بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای بهزاد ستاری گلباغی دانشجوی رشته: **ریاضی محض** به شماره دانشجویی **۹۱۵۲۳۱۱۰۲۳** تحت عنوان: **« کلاس هموکلینیک با خواص C^1 - پایداری »** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سید مسعود امینی	دانشیار	
۲- استادمشاور	دکتر خسرو تاج بخش	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکترعباس فخاری	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی- پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال **۱۳۹۳** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **مسعود امینی** و مشاوره آقای دکتر **خسرو تاجبخش** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یك درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰% بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهاي خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایي مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده براي فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **بهزاد ستاری گلباغی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: **بهزاد ستاری گلباغی**

تاریخ و امضا:

۹۳/۱۱/۲۵

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه : با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فني است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضاي هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمي و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکي از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولي مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو مي‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارك علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌هاي ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامي طرحهای تحقیقاتی دانشگاه می‌باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یك تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **بهزاد ستاری گلباغی** دانشجوی رشته **آنالیز ریاضی** ورودی سال تحصیلی **۱۳۹۱** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:

تاریخ: ۹۳/۱۱/۲۵

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

کلاس های هموکلینیک با خواص C^1 - پایداری سایه‌پذیر

دانشجو:
بهزاد ستاری گلباغی

استاد راهنما:
دکتر مسعود امینی

استاد مشاور:
دکتر خسرو تاجبخش

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم به پیشگاه مقدس او که سرانجام روزی با خورشید ظهور تیرگی های شب غیبت را خواهد زدود.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم، دو چشمه سار جاری زندگی ام

تقدیم به همسر مهربان و امید زندگی ام

و

تقدیم به کسانی که دوستشان دارم.

پروردگارا

تو را سپاس که مرا توفیق عنایت کردی تا این مهم را به اتمام برسانم، مرا آن شایستگی عنایت فرما، تا در بازمانده ی حیات خویش، سزاوار دانش فزون تر از جانب تو باشم.

با سپاس فراوان از اساتید گرانقدر دکتر مسعود امینی و دکتر خسرو تاجبخش که با وسعت نظر مرا از راهنمایی ها و الطاف بی دریغشان بهره مند ساختند و با منش استادانه ی خویش درس اخلاق و زندگی به بنده آموختند.

همچنین از اساتید گرانقدر سرکار خانم دکتر سعدی و جناب آقایان دکتر رجائی و دکتر حیدری که در طول این مقطع تحصیلی همواره از دانش ایشان بهره مند بودم کمال تشکر را دارم.

چکیده

این پایان‌نامه با معرفی ویژگی L_p سایه‌زدن به بررسی ویژگی C^1 -پایداری L_p سایه‌پذیری روی هموکلینیک کلاس ها می پردازد. همچنین نشان می‌دهد اگر وابرسانی f روی هموکلینیک کلاس وابسته به نقطه‌ی هذلولوی تناوبی p، C^1-پایدار سایه‌پذیر باشد آنگاه $H(p,f)$ یک تجزیه‌گر مغلوب دارد. در پایان ضمن معرفی مولفه‌زنجیری $C_p(f)$ و خاصیت انبساطی نشان می‌دهد اگر $C_p(f)$، C^1-پایدار سایه‌پذیر باشد و $C_p(f)$ -جرم از وابرسانی f، انبساطی باشد آنگاه هر نقطه‌ی تناوبی $C_p(f)$ هذلولوی است. مرجع اصلی این پایان‌نامه [۴] می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: *کلاس هموکلینیک، L_p مولفه‌ی زنجیری، C^1 - پایداری L_p سایه‌پذیر، تجزیه‌گر مغلوب، مجموعه هذلولوی.*

فهرست

مقدمه

فهم C^1- پایداری روی سیستم‌های دینامیکی یکی از مدرنترین چالش‌ها در سیستم‌های دینامیکی است. از این جهت دو نوع مرسوم سیستم‌های دینامیکی به نظر می‌آید، اول: دینامیک‌های عمومی روی کل منیفلد دوم: دینامیک‌های محلی مانند مولفه‌های زنجیری و هموکلینیک کلاس‌ها.
اولین دسته بررسی‌ها روی دینامیک‌های عمومی توسط منیه [۱۲] شروع شد. او ثابت کرد اگر f، C^1- پایدار انبساطی باشد آنگاه f آناسوف است. همچنین دیاز [۳] با یک مقاله قابل توجه رابطه بین پایداری متعدی و هذلولوی بودن را بررسی کرده است.
با مطالعه روی ویژگی‌های متفاوت سایه‌زنی مانند سایه‌زنی معمولی، سایه‌زنی حدی، سایه‌زنی مداری و L_pسایه‌زنی نتایج قابل توجه دیگری بدست آمده است [۵، ۱۴، ۱۵، ۱۹].
اخیرا مطالعه ویژگی‌های پایداری روی زیر دینامیک‌های محلی موضوعات قابل توجهی را برای تعداد زیادی از دینامیک‌ها به‌وجود آورده است. برای مثال پسیفیکو [۱۳] ثابت کرد که هموکلینیک کلاس‌های C^1- پایدار انبساطی روی یک خمینه سه بعدی هذلولوی هستند. این نتیجه توسط سامبارینو و ویتز [۲۰] و یانگ و گان [۲۵] توسیع داده شد. همچنین ساکای [۱۸] نوع خاصی از مولفه‌های زنجیری C^1- پایدار سایه‌پذیر را مطالعه کرد و هذلولوی بودن آنها را ثابت کرد.
وِن [۲۴] نتایج ساکای را با حذف شرط جرم- انبساطی بهبود بخشید. همچنین لی و ساکای [۱۰] با اضافه کردن شرط بیشینه موضعی به جای جرم- انبساطی نتایج یکسانی را به دست آوردند.
فصل اول این پایان‌نامه به مفاهیم مقدماتی اختصاص داده شده است، ابتدا خاصیت سایه‌زنی را برای یک شبه‌مدار بیان و سپس خاصیت L_pسایه‌زنی معرفی شده است. در ادامه تعاریف هذلولوی و لم سایه‌زنی بیان شده است. در بخش آخر فصل اول ضمن معرفی هموکلینیک کلاس برای یک نقطه هذلولوی و خاصیت C^1- پایداری L_pسایه‌پذیری و C^1- پایداری انبساطی برای آن، برخی از ویژگی‌های آنها بیان شده است.
فصل دوم، در بخش اول نشان داده شده است که اگر یک وابرسانی f روی هموکلینیک کلاس $H(p, f)$، C^1- پایدار L_pسایه‌پذیر باشد آنگاه $H(p, f)$ یک تجزیه‌گر مغلوب دارد(قضیه ۲.۱.۱). در بخش دوم شرط عدم وجود دور مختلف‌البعد برای وابرسانی f روی هموکلینیک کلاس $H(p, f)$ بررسی شده است(قضیه ۲.۲.۱). در بخش آخر این فصل نیز در مورد خاصیت C^1- پایداری سایه‌پذیری لیپ شیتس بحث شده است.
در فصل سوم در مورد C^1- پایداری سایه‌پذیری $C_p(f)$ بحث شده است و ثابت شده است که اگر برای هر وابرسانی g، C^1- نزدیک f، $C_{p_g}(g)$ یک تجزیه‌گر مغلوب را بپذیرد و $g_{|C_{p_g}(g)}$ خاصیت سایه‌زنی داشته باشد آنگاه برای هر نقطه هذلولوی تناوبی $q \in C_{p_g}(g)$ داریم: $index(q) = index(p_g)$(گزاره ۳.۱.۳). در پایان این فصل نیز ثابت می‌شود که اگر $C_p(f)$، C^1- پایدار سایه‌پذیر باشد و $C_p(f)$- جرم از f، انبساطی باشد آنگاه هر نقطه تناوبی $q \in C_p(f)$ هذلولوی است(گزاره ۳.۲.۱).

فصل ۱
مفاهیم پایه‌ای

در این فصل تعاریف اولیه و مقدماتی مربوط به سیستم‌های دینامیکی و خاصیت C^1-پایداری L_p سایه‌زنی را ارائه می‌دهیم که در دو فصل بعد مورد نیاز هستند. با استفاده از این مطالب خواهیم توانست به اصل موضوع بپردازیم. عمده مطالب این فصل از مراجع [۴] و [۲۲] می‌باشد.

۱.۱ سیستم دینامیکی

فرض کنید X و Y دو زیر مجموعه‌ی غیر تهی از فضای متریک (M,d) باشند. فاصله‌ی هاسدورف X و Y را با $d_H(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_H(X,Y) = inf\{\varepsilon \geq 0; X \subseteq Y_\varepsilon, Y \subseteq X_\varepsilon\}$$

که

$$X_\varepsilon = \cup_{x\in X}\{z \in M : d(x,z) \leq \varepsilon\}.$$

فرض کنید $(M, dist)$ یک فضای متریک و $H(M)$ مجموعه‌ی همانسانی‌های روی M باشند. گروه توپولوژیک آبلی G را با عمل + در نظر بگیرید. یک عمل پیوسته

$$\Phi : G \times M \longrightarrow M$$

که دارای شرایط زیر است:

(i) $\Phi(n,.) \in H(M)$ برای هر $n \in G$

(ii) $\Phi(\circ, x) = x$ برای هر $x \in M$

(iii) $\Phi(n+m,.) = \Phi(n,\Phi(m,.))$ برای هر $n,m \in G$

سیستم دینامیکی گفته می‌شود. وقتی $G = \mathbb{Z}$ آنگاه عمل پیوسته فوق را سیستم دینامیکی گسسته می‌نامیم و هنگامی که $G = \mathbb{R}$ آنگاه عمل پیوسته فوق را یک سیستم دینامیکی پیوسته می‌نامیم.

همانسانی $f : M \longrightarrow M$ یک سیتم دینامیکی به شکل

$$\Phi : \mathbb{Z} \times M \longrightarrow M$$

توسط ضابطه‌ی

$$\Phi(n,x) = f^n(x), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in M$$

تولید می‌کند. زیرا برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم که $\Phi(n,.) : M \longrightarrow M$ یک همانسانی است. با توجه به اینکه f یک به یک، پوشا و پیوسته است پس $\Phi(n,.)$ نیز یک به یک،پوشا و پیوسته است همچنین چون $f^n o f^{-n} = id$ که در آن id نگاشت همانی روی M است بنابراین $\Phi(n,.)$ وارون‌پذیر است و وارون آن پیوسته است بنابراین $\Phi(n,.)$ به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ یک همانسانی است و همچنین $\Phi(\circ, x) = f^\circ(x) = x$ برای هر $x \in M$ و داریم:

$$\Phi(n+m, x) = f^{n+m}(x) = f^n f^m(x) = \Phi(n, \Phi(m.x))$$

برای هر $n,m \in \mathbb{Z}$ و $x \in M$.

مدار $o(x)$ از نقطه $x \in M$ در سیستم دینامیکی Φ به صورت مجموعه

$$O(x) = \{\Phi(n,x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

می‌باشد. معمولا یک همانسانی f را با یک سیستم دینامیکی Φ تولید شده توسط آن می‌شناسیم و f رایک سیستم دینامیکی می‌نامیم.

نقطه x را یک **نقطه ثابت** برای f می‌نامیم اگر $f(x) = x$.

نقطه x یک **نقطه دوره‌ای** یا **تناوبی** برای f می‌نامیم اگر برای یک n مثبت، $f^n(x) = x$. کوچکترین عدد صحیح مثبت n با این ویژگی را دوره تناوب x می‌نامیم و می‌نویسیم : $\pi(x) = n$.

مجموعه تمام نقاط ثابت f را با **fix(f)** و مجموعه تمام نقاط تناوبی f را با **per(f)** نمایش می‌دهیم.

مجموعه $\Lambda \subset M$ را f**-پایا** گوییم هرگاه $f(\Lambda) = \Lambda$. مجموعه تمام نقاط ثابت و نقاط تناوبی مجموعه‌هایی f-پایا هستند.

تعریف ۱.۱.۱. یک دنباله$\xi = \{x_n \in M : n \in \mathbb{Z}\}$ را یک d-شبه مدار، $d \geq ۰$، از سیستم دینامیکی f روی $\mathbb{Z}$ گوییم اگر نامساوی

$$dist(x_{n+۱}, f(x_n)) < d, \quad n \in \mathbb{Z}$$

برقرار باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $\Lambda \subseteq M$ باشد. یک سیستم دینامیکی f را دارای خاصیت سایه‌زنی روی Λ گوییم اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $d > ۰$ای موجود باشد به طوری که برای هر d-شبه مدار $\xi = \{x_n \in \Lambda\}_{n\in\mathbb{Z}}$ نقطه‌ی $x \in M$ موجود باشد بطوری‌که

$$dist(x_n, f^n(x)) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

اگر این خاصیت برای $\Lambda = M$ برقرار باشد می‌گوییم f دارای خاصیت سایه‌زنی است .

در این حالت می‌گوییم d-شبه‌مدار $\xi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ توسط نقطه x ، (ε, f)-سایه شده (یا ε-سایه شده) است.

مثال ۳.۱.۱. دایره S^1 را با مختصات $x \in [0,1)$ و همانسانی f از S^1 تولید شده توسط نگاشت $f(x)=x$ در نظر بگیرید. $d>0$ را ثابت بگیرید و دنباله‌ای از نقاط $\xi=\{x_k: k\in\mathbb{Z}\}\subset S^1$ را طوری در نظر بگیرید که $x_0=0$ و $x_{k+1}=x_k+\frac{d}{2}(mod 1), k\in\mathbb{Z}$ داریم

$$| x_{k+1}-f(x_k) |=| x_k+\frac{d}{2}-x_k |=\frac{d}{2}<d$$

پس دنباله ξ یک d-شبه مدار است. واضح است که هر مدار f یک نقطه ثابت است یعنی برای هر $x\in[0,1)$ داریم $O(x)=\{x\}$.

البته f دارای خاصیت سایه زنی نیست. زیرا اگر به خلاف فرض کنیم که دارای خاصیت سایه زنی باشد بنابراین به ازای $\varepsilon=\frac{1}{4}$، $d>0$ وجود دارد که هر d-شبه مدار توسط یک نقطه، (ε,f)-سایه شده می‌شود. پس طبق فرض دنباله ξ به ازای $d<\frac{2}{4}$ توسط نقطه‌ای مانند x ، $(\frac{1}{4},f)$-سایه شده است. یعنی مجموعه ξ مشمول یک همسایگی x به شعاع $\frac{1}{4}$ است که این غیرممکن است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید p یک عدد حقیقی مثبت باشد. یک d-شبه‌مدار $\xi=\{x_n: n\in\mathbb{Z}\}$ را $d-L_p$ شبه مدار می‌گوییم اگر نامساوی

$$(\sum_{n\in\mathbb{Z}} dist(f(x_n),x_{n+1})^p)^{\frac{1}{p}}<d$$

برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $\Lambda\subset M$ باشد. یک سیستم دینامیک f را دارای خاصیت L_p-سایه‌زنی روی Λ گوییم اگر برای هر $\varepsilon>0$، $d>0$ای موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $d-L_p$ شبه‌مدار نامتناهی $\xi=\{x_n\in\Lambda\}_{n\in\mathbb{Z}}$ نقطه $x\in M$ موجود باشد که

$$(\sum_{n\in\mathbb{Z}} dist(f^n(x),x_n)^p)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

اگر این خاصیت برای $M = \Lambda$ برقرار باشد می‌گوییم f دارای خاصیت L_p-سایه‌زنی است.

در این حالت می‌گوییم $d - L_p$ شبه‌مدار $\xi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ توسط نقطه x ، $\varepsilon - L_p$ سایه شده است.

تعریف ۶.۱.۱. یک سیتم دینامیکی f را دارای خاصیت سایه‌زنی لیپ شیتس روی Λ گوییم اگر ثابت‌های مثبت $d_\circ$ و L وجود داشته باشند که برای هر d-شبه‌مدار $\{x_n \in \Lambda : n \in \mathbb{Z}\}$ ، $d \leq d_\circ$ ، نقطه x موجود باشد که

$$dist(x_n, f^n(x)) \leq Ld_\circ, \quad n \in \mathbb{Z}$$

اگر این خاصیت برای $M = \Lambda$ برقرار باشد در این صورت می‌گوییم f دارای خاصیت سایه‌زنی لیپ‌شیتس است.

مثال ۷.۱.۱. همانسانی $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\phi(x) = x + x^{۲} sgn(x)$ که $sgn(x)$ نگاشت علامت x است را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $W = \{x \in \mathbb{R} : \mid x \mid \leq ۱\}$.

می‌خواهیم نشان دهیم ϕ روی W دارای خاصیت سایه زنی است. $\epsilon > \circ$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $b = \epsilon^{۲}/۲$. یک d-شبه مدار $\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset W$ را با $d \leq b$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم

$$\mid x_k \mid < \epsilon \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{۱.۱}$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم k وجود داشته باشد که $\mid x_k \mid \geq \epsilon$. اگر $x_k \geq \epsilon$ باشد، نامساوی

$$x_{k+۱} > \phi(x_k) - d \geq x_k + b,$$

و

$$x_{k+m} > x_k + mb \qquad m \geq \circ$$

را بدست می‌آوریم. که این نشان می‌دهد دنباله $\{x_m\}$ هنگامی که m به اندازه کافی بزرگ باشد خارج W می افتد. مورد $x_k \leq -\epsilon$ به طریق مشابه اثبات می‌شود.

از رابطه (۱.۱) نتیجه می‌گیریم هر d-شبه مدار ξ توسط نقطه $x = ۰$ ، (ϵ, ϕ)-سایه زده می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که ϕ روی W خاصیت سایه زنی لیپ شیتس ندارد. عدد کوچک $d > ۰$ و $x_k = d^{\frac{۱}{۲}}$ که $k \in \mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه

$$\mid \phi(x_k) - x_{k+۱} \mid = x_k^{۲} = d.$$

فرض می‌کنیم ϕ روی W خاصیت سایه زنی لیپ شیتس با ثابت های $L, d_۰$ داشته باشد. برای d نابرابری

$$\mid \phi^k(x) - x_k \mid \leq Ld, k \in \mathbb{Z}$$

فقط برای $x = ۰$ ممکن می‌باشد. زیرا مدار هر نقطه $x \neq ۰$ خارج W می‌افتد. بنابراین نتیجه می‌گیریم $Ld \leq d^{\frac{۱}{۲}}$ که با کوچک بودن d در تناقض است.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $\Lambda \subset M$ و p یک عدد حقیقی مثبت باشد. یک سیستم دینامیکی f را دارای خاصیت L_p-سایه‌زنی‌لیپ‌شیتس روی Λ گوییم اگر ثابت‌های L و $d_۰$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $d - L_p$ شبه‌مدار $\xi = \{x_n \in \Lambda : n \in \mathbb{Z}\}$ ، $d \leq d_۰$ ، نقطه x موجود باشد که

$$(\sum_{n\in\mathbb{Z}} d(f^n(x), x_n)^p)^{\frac{۱}{p}} < Ld_۰.$$

تعریف ۹.۱.۱. سیستم دینامیکی f را روی $U \subset M$ دارای خاصیت انبساطی گوییم اگر وجود داشته باشد $\Delta > ۰$ به طوری که برای دو نقطه x, y اگر

$$f^n(x), f^n(y) \in U, n \in \mathbb{Z}$$

و

$$dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \Delta, n \in \mathbb{Z}$$

آنگاه $x = y$.

اگر $U = M$ باشد آنگاه سیستم f را انبساطی می‌نامیم. Δ را ثابت انبساطی می‌نامیم. ویژگی انبساطی مستقل از متر است.

مثال ۱۰.۱.۱. قرار دهید $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(۲) = \{(a_i) : a_i \in \{۰, ۱\}, i \in \mathbb{Z}\}$. نگاشت $\sigma : \sum_{i\in\mathbb{Z}}(۲) \longrightarrow \sum_{i\in\mathbb{Z}}(۲)$ به صورت $(\sigma((a_i)))_i = a_{i+۱}$ تعریف می‌کنیم با متریک d روی $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(۲)$ به صورت $d((a_i), (b_i)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|a_i - b_i|}{۲^{|i|}}$ نگاشت σ به ازای $\Delta = ۱/۲$ انبساطی است.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $U \subset M$ ، فشرده و f- پایا باشد. می‌گوییم U- جرم f خاصیت انبساطی دارد اگر وجود داشته باشد $\triangle > ۰$ به‌طوری که اگر برای دو نقطه $x \in U$ و $y \in M$ داشته باشیم

$$dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \triangle, \quad n \in \mathbb{Z}$$

آنگاه: $x = y$.

۲.۱ مجموعه هذلولوی

ابتدا مفهوم مجموعه هذلولوی را برای $C^۱$- وابرسانی f روی $\mathbb{R}^n$ بیان می‌کنیم. سپس لم سایه‌زنی را برای f بیان می‌کنیم.

نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ را به صورت $x = (x_۱, ..., x_n)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز باشد. فرض کنید r یک عدد صحیح نامنفی باشد. یک تابع حقیقی مقدار $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in U$ از ***کلاس*** C^r گوییم هرگاه مشتقات جزئی

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_۱} ... x_{i_j}}$$

برای هر $j \leq r$ در نقطه p موجود و پیوسته باشد. تابع $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه p از کلاس C^∞ می‌گوییم هرگاه f از کلاس C^r باشد برای هر $r \geq ۰$. تابع برداری $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را در نقطه p از کلاس C^r گوییم هرگاه همه‌ی مولفه‌های $f_۱, ..., f_m$ در نقطه p از کلاس C^r باشند. تابع $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را روی U از کلاس C^r گوییم هرگاه در هر نقطه U از کلاس C^r باشد. همچنین تابع f روی U از کلاس C^∞ به طریق مشابه تعریف می‌شود.

نگاشت $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را C^r**-*وابرسانی*** گوییم هرگاه دوسویی باشد و f و $f^{-۱}$ روی $\mathbb{R}^n$ از کلاس C^r باشند.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ را هذلولوی برای وابرسانی f می‌نامیم اگر

(a) Λ فشرده و f-پایا باشد یعنی $f(\Lambda) = \Lambda$؛

(b) ثابت‌های $C > ۰$ و $\lambda_۰ \in (۰, ۱)$ و خانواده ای از زیر فضاهای خطی $S(p)$ و $U(p)$ از $\mathbb{R}^n$ برای هر $p \in \Lambda$ موجود باشند به طوری که

(b.۱) $S(p) \oplus U(p) = \mathbb{R}^n$؛

(b.۲)

$$Df(p)(S(p)) = S(f(p)), p \in \Lambda;$$

$$Df(p)(U(p)) = U(f(p)), p \in \Lambda;$$

(b.۳)

$$\mid Df^m(p)v \mid \leqslant C\lambda_۰^m \mid v \mid, v \in S(p), m \geqslant ۰;$$

$$\mid Df^{-m}(p)v \mid \leqslant C\lambda_۰^m \mid v \mid, v \in U(p), m \geqslant ۰.$$

اعداد C و $\lambda_{\circ}$ را ثابت‌های هذلولوی از Λ می‌نامیم. همچنین زیر فضاهای $S(p)$ و $U(p)$ را ساختارهای هذلولوی روی Λ می‌نامیم.

یکی از مهمترین قضایای سایه‌زنی قضیه زیر است که به لم سایه‌زنی معروف است.

قضیه ۲.۲.۱. (لم سایه‌زنی)[۱۷] اگر $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه هذلولوی برای C^r-وابرسانی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ باشد ($r \geq ۱$) آنگاه یک همسایگی W از Λ وجود دارد به طوری که f روی W دارای خاصیت سایه‌زنی است.

فرض کنید M یک خمینه هموار فشرده باشد. می‌خواهیم مفهوم مجموعه هذلولوی، $\Lambda \subset M$ را برای C^r-وابرسانی $f : M \longrightarrow M$ بیان کنیم ($r \geq ۱$). البته قبل از این که این مفهوم را بیان کنیم مفهوم خمینه هموار و فضای مماس در یک نقطه از خمینه را یادآوری می‌کنیم.

یک فضای توپولوژیک M را ***موضعا اقلیدسی از بعد*** n گوییم اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی U باشد به طوری که یک همانسانی ϕ از U به مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ موجود باشد. زوج (U, ϕ) را نقشه می‌گوییم.

یک فضای توپولوژیک را *شمارای نوع دوم* گوییم اگر دارای پایه شمارا باشد.

یک فضای توپولوژیک هاسدورف، شمارای نوع دوم و موضعا اقلیدسی را **خمینه** گوییم. این خمینه را از بعد n گوییم اگر موضعا اقلیدسی از بعد n باشد.

مثال ۳.۲.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ توسط نقشه $(\mathbb{R}^n, ۱_{\mathbb{R}^n})$ به طوری که $۱_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نگاشت همانی است پوشیده می‌شود.

دو نقشه (U, ϕ) و (V, ψ) از یک خمینه توپولوژیک را C^∞***-سازگار*** گوییم اگر دو نگاشت

$$\phi o \psi^{-۱} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V), \quad \psi o \phi^{-۱} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

از کلاس C^∞ باشند.که به این دو نگاشت، نگاشت‌های انتقال بین دو نقشه می‌گویند. اگر $U \cap V = \emptyset$ آنگاه به انتفای مقدم نگاشت‌های فوق از کلاس C^∞ هستند.

خانواده $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ از نقشه های دو به دو C^∞-سازگار که یک پوشش M هستند، یعنی $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ را یک اطلس روی فضای موضعا اقلیدسی M گوییم.

اطلس $\mathcal{M}$ روی یک فضای موضعا اقلیدسی را ***بیشینه*** گوییم هرگاه مشمول یک اطلس بزرگتر نباشد.

خمینه توپولوژیک M را ***هموار*** گوییم اگر دارای یک اطلس بیشینه باشد.

فرض کنید r یک عدد صحیح نامنفی و M یک خمینه هموار از بعد n باشد. تابع $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in M$ ***از کلاس*** C^r گوییم اگر نقشه (U, ϕ) حول p در M موجود باشد به طوری که $fo\phi^{-1}$ یک تابع تعریف شده روی زیر مجموعه باز $\phi(U)$ از $\mathbb{R}^n$ در نقطه $\phi(p)$ از کلاس C^r باشد. تابع f روی M از کلاس C^r گوییم اگر در هر نقطه از M از کلاس C^r باشد. به همین ترتیب تابع $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in M$ از کلاس C^∞ یا هموار گوییم اگر نقشه (U, ϕ) حول p در M موجود باشد به طوری که $fo\phi^{-1}$ یک تابع تعریف شده روی زیر مجموعه باز $\phi(U)$ از $\mathbb{R}^n$ در نقطه $\phi(p)$ از کلاس C^∞ باشد. تابع f روی M از کلاس C^∞ گوییم اگر در هر نقطه از M از کلاس C^∞ باشد.

فرض کنید M و N دو خمینه هموار به ترتیب با بعد های m و n باشند. یک نگاشت پیوسته $F : N \longrightarrow M$ را در نقطه $p \in N$ از ***کلاس*** C^r گوییم هرگاه نقشه‌های (V, ψ) حول $F(p)$ در M و (U, ϕ) حول p در N موجود باشند به طوری که $\psi oFo\phi^{-1}$ یک نگاشت از زیر مجموعه باز $\phi(F^{-1}(V) \cap U)$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ در نقطه $\phi(p)$ از کلاس C^r باشد. نگاشت پیوسته $F : N \longrightarrow M$ را از کلاس C^r گوییم اگر در هر نقطه از N از کلاس C^r باشد. به همین ترتیب نگاشت پیوسته