}{(z-z_\circ)^m},$$

که در آن $b_m\neq\circ$. در این حالت نقطه ی تکین تنهای $z_\circ$ را قطب مرتبه ی m می نامند . هر قطب مرتبه ی $m=1$ را یک قطب ساده می گویند .

وقتی همه ی b_n ها در بسط (۰-۴) صفر باشند ، بطوری که

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n,$$

نقطه ی $z_\circ$ به نقطه ی تکین برداشتنی موسوم است .

وقتی تعداد نامتناهی از ضرایب b_n در سری (۰-۴) ناصفر باشند $z_\circ$ را یک نقطه ی تکین اساسی f می نامند. [۲]

۰-۴ مانده ها و قطب ها

اگر $z_\circ$ یک نقطه ی تکین تنهای تابع f باشد ، همان طوری که در بخش قبل ذکر کردیم ، تابع f در همسایگی $\circ<|z-z_\circ|<R$ از نقطه ی $z_\circ$ دارای بسط (۰-۴) می باشد که در آن b_n,a_n دارای نمایش انتگرالی اند . به خصوص

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)dz}{(z-z_\circ)^n}, \qquad (n=\circ,1,2,\ldots)$$

که در آن C مسیر ساده ی بسته ای حول نقطه ی $z_\circ$ در جهت مثبت و واقع در قرص سوراخ دار $\circ<|z-z_\circ|<R$ است .

وقتی $n=1$ این فرمول برای b_n را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_c f(z)dz=2\pi i b_1 \qquad (۷-۰)$$

عدد مختلط b_1 را که ضریب $\frac{1}{(z-z_\circ)}$ در بسط (۰-۴) است مانده ی f در نقطه ی تکین تنهای $z_\circ$ می نامند . اغلب برای نمایش مانده ی b_1 از نماد $\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)$ استفاده می کنند . [۲]

قضیه ۰-۴-۱ : $z_\circ$ نقطه ی تکین تنهایی تابع f ، یک قطب از مرتبه ی m است اگر و تنها اگر $f(z)$ را بتوان به صورت زیر نوشت .

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_\circ)^m} \tag{۰-۸}$$

که در آن ، $\phi(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است . به علاوه اگر $m=1$ ، آن گاه $\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)=\phi(z_\circ)$ و اگر $m\geq \circ$ ، آن گاه $\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)=\frac{\phi^{(m-1)}(z_\circ)}{(m-1)!}$ (برای اثبات رجوع کنید به [۲])

قضیه ۰-۴-۲ : فرض کنید تابع f در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی باشد . در این صورت همه ی مشتقات آن یعنی $f^{(n)}(z)$ $(n=1,2,...)$ در $z_\circ$ موجودند. (برای اثبات رجوع کنید به [۲])

اگر $f(z_\circ)=\circ$ و عدد صحیح مثبتی مانند m موجود باشد به طوری که $f^m(z_\circ)\neq\circ$ و همه ی مشتقات مرتبه های پایین‌تر در $z_\circ$ صفر شوند ، آن گاه گویند f در $z_\circ$ دارای صفر مرتبه ی m است .

قضیه ۰-۴-۳ : تابع f که در نقطه $z_\circ$ تحلیلی است ، در این نقطه ، صفر مرتبه ی m دارد اگر و تنها اگر تابعی مانند g موجود باشد به طوری که در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر بوده و رابطه زیر برقرار باشد :

$$f(z)=(z-z_\circ)^m g(z).$$

(برای اثبات رجوع کنید به [۲])

قضیه ۰-۴-۴ : فرض کنید دو تابع p ، q در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی باشند و $p(z_\circ)\neq\circ$. اگر p در $z_\circ$ ، صفر مرتبه ی m داشته باشد ، آن گاه خارج قسمت $\frac{p(z)}{q(z)}$ در آن نقطه ، قطب مرتبه ی m دارد .

(برای اثبات رجوع کنید به [۲])

قضیه ۰-۴-۵ : فرض کنید دو تابع p ، q در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی باشند . اگر

$$q'(z_\circ)\neq\circ, q(z_\circ)=\circ, p(z_\circ)\neq\circ$$

، آن گاه $z_\circ$ یک قطب ساده ی کسر $\frac{p(z)}{q(z)}$ است و

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}.$$

قضیه ۰-۴-۶ : اگر تابع f در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی و $z_\circ$ قطب مرتبه ی m تابع باشد ، آن گاه

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)=\operatorname*{Lim}_{z=z_\circ}(z-z_\circ)f(z);\ \ m=1,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)=\operatorname*{Lim}_{z=z_\circ}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_\circ)^m f(z);\ \ m>1.$$

(برای اثبات رجوع کنید به [۳])

۰-۵ برخی قضایای مهم برای انتگرال توابع مختلط

قضیه کوشی گورسا : اگر تابع f در همه ی نقاط درون و روی مسیر ساده ی بسته ی C تحلیلی باشد ، آن گاه

$$\int_c f(z)dz = 0$$

قضیه مانده ها : فرض کنید C مسیر ساده ی بسته ای در جهت مثبت باشد . اگر تابع f در درون و روی C به جز تعداد متناهی نقطه ی تکین z_k $(k=1,2,...,n)$ که در داخل C هستند ، تحلیلی باشد ، آن گاه

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

(برای اثبات قضایای فوق رجوع کنید به [۲])

نامساوی ژوردان :

برمبنای این نامساوی داریم :

$$\int_o^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta < \frac{\pi}{R};(R>0)$$

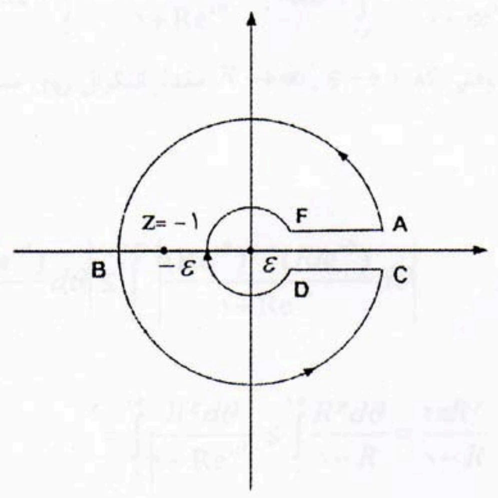
(برای اثبات نامساوی فوق رجوع کنید به [۲])

مثال ۰-۱ : انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ $0<p<1,$ را محاسبه کنید .

برای محاسبه انتگرال فوق تعریف می کنیم :

$$f(z)=\frac{z^{p-1}}{1+z};z\in\not\subset$$

واضح است که تابع f در $z=0$ دارای صفر شاخه ای و در $z=-1=e^{i\pi}$ دارای نقطه ی تکین تنها است. مسیر انتگرال‌گیری را مطابق شکل زیر در نظر می گیریم.



شکل (۱-۱)

با انتگرال گیری روی مسیر فوق و با استفاده از قضیه ی مانده ها داریم :

$$\int_{FA} F(z)dz + \int_{ABC} F(z)dz + \int_{CD} F(z)dz + \int_{DEF} F(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} F(z)$$

واضح است که $z=-1=e^{i\pi}$ قطب ساده تابع $F(z)$ است و بنا بر قضیه ۰-۴-۱ داریم :

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = (e^{i\pi})^{p-1} = -e^{ip\pi}$$

در نتیجه :

$$\int_{FA} F(z)dz + \int_{ABC} F(z)dz + \int_{CD} F(z)dz + \int_{DEF} F(z)dz = -2\pi i e^{ip\pi} \qquad (۰-۹)$$

واضح است که روی مسیر FA مقدار z برابر است با $z = xe^{i\circ}$ و بنابراین :

$$\int_{FA} F(z)dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(xe^{i\circ})^{p-1}}{1+x} dx \qquad (۰-۱۰)$$

روی مسیر ABC داریم $z = xe^{i\circ}$ و بنابراین :

$$\int_{ABC} F(z)dz + \int_{\circ}^{2\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-1}(Rie^{i\theta})}{1+\mathrm{Re}^{i\theta}} d\theta \qquad (۰-۱۱)$$

و روی مسیر CD داریم $z = xe^{2\pi i}$ و بنابراین:

$$\int_{CD} F(z)dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+x} dx \qquad (۰-۱۲)$$

روی مسیر DEF داریم $z = \varepsilon e^{i\circ}$ و در نتیجه :

$$\int_{DEF} F(z)dz = \int_{2\pi}^{\circ} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1}(\varepsilon ie^{i\theta})}{1+\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \qquad (۰-۱۳)$$

با قرار دادن رابط(۰-۱۰) ، (۰-۱۱) ، (۰-۱۲) و (۰-۱۳) در رابطه (۰-۹) داریم :

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{(xe^{i\circ})^{p-1}}{1+x} dx + \int_{R}^{\varepsilon} \frac{(xe^{2\pi i})^{P-1}}{1+x} dx + \int_{\circ}^{2\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-1}(Rie^{i\theta})}{1+\mathrm{Re}^{i\theta}} d\theta + \int_{2\pi}^{\circ} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1}(\varepsilon ie^{i\theta})}{1+\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = -2\pi e^{i\pi p} \qquad (۰-۱۴)$$

حال ثابت می کنیم که در رابطه فوق وقتی که $\varepsilon \to \circ$ ، $R \to \infty$ مقدار انتگرال روی مسیرهای ABC و DEF برابر با صفر است. روی مسیر ABC داریم :

$$\left| \int_{ABC} F(z)dz \right| = \left| \int_{\circ}^{2\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-1}(Rie^{i\theta})}{1+\mathrm{Re}^{i\theta}} d\theta \right| \le \int_{\circ}^{2\pi} \left| \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-1}(Rie^{i\theta})}{1+\mathrm{Re}^{i\theta}} d\theta \right|$$

$$= \int_{\circ}^{2\pi} \frac{R^p d\theta}{\left|1+\mathrm{Re}^{i\theta}\right|} \le \int_{\circ}^{2\pi} \frac{R^p d\theta}{1-R} = \frac{2\pi R^p}{1-R}$$

واضح است که چون $\circ < p < 1$ و $\lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi R^p}{1-R} = \circ$ در نتیجه :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{ABC} f(z)dz = \circ$$

روی مسیر DEF واضح است که وقتی $\varepsilon \to \circ$ داریم :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{DEF} f(z)dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2\pi}^{0}\frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1}(\varepsilon i e^{i\theta})}{1+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=0$$

در نتیجه از رابطه (۰-۱۴) داریم :

$$\int_0^\infty \frac{(xe^{0i})^{p-1}}{1+x}dx+\int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+x}dx=-2\pi i e^{ip\pi}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}(1-e^{2\pi(p-1)i})dx=-2\pi i e^{ip\pi}$$

و از رابطه فوق داریم :

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{2\pi i e^{ip\pi}}{e^{2\pi(p-1)i}-1}=\frac{2\pi i e^{ip\pi}}{e^{2\pi p i}-1}=\pi\frac{2ie^{ip\pi}}{e^{2\pi p i}-1}=\frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (۰-۱۵)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

فصل اول

معرفی برخی تبدیلات

۱-۱ مقدمه

در این فصل دو تبدیل انتگرالی مهم را که بسیار مورد استفاده قرار می گیرند معرفی کرده و برخی از خواص و روابط پرکاربرد آنها را مورد بررسی قرار میدهیم .این تبدیلات انتگرالی عبارتند از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه که به خصوص در شاخه معادلات دیفرانسیل بسیار مورد استفاده قرار می گیرند .

۱-۲ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$

تعریف ۱-۲-۱ : فرض میکنیم تابع $f(t)$ برای $t > 0$ تعریف شده باشد آن گاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ ،که آنرا با $L\{f(t)\}$ نشان میدهیم ، به صورت زیر تعریف میشود: [۴]

$$L\{f(t);t \to s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s) \qquad (۱-۱)$$

تعریف ۱-۲-۲: اگر ثابت های حقیقی $\gamma, m > 0$ چنان موجود باشند که برای هر $t > N$

$$\left|e^{-\gamma t} f(t)\right| \le m \quad \text{یا} \quad \left|f(t)\right| \le me^{\gamma t}$$

آنگاه تابع $f(t)$ را از مرتبه ی نمایی گویند .

برای مثال توابع کراندر مانند cos(at) , sin (at) و توابع چند جمله ای ، از مرتبه ی نمایی هستند . [۴]

۱-۲-۱ شرایط کافی برای وجود لاپلاس تابع $f(t)$

قضیه ۱-۲-۱-۱ اگر تابع $f(t)$ در هر بازه ی $0 \le t \le N$ قطعه قطعه پیوسته و برای $t > N$ نمایی از مرتبه γ باشد آنگاه تبدیل لاپلاس آن برای هر $s > \gamma$ موجود است . [۵]

۱-۲-۲ تبدیل لاپلاس برخی توابع مقدماتی

$$1 - L\{t^{\nu}\} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}} \quad \nu > -1 \qquad (۲-۱)$$

$$2 - L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad (۳-۱)$$

$$3 - L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad (۴-۱)$$

$$4 - L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad (۵-۱)$$

۱-۲-۳ برخی خواص مهم تبدیل لاپلاس توابع

۱) خاصیت خطی تبدیل لاپلاس

اگر c_2, c_1 ثابت های دلخواه باشند آن گاه :

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} \qquad (۶-۱)$$

۲) اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \qquad (۷-۱)$$

۳) اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \qquad (۸-۱)$$

۴) اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه