بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم‌پایه

# پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

# جواب های مثبت برای رده ای از معادلات $p$–لاپلاسین

استاد راهنما:

**پروفسور قاسم علیزاده افروزی**



استاد مشاور:

**دکتر محسن علیمحمدی**

نگارش :

**محسن علیزاده**

**بهمن ۱۳۸۶**

## سفارش امیرالمومنین حضرت علی (ع) به حضرت امام حسن (ع)

چهار چیز از اخلاق را با چهار چیز از افعال را از من فراگیر که با نگاه داشتن آنها هر کاری کنی تو را زیان نرساند.

آن چهار چیزی که در اخلاق است آنست که:

- بی نیاز کننده ترین بی نیازی ها عقل و خردمندی است.
- بالاترین فقرها نادانی و بی خردی است.
- ترسناکترین ترسها خودپسندی است.
- گرامی ترین بزرگیها خوش خوئی است.

آن چهار چیزی که در افعال است آنست که:

- سخت بپرهیز از دوستی کردن با نادان که او به اراده سود رساندن به زیانت در افکند.



- سخت بپرهیز از دوستی کردن با بخیل که او به هنگام نیازمندی خویش را از تو کنار می کشد.
- سخت بپرهیز از دوستی کردن با گناه کار که او تو را به بهای پست و ناچیزی می فروشد.
- سخت بپرهیز از دوستی کردن با دروغگو که او همچون سرابی است که آب نماید و دور را بر تو نزدیک و نزدیک را از تو دور می سازد.

نهج البلاغه . ترجمه محمد علی انصاری قمی . موسسه انتشارات نوین . صفحه ۱۰۳۶

تقدیم به

پدر و مادر

عزیزم

# قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز خدای منان را سپاس می‌گویم که مرا راهنمایی و یاری نموده و همواره یار و یاور بندگانش می‌باشد.

مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای عزیزم

جناب آقای پروفسور قاسم علیزاده افروزی

ابراز می‌دارم که با راهنمایی‌های دلسوزانه‌شان مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری فرمودند.

همچنین از استاد مشاورم

جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی

کمال سپاسگزاری را دارم. همین‌طور از دوست خوبم دانشجوی دوره دکتری جناب آقای سید هاشم رسولی، تشکر می‌کنم.

در ضمن از خانوادهٔ عزیزم که همواره موجبات دلگرمی‌ام را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم.

# چکیده


در این پایان‌نامه،ابتدا وجود جواب را برای رده‌ای از معادلات $p$—لاپلاسین به صورت:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(u) & in\,\Omega, \\ u > 0 & in\,\Omega, \\ u = 0 & on\,\partial\Omega, \end{cases}$$

را بررسی می‌کنیم. سپس جوابهای ضعیف مسئله مقدار مرزی:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(\lambda, u) & in\,\Omega, \\ u = 0 & on\,\partial\Omega, \end{cases}$$

را به دست می‌آوریم. در فصل سوم وجود جواب برای رده‌ای از دستگاه‌های لاپلاسین با تابع وزن تغییر علامتی به شکل زیر را مطالعه می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda F(x, u, v) & in\,\Omega, \\ -\Delta v = \lambda H(x, u, v) & in\,\Omega, \\ u = 0 = v & on\,\partial\Omega. \end{cases}$$

در فصل آخر، جواب‌های مثبت برای رده‌ای از دستگاه‌های $p$—لاپلاسین با پارامترهای چندگانه به صورت زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u) & in\,\Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 \gamma(v) & in\,\Omega, \\ u = 0 = v & on\,\partial\Omega, \end{cases}$$

سپس به بررسی وجود جواب برای دستگاه:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_i = g_i(\lambda, u_1, u_2, ..., u_n) & in\,\Omega, \\ u_i = 0 & on\,\partial\Omega; \qquad i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

می‌پردازیم. و در پایان دستگاه مطرح شده در فصل سوم را به حالت p—لاپلاسین تعمیم می‌دهیم. برای اثبات وجود جواب برای مسائل فوق از روش جوابهای بالایی و پایینی استفاده می‌کنیم.


**کلمات کلیدی:** معادلات $p$—لاپلاسین، جواب‌های مثبت، روش جواب‌های بالایی وپایینی.

# فهرست مندرجات

# مقدمه

در میان شاخه‌های مختلف علم ریاضی، آنالیز غیر خطی یکی از مهم‌ترین و شاخص ترین آن می‌باشد. موفقیت این رشته به دلیل کاربرد وسیعی است که در پدیده‌های مختلف فیزیکی، مهندسی مکانیک کوانتومی و اقتصاد دارد. در واقع در مدل بندی بسیاری از پدیده‌های طبیعی، به نحوی به یک معادله دیفرانسیل جزیی برمی‌خوریم. در سالهای اخیر بسیاری از پژوهشگران و آنالیزدانان، به مطالعه رفتار جوابهای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزیی از نوع بیضوی با شرط مرزی، به کمک آنالیز غیر خطی پرداخته‌اند. آنالیز غیرخطی و حساب تغییرات هم اکنون به عنوان یکی از شاخه های بسیار جذاب و پرکار در زمینه مطالعه معادلات بیضوی با شرط مرزی، تبدیل شده است.

در این پایان نامه ابتدا وجود و چندگانگی جواب را برای رده‌ای از معادلات $p$−لاپلاسین بررسی می‌کنیم سپس وجود جواب برای رده‌ای از دستگاه‌های لاپلاسین با تابع وزن تغییر علامتی بررسی کرده و در فصل چهارم جواب‌های مثبت برای رده‌ای از دستگاه‌های $p$−لاپلاسین را به دست می‌آوریم. کار اصلی ما مطالعه مقالات زیر می‌باشد.

Existence of a positive solution for a p-Laplacian semipositone problem, [17].

Positive solution for classes of $p$-Laplacian equations, [14].

Existence result for a classes of Laplacian systems with sign-changing weight, [5].

Positive solution for a classes of $p$-Laplacian systems with multiple parameters, [6].

Positive solution for a classes of $p$-Laplacian systems with sign-changing weight. [3].

# فصل ۱

# تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در سراسر این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. ابتدا معادلات دیفرانسیل جزیی و برخی کاربردهای آن را معرفی می‌کنیم، سپس عملگر بیضوی را تعریف نموده و مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، $L^p$، سوبولوف و قضایای مرتبط با آنها خواهیم داشت.

## ۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

**تعریف ۱.۱.۱** (معادله دیفرانسیل )

هر معادله شامل یک متغییر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغییر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند. معادلات دیفرانسیل کاربرد زیادی در ریاضیات، فیزیک، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم دارند.

**تعریف ۲.۱.۱** (معادله دیفرانسیل جزیی )

هر رابطه بین متغیرهای مستقل $x_1, ..., x_n$ و متغیرهای تابع $u$ و مشتقات متغیر تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل جزیی گویند. اگر $u = f(x_1, ..., x_n)$ یک تابع چند متغیره باشد، مشتق مرتبه $k$ام $u$ نسبت به مولفه $x_i$ را به صورت $\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}$ نشان می‌دهیم، هرگاه بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده $k$ باشد، معادله دیفرانسیل از مرتبه $k$ است.

**تعریف ۳.۱.۱** (دامنه )

فرض کنیم $R^n$ فضای اقلیدسی $n$—بعدی $(n \geq 2)$ با نقاط $(x_1, ..., x_n)$ که $x_i \in R$ و $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ باشد. در این صورت $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

نقاط $x,y$ در $\Omega$ با یک منحنی در $\Omega$ می‌توانند بهم وصل شوند و برای هر $x \in \Omega$ یک $r > 0$ به اندازه کافی کوچک وجود دارد بطوری که $B_r(x) \subset \Omega$ . ($B_r(x)$ یک گوی باز در $R^n$ به شعاع $r$ و مرکز $x$ است.)

**تعریف ۴.۱.۱** ( نقطه حدی، بستار و مرز )

نقطه $x \in X$ را یک نقطه حدی $\Omega$ گویند هرگاه برای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$B_r^\circ(x) \cap \Omega \neq \emptyset$$

که در آن $B_r^\circ(x)$ یک همسایگی محذوف به شعاع $r$ و مرکز $x$ است.

مجموعه نقاط حدی $\Omega$ را با $\Omega'$ نشان می‌دهیم. بستار $\Omega$ را که با $\bar{\Omega}$ نشان می‌دهیم عبارت است از اجتماع نقاط $\Omega$ و نقاط حدی آن، یعنی:

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$$

همچنین مرز $\Omega$ را که با $\partial\Omega$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega,$$

اگر $\Omega = R^n$ ، آنگاه: $\partial\Omega = \emptyset$ .

**تعریف ۵.۱.۱ :**

مجموعه همه توابع پیوسته روی $\Omega$ را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم . برای $k \in N$، $C^k(\Omega)$ نشاندهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه $k$ـام آنها روی $\Omega$ پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی هستند که برای هر عدد طبیعی $k$ متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. $C^k(\bar{\Omega})$ مجموعه

توابعی در $C^k(\Omega)$ است که تمام مشتقات نابیشتر از $k$ آنها به طور پیوسته به $\bar{\Omega}$ توسیع می‌یابند. پاره‌ای از اوقات نیازمند به توابعی هستیم که در آن $\Omega$ کراندار باشند ولی به طور پیوسته به $\bar{\Omega}$ توسیع نیابند. این گونه توابع را با $C_B(\Omega)$ نشان می‌دهیم و مشابهاً $C_B^k(\Omega)$ نیز قابل تعریف است. $C(\Omega, R^n)$ نشان دهنده توابع برداری $n$بعدی روی $\Omega$ می‌باشد.

**تعریف ۶.۱.۱** :

محمل یک تابع پیوسته $f$ روی $R^n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$supp\, f(x) = \overline{\{x \in R^n :\ f(x) \neq \circ\}} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$ اگر $x$ عضو $K$ نباشد آنگاه $f(x) = \circ$ . همان طور که می دانیم ( طبق قضیه هاینه برل ) مجموعه های بسته و کراندار در $R^n$ فشرده می باشند بنابراین اگر محمل $f$ کراندار باشد می گوییم $f$ دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته $f$ که محمل فشرده دارند را با $C_\circ(R^n)$ نمایش می دهیم. مشابهاً $C_\circ(\Omega)$ نشاندهنده توابع پیوسته روی $\Omega$ می باشد که محمل آنها یک زیرمجموعه فشرده از $\Omega$ است. همچنین $C_\circ^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

**تعریف ۷.۱.۱** ( تابع آزمون )

تابع $f$، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون نامند هرگاه $f \in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$ موجود باشد به طوری که محمل $f$ در $K$ قرار داشته باشد. مجموعه تمام این توابع را با $C_\circ^\infty(\Omega)$ نشان می دهند.

**تعریف ۸.۱.۱** ( مجموعه های اندازه پذیر و توابع اندازه پذیر)

فرض می کنیم $\Omega$ یک دامنه در $R^n$ و $\mu$ اندازه لبگ در $R^n$ باشد. مجموعه هایی که روی آنها $\mu$ خوش تعریف است را مجموعه های اندازه پذیر می نامیم. توابع $f$ را که برای آنها مجموعه $\{x \in R^n : f(x) < \alpha\}$ برای هر $\alpha$ حقیقی یک مجموعه اندازه پذیر باشد توابع اندازه پذیر می نامیم.

**تعریف ۹.۱.۱** ( فضای $L^p(\Omega)$ )

فرض کنید $\Omega$ یک دامنه کراندار در $R^n$ و $p$ یک عدد حقیقی مثبت باشد و همچنین $u$ یک تابع اندازه پذیر و تعریف شده روی $\Omega$ باشد. تعریف می کنیم:

$$\|u\|_p = \{\int_\Omega |u(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ را متشکل از همه $u$ هایی می گوییم که برای آنها داشته باشیم:

$$\|u\|_p < \infty$$

$\|u\|_p$ را نرم $L^p$ تابع $u$ می نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می گیریم که به طور تقریباً همه جا با هم برابر باشند، یعنی اندازه نقاطی که با هم برابر نیستند برابر با صفر باشد. می گوییم $u = ۰$ در $L^p(\Omega)$ اگر $u(x) = ۰$ به طور تقریباً همه جا در $\Omega$. به وضوح اگر $u \in L^p(\Omega)$ و $c \in R$ آنگاه $cu \in L^p(\Omega)$. به علاوه اگر $u, v \in L^p(\Omega)$ آنگاه داریم (رجوع کنید به [۳۳]):

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq ۲^p(|u(x)|^p + |v(x)|^p)$$

پس $u + v \in L^p(\Omega)$ و بنابراین $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

**تعریف ۱۰.۱.۱** ( انتگرال پذیری موضعی تابع $f$ روی دامنه $\Omega$ )

مجموعه همه توابع تعریف شده روی قلمرو $\Omega$ که انتگرال شان تعریف شده و متناهی باشد را توابع انتگرال پذیر می نامیم. اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند روبرو می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از $\Omega$ انتگرال پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود $\Omega$ انتگرال پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با $L^{1}_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم. چون توابع پیوسته روی مجموعه های فشرده مقدار بیشینه و کمینه خود را می گیرند بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} C(\Omega) \subset L^{1}(\Omega) \\ C_{0}(\Omega) \subset L^{1}_{loc}(\Omega) \end{cases}$$

**تعریف ۱۱.۱.۱** ( سوپریمم اساسی )

فرض کنید $u$ یک تابع اندازه پذیر روی $\Omega$ باشد. می گوییم $u$ به طور اساسی کراندار است هر گاه یک ثابت $\alpha \in R$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $|u(x)| \leq \alpha$ به طور تقریباً همه جا در $\Omega$ برقرار باشد. به بزرگترین کران پایین ( اینفیمم ) چنین $\alpha$ هایی سوپریمم اساسی می گوییم و آن را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$ess\ sup_{x\in D}|u(x)| = inf\{\alpha : \mu(\{x : |u(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

**تعریف ۱۲.۱.۱** ( فضای $L^{\infty}(\Omega)$ )

$L^{\infty}(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابعی است که سوپریمم اساسی آنها متناهی باشد.

نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|u\|_\infty = ess\ sup_{x\in D}|u(x)|$$

**تعریف ۱۳.۱.۱** ( فضای $L^p_{loc}(\Omega)$ )

برای $1 \leq p < \infty$، $L^p_{loc}(\Omega)$ عبارت است از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر $u$ روی $\Omega$ به طوری که برای هر زیر مجموعه فشرده $K$ از $\Omega$ داشته باشیم:

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty$$

## ۲.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت

**تعریف ۱.۲.۱** ( فضای خطی نرمدار و باناخ )

فضای برداری $X$ را یک فضای خطی نرمدار نامیم هر گاه نرم روی $X$ که با نگاشت

$$\begin{cases} P : X \to R \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

معرفی می شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\|x\| \geq 0$ برای هر $x \in X$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$،

۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in X$.

یک فضای نرمدار خطی $X$، تحت متر تعریف شده در یک فضای متریک می باشد.

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad ; \qquad \forall x,y \in X$$

در نتیجه یک دنباله $X \supset \{x_n\}$ همگرا به عنصر $x \in X$ است، هر گاه

$$\|x_n - x\| \to \circ$$

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است هر گاه $\|x_m - x_n\| \to \circ$ وقتی که $m,n \to \infty$. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد یعنی هر دنباله کوشی در $X$ با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه ای از $X$ همگرا باشد.

**تعریف ۲.۲.۱** (فضای ضرب داخلی و هیلبرت)

فضای برداری (حقیقی) $H$ را یک فضای ضرب داخلی نامیم هر گاه به هر زوج مرتب از بردارهای $x,y$ در $H$ یک عدد حقیقی مانند $< x,y >$ به نام حاصلضرب داخلی $x,y$ چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $x,y \in H$ ، $< x,y > = < y,x >$،

۲) برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in R$ و هر $x_۱, x_۲, y \in H$ داشته باشیم:

$$< \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲, y > = \lambda_۱ < x_۱, y > + \lambda_۲ < x_۲, y >$$

۳) برای هر $x \in H$ ، $< x,x > \geq \circ$ ،

۴) $x = \circ$ اگر و تنها اگر $< x,x > = \circ$.

بنابر خاصیت ( ۳ ) می توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نامنفی $< x, x >$ تعریف کرد. یعنی:

$$\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}} \qquad ; \qquad \forall x \in H$$

در این صورت به وضوح شرایط ( ۱ ) و ( ۲ ) در تعریف ۱.۲.۱ برقرارند. برای اثبات نامساوی مثلثی مطابق نامساوی کوشی—شوارتز به ازای هر $x, y \in H$ داریم:

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$$

و همچنین با کمک نامساوی $| < x, y > | \leq < x, y >$ به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^{2} &= < x+y, x+y >= \|x\|^{2} + 2 < x, y > + \|y\|^{2} \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^{2} \end{aligned}$$

پس:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای نرمدار خطی برقرار می باشد لذا یک فضای ضرب داخلی $H$، یک فضای نرمدار خطی نیز است. هر گاه این فضای ضرب داخلی تام باشد آنرا یک فضای هیلبرت می گویند. هر گاه $< x, y >= 0$، برای هر زیرفضای $M$ از $H$، متمم متعامد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M^{\perp} = \{x \in H | < x, y >= 0, \qquad \forall y \in M\}$$

به وضوح $M^{\perp}$ یک زیرفضای بسته ای از $H$ است. اگر $M$ نیز بسته باشد آنگاه $H$ جمع مستقیم $M$ و $M^{\perp}$ است و می نویسیم(رجوع کنید به [۳۳]):

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

## ۳.۱ عملگرهای بیضوی، اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس

**تعریف ۱.۳.۱** ( بردار گرادیان )

اگر $u$ در $R^n$ تعریف شده باشد گرادیان $u$ در $x = (x_1, ..., x_n)$ برداری است در $R^n$ که با $\nabla u = gradu = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ تعریف می شود.

**تعریف ۲.۳.۱** ( دیورژانس )

اگر $u = (u_1, ..., u_n)$ یک میدان برداری باشد دیورژانس $u$ در $x = (x_1, ..., x_n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$div\, u = \nabla . u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

**تعریف ۳.۳.۱** ( عملگرهای بیضوی )

فرض کنید $\Omega$ یک ناحیه هموار و کراندار در $R^n$ باشد.

مسئله‌ای به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu(x) = \circ, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

که در آن عملگر دیفرانسیلی $L$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = -\sum_{i,j=۱}^{N} a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{i=۱}^{N} a_i\partial_i + c \qquad (۲.۱)$$

عملگر فوق را در نقطه $x = (x_۱, ..., x_N) \in \Omega$ بیضوی گوییم اگر و تنها اگر ضریب مثبت $\mu(x)$ موجود باشد به طوریکه

$$\sum_{i,j=۱}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x)\sum_{i=۱}^{N}\xi_i^۲$$

برای هر بردار حقیقی $(\xi_۱, ..., \xi_N)$ .

عملگر $L$ را بر $\Omega$ بیضوی گوییم هرگاه بر هر نقطه از $\Omega$ بیضوی باشد.

همچنین این عملگر را بیضوی یکنواخت می‌نامیم اگر در هر نقطه از $\Omega$ بیضوی باشد و یک ثابت $\mu_\circ$ موجود باشد به طوری که $\mu(x) \geq \mu_\circ$ برای هر $x \in \Omega$.

عملگر بیضوی یکنواخت $L$ را از نوع دیورژانس گوییم اگر

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u)cu$$

با ضرایب کراندار $a_{ij} = a_{ji}$ باشد.

فرض کنید ضرایب $L$ یعنی $a_{ij}$، $a_i$ و $c$ همگی در $C^\alpha(\bar{\Omega})$ باشند.

عملگر مرزی $B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = b_\circ + b_۱\frac{\partial}{\partial n}$$