بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

مسائل کنترل چند هدفه و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر صغری نوبختیان

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا پوریای ولی

پژوهشگر:

مهدی دوست محمدی

آذر ماه ۱۳۸٦

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض آقای مهدی دوست محمدی

تحت عنوان:

مسائل کنترل چند هدفه و کاربردهای آن

در تاریخ ...۸۶/۹/۲۷..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالـــی........ به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر مهدی کرباسی	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

حمد و سپاس مخصوص خداوند است که پروردگار جهانیان است.

تشکر از بندگان خدا ، تشکراز خالق است. و چه خوش تـر اینکـه ایـشان بـر تـو حقـی عظیم داشته باشند، و چه حقی بالاتر از هدایت تو.

در اینجا برخود واجب می دانم از تمام افرادی که به نحوی در هدایت من سـهیم بـوده اند تشکر و قدردانی کنم.

ابتدا از پدر، مادر و اعضای خانواده ام که در تمام مراحل زندگی پشتیبان من بـوده انـد تشکر می کنم.

از تمامی اساتید گروه ریاضی دانشگاه اصفهان، خصوصاً سرکار خـانم دکتـر نوبختیـان و جناب آقای دکتر پوریای ولی که الگوهایی برای من بـوده انـد، بـه خـاطر زحمـات بـی منتشان نسبت به این حقیر کمال قدردانی و تشکر را دارم.

در انتها از تمام دوستانم و کـادر اداری گـروه ریاضـی خـصوصاً خـانم فرهمنـد، مـسؤل کتابخانه تخصصی گروه ریاضی سپاسگذارم.

تقدیم به

پدر و مادرم

به پاس تمام زحماتشان

چکیده

در این پایان نامه به بررسی مسائل تغییراتی و کنترل بهینه چند هدفه می پردازیم. از آنجایی که یک مسئله تغییراتی چند هدفه، قابل تبدیل به یک مسئله کنترل بهینه چند هدفه می باشد، لذا یک مسئله تغییراتی چند هدفه را در نظر می گیریم و در ابتدا به رابطه این مسئله با مفهوم جواب کارای ضعیف اشاره می کنیم و سپس به بیان شرایط کافی بهینگی برای این مسئله می پردازیم. در ادامه مسائل دوگان ولف و موند- وایر را مدل سازی می کنیم و سپس قضایای دوگانگی ضعیف، دوگانگی قوی و دوگانگی معکوس که بین مسئله اولیه و دوگان متناظر با آن وجود دارند را تحت فرضهای اینوکسیتی تعمیم یافته، $\rho-$ محدب بودن و $(F,\rho)-$ محدب بودن تعمیم یافته، برای مسائل تغییراتی و کنترل چند هدفه بیان و اثبات می کنیم. در آخر نیز به فرآیند شکل گیری فولاد توسط ریخته گری پیوسته اشاره می کنیم و مسئله کنترل بهینه چند هدفه شکل گیری فولاد را مدل سازی می کنیم.

کلید واژه: برنامه ریزی چند هدفه، کنترل بهینه، دوگانگی، گرادیان، کارا.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

مسائل کنترل بهینه چند هدفه ، مسائل کنترلی هستند که حداقل دارای دو تابع هدف می باشند و هدف اصلی در این مسائل ، بهینه نمودن همزمان این توابع هدف با توجه به قیدهای مسئله می باشد. نظریه کنترل بهینه چند هدفه ، دارای کاربردهای وسیعی در زمینه های مختلف از جمله مهندسی مکانیک ، طراحی سیستمهای کنترل هواپیما و ریاضیات زیستی است. از آنجایی که یک مسئله تغییراتی چند هدفه ، قابل تبدیل به یک مسئله کنترل بهینه چند هدفه می باشد ، لذا در ابتدای این پایان نامه به بررسی سه رده از مسائل تغییراتی چند هدفه می پردازیم و مفهوم جواب کارای ضعیف و ارتباط آن با یک مسئله تغییراتی چند هدفه ، شرایط کافی بهینگی و همچنین قضایای مختلف دوگانگی را برای این مسائل بیان می کنیم و سپس به بحث در مورد مسائل کنترل بهینه چند هدفه می پردازیم. به همین منظور ، مطالب این پایان نامه در هفت فصل تنظیم شده است که در زیر هر یک از این فصل ها را به اختصار شرح می دهیم.

در فصل اوّل ، مطالب مورد نیاز فصل های بعد پایان نامه آورده شده است. این فصل در دو بخش تنظیم گردیده است. در بخش اوّل ، مفاهیم مقدماتی آنالیز محدب گردآوری شده و در بخش دوّم ، تعاریف یک مسئله تغییراتی چند هدفه و یک مسئله کنترل بهینه چند هدفه ، به همراه برخی از مفاهیم مربوط به آنها آورده شده است. این فصل را با نحوه تبدیل یک مسئله تغییراتی چند هدفه به یک مسئله کنترل بهینه چند هدفه به پایان می بریم.

فصل دوّم در سه بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل به تعریف مسئله تغییراتی چند هدفه نوع اوّل و همچنین تعریف یک جواب کارای ضعیف برای این مسئله پرداخته‌ایم. سپس در بخشهای دوّم و سوّم ، مفاهیم نقطه بحرانی برداری ضعیف و توابع اینوکس نما را تعریف کرده‌ایم و ارتباط جواب کارای ضعیف با این مفاهیم را در یک مسئله تغییراتی چند هدفه بیان نموده‌ایم.

فصل سوّم را با تعریف مسئله تغییراتی چند هدفه نوع دوّم آغاز می کنیم. این فصل در سه بخش گردآوری شده است. در بخش اوّل به تعریف مفهوم اینوکس و تعمیمهای آن برای یک مسئله تغییراتی می پردازیم. در بخش دوّم ، شرایط کافی بهینگی برای مسئله تغییراتی چند هدفه نوع دوّم را تحت فرضهای اینوکسیتی و تعمیمهای آن بیان می کنیم و در بخش سوّم نیز یک فرم دوگان مناسب برای مسئله تغییراتی مذکور ارائه می دهیم و سپس تحت فرضهای اینوکسیتی و تعمیمهای آن به بیان و اثبات

قضایای دوگانگی ضعیف ، دوگانگی قوی و دوگانگی معکوس که بین مسئله اوّلیه و دوگان متناظر با آن وجود دارند می پردازیم.

در **فصل چهارم** ، توابع ρ — محدب و تعمیمهای آنها را تعریف می کنیم. سپس مسئله تغییراتی چند هدفه نوع دوّم که در **فصل سوّم** معرفی شد را در نظر می گیریم و یک فرم دوگان دیگر برای آن ارائه می دهیم و در ادامه ، تحت فرضهای ρ — محدب بودن و تعمیمهای آن به بیان قضایای دوگانگی ضعیف و دوگانگی قوی میان مسئله اوّلیه و فرم دوّم دوگان متناظر با آن می پردازیم.

فصل پنجم در سه بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل ، ابتدا مسئله تغییراتی چند هدفه نوع سوّم را معرفی می کنیم و سپس به تعریف توابع (F,ρ) — محدب و تعمیمهای آن می پردازیم. در بخش دوّم ، فرم اوّل مسئله دوگان متناظر با مسئله اوّلیه را ارائه می دهیم و در ادامه ، تحت فرضهای (F,ρ) — محدب بودن و تعمیمهای آن به بیان قضیه دوگانگی ضعیف بین این دو مسئله می پردازیم. در بخش سوّم نیز فرم دوّم مسئله دوگان متناظر با مسئله اوّلیه را معرفی می کنیم و سپس قضیه دوگانگی ضعیف را در این حالت ذکر می کنیم.

فصل ششم به بررسی مسائل کنترل بهینه چند هدفه می پردازد. ابتدا مسئله کنترل مورد نظر را در نظر گرفته و یک فرم دوگان مناسب برای آن ارائه می دهیم. در ادامه نیز به بیان واثبات قضایای دوگانگی ضعیف که بین مسئله اوّلیه و دوگان آن وجود دارند ، تحت فرضهای اینوکسیتی و تعمیمهای آن می پردازیم.

در **فصل هفتم** این پایان نامه هم به بیان کاربردی از مسائل کنترل بهینه چند هدفه در صنعت ریخته گری پرداخته‌ایم. این فصل در دو بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل ، فرآیند ریخته گری پیوسته را شرح داده‌ایم و در بخش دوّم ، دستگاه حالت مسئله شکل گیری فولاد تحت فرآیند ریخته گری پیوسته و قیدهای مربوط به این فرآیند را بیان کرده‌ایم و در پایان نیز مسئله کنترل بهینه چند هدفه شکل گیری فولاد را مدل سازی نموده‌ایم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

با توجه به اینکه تمام اجزای تشکیل دهنده ساختمان ریاضیات به هم مربوط می باشند ، لذا برای تشریح هر قسمت از آن نیازمند به بیان مطالبی مقدماتی می باشیم. در فصل اول پایان نامه به بیان این مطالب می پردازیم.

در این فصل از منابع [31,29,25,22,20,14,7,2] استفاده شده است.

۱—۱ آنالیز محدب

در این پایان نامه ، اینگونه قرارداد می کنیم که اگر x و y دو بردار دلخواه در فضای $\mathbb{R}^n$، باشند ، آنگاه

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad , \quad \forall\, i = ۱, \ldots, n\,,$$

$$x < y \iff x_i < y_i \quad , \quad \forall\, i = ۱, \ldots, n\,.$$

تعریف ۱.۱ . مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب گوییم ، هرگاه برای هر دو نقطه x_1 و x_2 در مجموعه S ، داشته باشیم

$$\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in S \quad , \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\,.$$

$\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2$ را یک ترکیب محدب x_1 و x_2 می نامیم.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه غیر تهی و محدب باشد. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را محدب روی مجموعه S گوییم ، هرگاه

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)\,.$$

برای هر $x_1, x_2 \in S$ و برای هر $\lambda \in [0,1]$.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه غیر تهی و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تابع f را مشتق پذیر در نقطه $\bar{x} \in int\ S$ گوییم ، هرگاه بردار $\nabla f(\bar{x})$ که بردار گرادیان نامیده می شود و تابع $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشند ، بطوریکه

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x-\bar{x}) + \|x-\bar{x}\|\ \alpha(\bar{x}; x-\bar{x}) \ \ ,\ \ \forall\, x \in S\,.$$

که در آن $\lim_{x \longrightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x-\bar{x}) = 0$.

همچنین تابع f را مشتق پذیر روی مجموعه باز $S' \subseteq S$ گوییم ، هرگاه تابع f در هر نقطه S' مشتق پذیر باشد.

توجه کنید که اگر تابع f در نقطه $\bar{x}$ مشتق پذیر باشد ، آنگاه بردار گرادیان به صورت زیر خواهد بود.

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\right)^T = \Big(f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})\Big)^T\,.$$

قضیه ۴.۱ . فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه غیر تهی ، باز و محدب باشد و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق پذیر روی S باشد. آنگاه تابع f محدب است ، هرگاه برای هر $\bar{x} \in S$ داشته باشیم

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \quad , \quad \forall\, x \in S\,.$$

اثبات . برای اثبات به منبع [2] مراجعه شود. ■

قضیه ۵.۱ . فرض کنید S یک مجموعه غیر تهی ، بسته و محدب در $\mathbb{R}^n$ باشد و $y \notin S$. آنگاه نقطه یکتای $\bar{x} \in S$ وجود دارد ، بطوریکه دارای کمترین فاصله تا y می باشد. علاوه بر این ، اگر $\bar{x}$ دارای کمترین فاصله تا y باشد ، آنگاه

$$(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0 \quad , \quad \forall\, x \in S\,.$$

اثبات . چون S یک مجموعه غیر تهی است ، لذا نقطه $\hat{x} \in S$ موجود خواهد بود. حال مجموعه $\bar{S}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\bar{S} = S \cap \{x \mid \|x - y\| \leq \|\hat{x} - y\|\} = \{x \in S \mid \|x - y\| \leq \|\hat{x} - y\|\} \subseteq S\,.$$

با توجه به اینکه هدف ما یافتن نقطه ای در مجموعه S است که دارای کمترین فاصله تا y باشد و تعریف مجموعه $\bar{S}$ ، خواهیم داشت

$$\inf\{\, \|x - y\| \;\mid x \in S\,\} = \inf\{\, \|x - y\| \;\mid x \in \bar{S}\,\}\,.$$

از تعریف مجموعه $\bar{S}$ داریم که $\bar{S}$ یک مجموعه بسته و کراندار است و لذا $\bar{S}$ یک مجموعه فشرده خواهد بود.

اکنون بنابر فشرده بودن مجموعه $\bar{S}$ و پیوستگی تابع نرم ، خواهیم داشت که مسئله $\inf\{\, \|x - y\| \;\mid x \in \bar{S}\,\}$ دارای جواب است. یعنی نقطه $\bar{x} \in S$ وجود دارد ، بطوریکه دارای

کمترین فاصله تا y می باشد.

برای اثبات یکتایی نقطه $\bar{x}$ ، فرض کنید نقطه $\bar{x}\,' \in S$ موجود باشد ، بطوریکه

$$\|y-\bar{x}\| = \|y-\bar{x}\,'\| = \gamma \, .$$

حال چون S یک مجموعه غیرتهی و محدب است ، لذا $\frac{\bar{x}+\bar{x}\,'}{۲} \in S$. در نتیجه

$$\left\| \, y - \frac{\bar{x}+\bar{x}\,'}{۲} \, \right\| \le \frac{۱}{۲} \|y-\bar{x}\| + \frac{۱}{۲} \|y-\bar{x}\,'\| = \gamma \, .$$

اما برقرای رابطه قبل به صورت اکید ، متناقض با این است که $\bar{x}$ نزدیکترین نقطه به y است. پس

$$\left\| \, y - \frac{\bar{x}+\bar{x}\,'}{۲} \, \right\| = \frac{۱}{۲} \|y-\bar{x}\| + \frac{۱}{۲} \|y-\bar{x}\,'\| \, .$$

از تساوی فوق به دست می آوریم که عدد حقیقی λ وجود دارد ، بطوریکه

$$y-\bar{x} = \lambda \, (y-\bar{x}\,') \, . \qquad (۱)$$

با گرفتن نرم از رابطه قبل ، خواهیم داشت $\|y-\bar{x}\| = |\lambda| \; \|y-\bar{x}\,'\|$ و در نتیجه $|\lambda| = ۱$.

اما $\lambda \neq -۱$. زیرا در غیراینصورت $y = \frac{\bar{x}+\bar{x}\,'}{۲} \in S$ و این مطلب هم متناقض با این است که $y \notin S$. پس $\lambda = ۱$. از اینرو از (۱) نتیجه خواهد شد $\bar{x} = \bar{x}\,'$ و یکتایی نقطه $\bar{x}$ ثابت خواهد شد.

برای اثبات قسمت بعدی قضیه ، فرض کنید $\bar{x}$ نزدیکترین نقطه به y در مجموعه S باشد. لذا

$$\|y-\bar{x}\|^{۲} \le \|y-x\|^{۲} \quad , \quad \forall \, x \in S \, .$$

حال فرض کنید $x \in S$. از آنجایی که S محدب است ، لذا برای $\lambda \in (۰,۱)$ داریم $\bar{x} + \lambda \, (x-\bar{x}) \in S$. بنابراین

$$\|y-\bar{x}\|^{۲} \le \|y-\bar{x}-\lambda \, (x-\bar{x})\|^{۲} \, . \qquad (۲)$$

همچنین

$$\|y-\bar{x}-\lambda\,(x-\bar{x})\|^{2}=\|y-\bar{x}\|^{2}+\lambda^{2}\,\|x-\bar{x}\|^{2}-2\lambda\,(y-\bar{x})^{T}(x-\bar{x})\,. \qquad (3)$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می شود

$$2\lambda\,(y-\bar{x})^{T}(x-\bar{x})\leq\lambda^{2}\,\|x-\bar{x}\|^{2}\quad,\quad\forall\,\lambda\in(0,1)\,.$$

اکنون رابطه فوق را بر $\lambda>0$ تقسیم می کنیم و سپس $\lambda\longrightarrow 0^{+}$. در نتیجه

$$(y-\bar{x})^{T}(x-\bar{x})\leq 0\quad,\quad\forall\,x\in S\,.$$

و اثبات کامل است. ■

قضیه ۶.۱ . فرض کنید S یک مجموعه غیرتهی ، بسته و محدب در $\mathbb{R}^n$ باشد و $y\notin S$. آنگاه بردار غیر صفر p و اسکالر α وجود دارند ، بطوریکه

$$p^{T}y>\alpha\quad,\quad p^{T}x\leq\alpha\,,\ \forall\,x\in S\,.$$

اثبات . برای اثبات به منبع [2] مراجعه شود. ■

قضیه ۷.۱ (قضیه فارکاش[1]) . فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد و c یک بردار $n-$ تایی باشد. آنگاه دقیقاً یکی از دو دستگاه زیر دارای جواب می باشد.

$$(1)\qquad Ax\leq 0 \text{ و } c^{T}x>0\quad,\quad x\in\mathbb{R}^{n}\ \text{برای}\,,$$

$$(2)\qquad A^{T}y=c \text{ و } y\geq 0\quad,\quad y\in\mathbb{R}^{m}\ \text{برای}\,.$$

اثبات . برای اثبات به منبع [2] مراجعه شود. ■

[1] Farkas

قضیه ۸.۱ (قضیه گردان[۲]) . فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. آنگاه دقیقاً یکی از دو دستگاه زیر دارای جواب می باشد.

$$(۱) \quad Ax < ۰ \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{برای} \, ,$$

$$(۲) \quad A^T y = ۰ \;\; \text{و} \;\; y \geq ۰ \;\; \text{و} \;\; y \neq ۰ \quad , \quad y \in \mathbb{R}^m \quad \text{برای} \, .$$

اثبات . دستگاه اول را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$Ax + es \leq ۰ \, . \tag{۴}$$

بطوریکه $s \in \mathbb{R}$ ، $s > ۰$ و $e = (۱ , \ldots , ۱)^T \in \mathbb{R}^m$.

حال دستگاه (۴) را به فرم دستگاه اول قضیه ۷.۱ می نویسیم. لذا

$$\begin{bmatrix} A & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \leq ۰ \;\; , \;\; s = (۰, \ldots, ۰, ۱) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} > ۰ \, .$$

برای $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+۱}$.

با توجه به قضیه ۷.۱ ، دستگاه دوم متناظر با دستگاه فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} A^T \\ e^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \;\; , \;\; y \geq ۰ \, .$$

برای $y \in \mathbb{R}^m$. بنابراین

$$A^T y = ۰ \;\; , \;\; e^T y = ۱ \;\; , \;\; y \geq ۰ \, . \tag{۵}$$

رابطه $e^T y = ۱$ نشان می دهد $y \neq ۰$. بنابراین دستگاه (۵) معادل با دستگاه دوم این قضیه می باشد. لذا بنا بر قضیه ۷.۱ (قضیه فارکاش) ، دقیقاً یکی از دو دستگاه ذکر شده در صورت قضیه دارای جواب می باشند و اثبات کامل است. ■

---

[۲] Gordan

تعریف ۹.۱ . تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که در آن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ باز است را از رده C^∞ (هموار) گوییم ، هرگاه مشتقات جزئی آن از هر مرتبه موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۱۰.۱ . فرض کنید که f تابعی حقیقی مقدار باشد که روی فاصله $[a,b]$ تعریف شده است. f را یک تابع تکه‌ای ــ پیوسته گوییم ، هرگاه این تابع برای $i = \circ, \dots, n$ ، روی زیر فاصله های (a_i, a_{i+1}) از فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و دارای حد متناهی در نقطه a_i (از راست) و در نقطه a_{i+1} (از چپ) باشد ، بطوریکه $a_\circ = a$ و $a_{n+1} = b$.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید که f تابعی حقیقی مقدار باشد که روی فاصله $[a,b]$ تعریف شده است. f را یک تابع تکه‌ای ــ هموار روی فاصله $[a,b]$ گوییم ، هرگاه

(i) تابع f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

(ii) تابع f روی فاصله $[a,b]$ مشتق پذیر باشد ، به جز احتمالاً در تعداد متناهی از نقاط.

(iii) مشتق f' روی فاصله $[a,b]$ تکه‌ای ــ پیوسته باشد.

تعریف ۱۲.۱ . ماتریس $A_{n\times n}$ را نیمه معین مثبت گوییم ، هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x^T A x \geq \circ \ .$$

۱ــ۲ مسائل چند هدفه

در این قسمت ، ابتدا به معرفی یک مسئله تغییراتی چند هدفه می پردازیم و سپس به برخی از تعاریف و مفاهیم مربوط به این مسائل اشاره می کنیم. در ادامه ، یک مسئله کنترل بهینه چند هدفه را تعریف می کنیم و نحوه تبدیل یک مسئله تغییراتی چند هدفه به یک مسئله کنترل بهینه چند هدفه را مورد