دانشگاه شهیــد بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضیات محض گـرایش منطق ریاضی

موضوع:

رویکردی جدید به قضایای گودل

استاد راهنما:
دکتر مرتضی منیری

استاد مشاور:
دکترعلیرضا سالمکار

دانشجو:
علی ولی زاده

شهریور ماه ۱۳۸۷

تاریخ ....

شماره ....

پیوست.......................

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»+

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

تلفن: ۲۹۹۰۱

باز گشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۲۰۰/۲۳۶۴/ت/د مورخ ۸۷/۶/۳ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: آقای

علی ولی زاده شماره شناسنامه: ۲۹۲۲ صادره از: ملایر متولد: ۱۳۶۲ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: ریاضی محض

با عنوان:

رویکردی جدید به قضایای گودل

به راهنمایی:

آقای دکتر مرتضی منیری

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۷/۶/۴ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۹ (نوزده تمام) درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** آقای دکتر مرتضی منیری	استادیار	شهید بهشتی	
۲- **مشاور:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	
۳- **داور:** آقای دکتر محمدمهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	
۴- **داور:** آقای دکتر مسعود پورمهدیان	دانشیار	صنعتی امیرکبیر	
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	

چکیده

اهمیت قضایای ناتمامیت گودل در منطق ریاضی و همچنین نتایج فلسفی که از این قضایا می‌توان بدست آورد، انگیزه‌ی اینجانب در انتخاب موضوع این پایان‌نامه بود. این دستاورد گودل با رد کردن برنامه‌ی هیلبرت، مبنی بر یافتن اصول موضوعه‌ای برای ریاضیات به همراه اثباتی از سازگاری آنها، مسیر تحقیقات منطق ریاضی را تغییر داد. روند بدست آوردن نتایج جدید با اتکا به روش‌های گودل تا امروز نیز ادامه دارد.

موضوع اصلی این پایان‌نامه ارائه‌ی اثباتی جدید، مبتنی بر مفاهیم نظریه مدل، برای قضیه دوم ناتمامیت گودل است. در واقع در این پایان‌نامه اثبات می‌شود که Π_2 - نتایجِ PA، دارای مدلی ۱ - بسته است. از طرفی ثابت می‌کنیم که هر مدل ۱ - بسته از Π_2 - نتایجِ PA، جمله‌ی $\neg Cons(PA)$ را ارضاء می‌کند، که اثباتی دیگر از قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل بدست می‌دهد. همچنین با استفاده از روشی مشابه، نشان می‌دهیم که PA مدلی به صورت وجودی بسته ندارد. به علاوه، اثباتی از قضیه دوم ناتمامیت صوری شده با استفاده از قضیه تمامیت صوری شده ارائه می‌دهیم. و در پایان به کاربردی از روش‌های گودل و لم قطری سازی در فلسفه اشاره می‌کنیم.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر مرتضی منیری که زحمت راهنمایی بنده را در انجام این پایان‌نامه متقبل شدند تشکر کنم. راهنمایی‌های ایشان نه تنها در مسائل فنی بلکه در تشخیص روش درست تحقیق نیز بسیار کارساز بود. از جناب آقای دکتر علیرضا سالمکار که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و اساتید محترم آقایان دکتر محمد مهدی ابراهیمی و دکتر مسعود پورمهدیان که عهده‌دار داوری این پایان‌نامه بودند، متشکرم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمود بینای مطلق، استاد دانشگاه صنعتی اصفهان، که در دوره‌ی کارشناسی باعث آشنایی اینجانب با منطق ریاضی و قضایای گودل و اهمیت آنها در منطق و فلسفه شدند کمال قدردانی را می‌نمایم، اگر چنین کاری ممکن باشد. در پایان باید از خانواده‌ام که شرایط مساعدی را برای انجام این پایان‌نامه مهیا کردند تشکر کنم و از آنها به دلیل عدم انجام وظایفم در طول تألیف این پایان‌نامه عذرخواهی نمایم.

فهرست مندرجات

مقدمه

دستاوردهای گودل[۱] در شاخه‌های مختلف منطق ریاضی از اهمیتی اساسی برخوردارند. جایگاه او حتی در مقایسه با منطق‌دانان بزرگی چون تارسکی[۲] ، چرچ[۳] ، آلن تورینگ[۴] و ... همچنان در مرتبه‌ای رفیع تر قرار می‌گیرد. بنیان نظریه مدل بر قضیه‌ای استوار است که نام گودل را به دنبال دارد، منظور ما قضیه تمامیت گودل است. قضیه فشردگی که خود از اهمیت زیادی برخوردار است نتیجه‌ای ساده از قضیه تمامیت است. بنابر روایتی (هیلاری پاتنام[۵] در [۱۰]) قضیه چرچ مبنی بر تصمیم‌ناپذیر بودن منطق مرتبه اول از پیش بر گودل آشکار بوده است. از دیگر نتایج مهم بدست آمده توسط گودل می‌توان به قضیه گودل ـ کوهن

[۱] Kurt Gödel
[۲] Alfred Tarski
[۳] Alonzo Church
[۴] Alan Turing
[۵] Hilary Putnam

درباره‌ی استقلال فرضیه‌ی پیوستار و اصل انتخاب از اصول موضوعه‌ی زرملو ـ فرانکل برای نظریه‌ی مجموعه‌ها اشاره کرد؛ گودل در دهه‌ی ۳۰ میلادی ثابت کرد که AC و CH با اصول موضوعه‌ی ZF سازگارند و کوهن در ۱۹۶۲ نشان داد که نقیض آنها نیز با ZF سازگار هستند.

اما آنچه که گودل را به شهرت جهانی رسانده است قضایای ناتمامیت او هستند. پاتنام در [۱۰] گودل را «بزرگترین منطق‌دان بعد از ارسطو» می‌داند. قضایای ناتمامیت با رد کردن برنامه‌ی هیلبرت مبنی بر یافتن اصول موضوعه‌ای برای ریاضیات به همراه اثباتی از سازگاری آنها، مسیر تحقیقات منطق ریاضی را تغییر داد. همچنین قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل نشان داد که با فرض سازگاری حساب مرتبه اول پئانو، این نظریه توانایی اثبات همه‌ی جملاتی که در $\mathbb{N}$ درست هستند را ندارد. و آنچنان که دکتر مرتضی منیری در [۱] ابراز می‌دارند:

«... یعنی در زبان حساب جمله‌ای مانند φ موجود است که درست است ولی PA توانایی اثبات آنرا ندارد. قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل مثال مشخصی از یک چنین φای را عرضه می‌کند، یعنی $Cons(PA)$. $Cons(PA)$ جمله‌ای در زبان حساب است که از طریق کد کردن مفاهیم فرمول خوش ساخت، دنباله‌ای متناهی از فرمول‌های خوش ساخت، اثبات و در نهایت مفهوم اثبات‌پذیری در PA، به‌دست آمده است....» و سپس مولف این چنین ادامه می‌دهد که:

«... در واقع گودل نشان داد که دو قضیه‌ی فوق در مورد هر نظریه سازگار شامل PA که مجموعه‌ی اصول موضوعه‌ی آن بازگشتی (یعنی به طور الگوریتمیک قابل تمیز) باشد، برقرار است. توجه کنید که نتیجه‌ای بی‌درنگ از این قضایا این است که $Th(\mathbb{N})$ به طور بازگشتی اصل‌پذیر نیست، یعنی هیچ روش مکانیکی یا برنامه‌ی کامپیوتری برای تشخیص درستی‌های $\mathbb{N}$ موجود نیست. از طرف دیگر بنا بر قضیه‌های گودل، $PA + Cons(PA)$ و $PA + \neg Cons(PA)$ سازگارند و بنابراین مدل دارند. مدل‌های این دو نظریه، مدل‌های

متفاوتی از PA به دست می‌دهند.» در ادامه مولف به روش‌های ابداعی پریس [۱] و هرینگتون [۲] در بدست آوردن جملاتی مستقل از PA که دارای معنای ریاضی طبیعی‌تری نسبت به $Cons(PA)$ هستند، اشاره می‌کند. اما متذکر می‌شود که:

«... در هر حال باید متذکر شد که روش اخیر به اثبات استقلال جملاتی از نوع Π_2 از PA می‌انجامد، در حالی که $Cons(PA)$ فرمولی Π_1 است. یعنی قضیه‌های گودل استقلال جملاتی با پیچیدگی کمتر را نشان می‌دهند و این یک مزیت است.» قابل ذکر است که قضایا و روش‌های گودل نه تنها در منطق بلکه در سایر شاخه‌های علوم از جمله فلسفه نیز کاربرد دارند. که ما به یکی از این کاربردها در فصل سوم این پایان‌نامه اشاره می‌کنیم.

گودل آراء مشخص فلسفی نیز داشته است. به طوری که بعضی او را بیشتر یک فیلسوف می‌دانند تا یک ریاضی‌دان. البته این نظری است که پاتنام در [۱۰] با آوردن دلایلی آنرا قویاً رد می‌کند. از جمله آرای فلسفی او دلایلی است که در دست نوشته‌ای با عنوان «*Is Mathematics a Syntax of Language?*» برای رد صورت‌گرایی منتسب به کارناپ [۱] آورده است. او را در زمینه‌ی فلسفه ریاضی، افلاطون‌گرا می‌دانند چرا که در دست نوشته‌ی اخیر با استفاده از قضیه دوم ناتمامیت خود، دلیلی برای وجود اشیاء ابژکتیو [۲] ریاضی می‌آورد و صورت‌گرایی را رد می‌کند.

موضوع اصلی این پایان‌نامه ارائه برهان جدیدی برای قضیه‌ی دوم ناتمامیت، ذکر شده در مرجع [۲] است. برای این منظور مولفان ثابت کرده‌اند که Π_2 ـ نتایج PA دارای مدلی ۱ ـ بسته است و هر مدل ۱ ـ بسته از Π_2 ـ نتایج PA جمله‌ی $\neg Cons(PA)$ را ارضاء می‌کند، که اثباتی را از قضیه‌ی دوم ناتمامیت بدست می‌دهد. در راه اثبات این مطلب از استدلالی

[۱] Jeff B. Paris
[۲] Leo A. Harrington
[۱] Rudolf Carnap
[۲] objective

متکی به قطری سازی استفاده می‌کنیم. همچنین این روش بین مفهوم مدل‌های به طور وجودی بسته که مفهومی مربوط به نظریه مدل است و قضیه دوم ناتمامیت ارتباط برقرار می‌کند. با استفاده از روشی مشابه قضیه‌ای کلی را اثبات می‌کنیم که با استفاده از آن، فرض وجود مدلی به طور وجودی بسته برای PA به تعریف‌پذیری مدل استاندارد می‌انجامد؛ آنچه بنابر لم سرریز نا ممکن است. همچنین اثباتی از قضیه‌ی دوم نا تمامیت صوری شده را به کمک قضیه تمامیت صوری شده ارائه می‌دهیم. در پایان نیز به کاربردی از از روش‌های گودل و لم قطری سازی در فلسفه می‌پردازیم که در [۱۰] ذکر شده است. مولف در [۱۰] ثابت می‌کند که اگر این درست باشد که ما می‌توانیم «توانایی علمی» مان را به طور کامل با ماشین تورینگی شبیه‌سازی کنیم، آنگاه دانستن این واقعیت برای ما ناممکن است!

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به بیان قضایا و نتایجی می‌پردازیم که در فصل‌های آتی به کارمان خواهند آمد. بعضی از قضایا و نتایج بدون اثبات آورده شده‌اند مانند قضیه $MRDP$ و Σ_1 ـ تمامیت. همچنین برای قضیه‌ی تمامیت صوری شده تنها شمایی از برهان آمده است. در بخش اول این فصل که مربوط به اثبات کلاسیک قضایای گودل است بسیاری از اثبات‌ها حذف شده است زیرا چنین اثبات‌هایی در اغلب کتب آموزشی منطق مانند [۳] و [۹] وجود دارد و ذکر آنها در این پایان‌نامه بیشتر به منظور مقایسه آنها با روشی است که در فصل دوم آمده است. بجز بخش اول که از [۹] آمده است، سایر تعاریف و قضایا از مقاله‌ی اصلی یعنی [۲] و مراجع آن، از جمله [۵]، [۷]، [۸] و [۱۲] آمده است. همچنین از [۴] و [۶] برای بخش چهارم استفاده شده است.

۱.۱ اثبات کلاسیک قضایای ناتمامیت

در این بخش سعی شده است که تنها روندی کلی از اثبات قضایای ناتمامیت بر اساس مرجع [۹] بیان شود. به همین دلیل بسیاری از اثبات ها حذف شده است. هدف اصلی از بیان این مطالب مقایسه آنها با اثباتی است که در فصل بعد خواهد آمد. لازم به ذکر است که ما اثبات قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل را با استفاده از قضیه‌ی لاب[۱] ارائه می‌دهیم. همچنین به ازای $n \in \mathbb{N}$ منظور ما از $\bar{n}$ ترمی از زبان PA است که حاصل n بار تاثیر تابع تالی روی ثابتِ ۰ است.

روند اثبات قضایای گودل با معرفی دستگاه اصول موضوعه‌ی حساب مرتبه‌ی اول پئانو،PA ، آغاز می‌شود. سپس با اثبات صوری بسیاری از قضایای نظریه‌ی اعداد نشان داده می‌شود که این دستگاه به اندازه‌ی کافی قوی است. و بعد از معرفی توابع و روابط بازگشتی و کد گذاری زبان، به مفهوم نمایش پذیری می‌رسیم:

تعریف ۱.۱. تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ از اعداد طبیعی را در PA نمایش پذیر گوییم، هرگاه فرمولی با $n+1$ متغیر آزاد در زبان PA، مانند $A(x_1,\dots,x_{n+1})$ موجود باشد که به ازای هر دنباله از اعداد طبیعی مانند $a_1,\dots,a_n,b$ داشته باشیم:

(۱) : اگر $f(a_1,\dots,a_n)=b$، آنگاه $PA\vdash A(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,\bar{b})$.

(۲) : $PA\vdash \exists_1 x_{n+1} A(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n,x_{n+1})$.

تعریف ۲.۱. رابطه $R(x_1,\dots,x_n)$ از اعداد طبیعی را در PA نمایش پذیر گوییم، هرگاه فرمولی با n متغیر آزاد در زبان PA، مانند $A(x_1,\dots,x_n)$ موجود باشد که به ازای هر دنباله از اعداد طبیعی مانند $a_1,\dots,a_n$ داشته باشیم:

[۱] M. H. Löb

(۱) : اگر $R(a_1,\ldots,a_n)$ درست است، آنگاه $PA \vdash A(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$.

(۲) : اگر $R(a_1,\ldots,a_n)$ غلط است، آنگاه $PA \vdash \neg A(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$.

سپس قضیه زیر و نتیجه‌ی آن اثبات می‌شود:

قضیه ۳.۱. تابع $f(x_1,\ldots,x_n)$ از اعداد طبیعی بازگشتی است اگر و تنها اگر در PA نمایش پذیر باشد.

□

نتیجه ۴.۱. رابطه $R(x_1,\ldots,x_n)$ از اعداد طبیعی بازگشتی است اگر و تنها اگر در PA نمایش پذیر باشد.

□

سپس توابع و روابطی بازگشتی، تعریف می‌شوند که حاوی مفهوم‌های مهمی هستند. به عنوان مثال $sent(x)$ رابطه‌ای است که بیان می‌کند که x عدد گودلی یک جمله است. $d(u)$ تابعی است که به هر u داده شده، عدد گودلی فرمول $A(\bar{u})$ را نظیر می‌کند، جایی که u عدد گودلی فرمول $A(x)$ است. $d(u)$ را تابع قطری می‌گویند. $neg(x,y)$ رابطه‌ای است که بیان می‌کند که x عدد گودلی فرمولی است که نقیض فرمولی با عدد گودلی y است. رابطه‌ی $proof(y)$ با نحوه‌ی تعریف شدنش به این معناست که y عدد گودلی یک اثبات است. همچنین رابطه‌ی $pf(y,x)$ که به این معنی است که y عدد گودلی اثباتی برای فرمولی با عدد گودلی x است. تمامی روابط و توابعی که ذکر شدند بازگشتی هستند و بنابر قضیه ۳.۱ و نتیجه ۴.۱ در PA نمایش پذیرند. بنابراین در PA فرمول‌هایی به آنها نظیر می‌شود. در این پایان‌نامه فرمول متناظر با $pf(y,x)$ و $neg(x,y)$ به ترتیب $Pf(y,x)$ و $Neg(x,y)$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین اگر C عبارتی در زبان PA و عدد گودلی آن q باشد، ما در این بخش

$\bar{q}$ را با $\ulcorner C \urcorner$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۵ (لم قطری سازی).

به ازای هر فرمول $A(x)$ که تنها یک متغیر آزاد دارد، جمله‌ای مانند C وجود دارد که برای آن داریم:

$$PA \vdash C \leftrightarrow A(\ulcorner C \urcorner)$$

□

فرمول $\forall y\ \neg Pf(y,x)$ را در نظر می‌گیریم. این فرمول دارای تنها یک متغیر آزاد است و بنا بر لم قطری سازی جمله‌ای مانند G وجود دارد که برای آن داریم:

$$PA \vdash\ G \leftrightarrow \forall y\ \neg Pf(y, \ulcorner G \urcorner)$$

تحت تعبیر در مدل استاندارد $\forall y\ \neg Pf(y, \ulcorner G \urcorner)$ به این معنی است که هیچ عدد طبیعی که عدد گودلی اثباتی از G در PA باشد وجود ندارد، که معادل این مطلب است که G در PA اثبات نمی‌شود. یعنی G با اثبات ناپذیریش در PA معادل است. به عبارت دیگر G می‌گوید که «من اثبات پذیر نیستم». قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل بیان می‌کند که G در PA تصمیم ناپذیر است. G را جمله‌ی گودلی PA گویند.

قبل از اینکه قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل را بیان و اثبات کنیم باید به معرفی مفهوم ω ـ سازگاری بپردازیم:

تعریف ۱.۶. نظریه‌ی K در زبان حساب را ω ـ سازگار گوییم اگر و تنها اگر، به ازای هر فرمول $A(x)$ داشته باشیم که اگر به ازای هر عدد طبیعی n، $\neg A(\bar{n})$ در K ثابت شود، آنگاه $K \nvdash \exists x\ A(x)$.

قضیه ۷.۱. اگر K نظریه‌ای ωـ سازگار باشد، آنگاه سازگار است.

□

قضیه ۸.۱ (قضیه اول ناتمامیت گودل).
فرض کنید G جمله‌ی گودلی PA باشد.
(الف) اگر PA سازگار باشد، آنگاه $PA \nvdash G$.
(ب) اگر PA، ωـ سازگار باشد، آنگاه $PA \nvdash \neg G$.

برهان.

(الف) فرض کنید(فرض خلف) $PA \vdash G$. فرض کنید r عدد گودلی اثباتی از G در PA باشد. بنابراین $pf(r,q)$ درست است. از آنجا که رابطه‌ی pf در PA با فرمول Pf نمایش پذیر است خواهیم داشت $PA \vdash Pf(\bar{r},\bar{q})$. اما $\bar{q} = \ulcorner G \urcorner$ و در نتیجه $PA \vdash Pf(\bar{r},\ulcorner G \urcorner)$. ما از قبل داشتیم که $PA \vdash G \leftrightarrow \forall y \neg Pf(y,\ulcorner G \urcorner)$. در نتیجه بنابر فرض خلف داریم:

$$PA \vdash \forall y \neg Pf(y,\ulcorner G \urcorner)$$

و در نتیجه:

$$PA \vdash \neg Pf(\bar{r},\ulcorner G \urcorner)$$

که بنابر سازگاری PA با $PA \vdash Pf(\bar{r},\ulcorner G \urcorner)$ در تناقض است. و در نتیجه حکم بدست می آید.

(ب) فرض کنید(فرض خلف) $PA \vdash \neg G$. از آنجایی که داریم:

$$PA \vdash G \leftrightarrow \forall y \neg Pf(y,\ulcorner G \urcorner)$$

بنابراین داریم:

$$PA \vdash \neg\forall y\ \neg Pf(y, \ulcorner G \urcorner)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$PA \vdash \exists y\ Pf(y, \ulcorner G \urcorner) \tag{*}$$

از طرف دیگر بنابر فرض قضیه می‌دانیم که PA، ωـ سازگار است. پس بنابر قضیه ۵.۱، PA سازگار نیز خواهد بود. در نتیجه از $PA \vdash \neg G$ داریم $PA \nvdash G$. یعنی اثباتی در PA برای G وجود ندارد. بنابراین رابطه‌ی $pf(n, q)$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ غلط است. پس به ازای هر عدد طبیعی داریم $PA \vdash \neg Pf(\bar{n}, \ulcorner G \urcorner)$. بنابر فرض قضیه مبنی بر ωـ سازگار بودن PA خواهیم داشت $PA \nvdash \exists y\ Pf(y, \ulcorner G \urcorner)$ که در تناقض با $(*)$ است.

□

قضیه ۹.۱ اگر G جمله‌ی گودلی PA باشد، آنگاه G در مدل استاندارد درست است.

برهان. فرض کنید (فرض خلف) $\mathbb{N} \nvDash G$. بنابراین $\mathbb{N} \models \neg G$. از طرفی داریم $\mathbb{N} \models G \leftrightarrow \forall y\ \neg Pf(y, \ulcorner G \urcorner)$. در نتیجه خواهیم داشت $\mathbb{N} \models \exists y\ Pf(y, \ulcorner G \urcorner)$. بنابراین $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\mathbb{N} \models Pf(\bar{n}, \ulcorner G \urcorner)$. و این یعنی n عدد گودلی اثباتی برای G است و این معادل با این است که $PA \vdash G$. اما بنابر قضیه اول ناتمامیت گودل می‌دانیم که $PA \nvdash G$. پس فرض خلف ما غلط است و داریم:

$$\mathbb{N} \models G$$

□

می‌بینیم که در قسمت (ب) از قضیه اول ناتمامیت به ωـ سازگار بودن PA نیاز داریم. راسر[1] در ۱۹۳۶ نشان داد که با تغییر جمله‌ی تصمیم ناپذیر G در قضیه اول ناتمامیت می‌توان شرط ωـ سازگاری PA را با سازگاری آن جایگزین کرد. در واقع او فرمول $E(x)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیرد:

$$\forall y\ (Pf(y,x) \to \forall z\ (Neg(x,z) \to \exists w(w < y \wedge Pf(w,z))))$$

جایی که $Neg(x,z)$ فرمولی است که رابطه‌ی $neg(x,z)$ را در PA نمایش می‌دهد. حال با استفاده از لم قطری سازی برای $E(x)$، جمله‌ای مانند R بدست می‌آید که دارای خاصیت زیر است :

$$PA \vdash\ R \leftrightarrow E(\ulcorner R \urcorner)$$

جمله‌ی R را جمله‌ی راسری PA گویند. و درباره‌ی آن قضیه‌ی بعد را داریم.

قضیه ۱.۱۰ (قضیه گودل ـ راسر).

فرض کنید R جمله‌ی راسری PA باشد. اگر PA سازگار باشد، آنگاه R در PA تصمیم ناپذیر است.

$\square$

اگر $Pr(x)$ اختصاری برای فرمول $\exists y\ Pf(y,x)$ باشد. برای اثبات قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل ابتدا خواصی از محمول $Pr(x)$ اثبات می‌شود که به آنها شرایط هیلبرت ـ برنیز[1] یا شرایط اشتقاق می‌گویند و عبارتند از:

$HB1$: اگر $PA \vdash A$ آنگاه $PA \vdash Pr(\ulcorner A \urcorner)$.

[1] J. B. Rosser

[1] Hilbert-Bernays

$HB2$: $PA \vdash Pr(\ulcorner A \urcorner) \to Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner A \urcorner) \urcorner)$.

$HB3$: $PA \vdash Pr(\ulcorner A \urcorner) \wedge Pr(\ulcorner A \to B \urcorner) \to Pr(\ulcorner B \urcorner)$.

می‌توان لم قطری سازی را درباره‌ی فرمول $Pr(x)$ نیز به کار برد که در نتیجه جمله‌ای مانند H وجود خواهد داشت که برای آن داریم:

$$PA \vdash\ H \leftrightarrow Pr(\ulcorner H \urcorner)$$

جمله‌ی H با اثبات پذیری خودش معادل است. در واقع H می‌گوید «من اثبات پذیر هستم». این جمله را جمله‌ی هنکینی[1] PA گویند. سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا H در PA اثبات پذیر است، رد می‌شود و یا برای PA تصمیم ناپذیر است؟ لاب در سال ۱۹۵۵ با استفاده از شرایط اشتقاق در اثباتش به این سوال پاسخ داد.

قضیه ۱۱.۱ (قضیه لاب).
فرض کنید C جمله‌ای از PA است. اگر $PA \vdash Pr(\ulcorner C \urcorner) \to C$، آنگاه $PA \vdash C$.

□

نتیجه ۱۲.۱. اگر H جمله‌ی هنکینی PA باشد، آنگاه $PA \vdash H$ و H در مدل استاندارد درست است.

برهان. داریم $PA \vdash H \leftrightarrow Pr(\ulcorner H \urcorner)$. بنابراین $PA \vdash Pr(\ulcorner H \urcorner) \to H$ و با استفاده از قضیه‌ی لاب خواهیم داشت $PA \vdash H$.

□

[1] Henkin

با استفاده از قضیه‌ی لاب می‌توان اثباتی برای قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل ارائه داد:

نتیجه ۱.۱۳ (قضیه دوم ناتمامیت گودل).
اگر PA سازگار باشد، آنگاه $PA \nvdash Cons(PA)$.

برهان. به این علت که $PA \vdash \bar{0} \neq \bar{1}$، سازگاری PA نتیجه می‌دهد که $PA \nvdash \bar{0} = \bar{1}$. بنابر قضیه‌ی لاب خواهیم داشت :

$$PA \nvdash Pr(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner) \to \bar{0} = \bar{1}$$

بنابراین با استفاده از اینکه به ازای هر دو فرمول A و B داریم $(A \to B) \leftrightarrow \neg A \to$ ، نتیجه می‌گیریم :

$$PA \nvdash \neg Pr(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$$

و این یعنی :

$$PA \nvdash Cons(PA)$$

□

تذکر. تمامی قضایا و نتایجی که در این بخش ثابت شد برای هر نظریه‌ای مانند K در زبان حساب که شرایط زیر را داشته باشد نیز صادق هستند:

۱ ـ به طور بازگشتی اصل پذیر باشد.

۲ ـ اگر $K \vdash \bar{r} = \bar{s}$، آنگاه داشته باشیم $r = s$.

۲.۱ لم سرریز

در این بخش لم سرریز را به همراه شمایی از اثبات آن بیان می‌کنیم. سپس حالت محدود شده‌ی آنرا برای نظریه‌ای ضعیف تر ثابت می‌کنیم. نظریه‌ای که فرض می‌شود در زبان PA است و به ازای یک $n \in \mathbb{N}$ تنها شامل $I\Pi_n + exp$ است. اگر M مدلی نااستاندارد باشد و $a \in M$، آنگاه منظور ما از $\underline{a}$ ثابتی است که به ازای a به زبان اضافه شده است.

برای اثبات لم سرریز ابتدا نشان داده می‌شود که کوچکترین عدد نااستاندارد در یک مدل نااستاندارد از PA وجود ندارد وسپس:

لم ۱.۲. مجموعه‌ی اعداد استاندارد در مدلی نااستاندارد از PA تعریف پذیر نیستند.

برهان. فرض کنید M مدلی نااستاندارد از PA باشد و فرمول $\varphi(x)$ در زبان PA وجود دارد که $M \models \varphi(\underline{a})$ اگر و تنها اگر $a \in \mathbb{N}$. بنابراین $\neg\varphi(x)$ عناصر نااستاندارد M را تعریف می‌کند. از آنجا که LNP (اصل کوچکترین عدد)[۱] در PA ثابت می‌شود خواهیم داشت

$$PA \vdash \exists x\ (\neg\varphi(x) \wedge \forall y < x\ \varphi(y))$$

که به معنای وجود کوچکترین عنصر نااستاندارد در M است. که بنابر توضیحات قبل از لم، ناممکن است.

□

قضیه ۲.۲ (لم سرریز).
اگر $\varphi(x)$ برای تعداد نامتناهی عنصر استاندارد در مدلی نااستاندارد درست باشد، آنگاه $\varphi(x)$ برای عنصری نااستاندارد از آن مدل نیز صادق است.

[۱] Least Number Principle