

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



دانشگاه یزد  
دانشکده ریاضی  
گروه ریاضی محض

پایان نامه  
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
ریاضی محض-هندسه و توپولوژی

## هندسه ریمانی اربیفلدها

استاد راهنما:

دکتر اکبر دهقان نژاد

استاد مشاور:

دکتر حمید مظاهری تهرانی

پژوهش و نگارش:

علیرضا احمدی

شهریور ۱۳۹۳



کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.



با احترام تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه کسانی که دست اندیشیدن را به من آموختند.





## سپاس‌گزاری

سپاس خداوند دانا و حکیم که علم و دانش حقیقی از آن اوست. رحمت و لطف او را بی‌نهایت شکر گویم، چرا که توفیق تلاش داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی نو آغاز کنم.

بر خود لازم می‌دانم از راهنمائی‌ها و زحمات استاد بزرگوار و گرانقدر، جناب آقای دکتر دهقان‌نژاد که از ابتدای راه و در طی انجام این پایان‌نامه، با هدایت و حمایت‌های بی‌دریغشان یاری‌ام نمودند و استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر مظاهری تهرانی که با دقت نظر، مشاوره لازم در این خصوص را ارائه نمودند، کمال سپاس و تشکر را داشته باشم. همچنین از استاتید محترم، جناب آقای دکتر مشتاقیون و جناب آقای دکتر فاتحی‌نیا که زحمت داوری این اثر را برعهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان از زحمات تمام کسانی که در این امر مرا یاری نمودند، سپاس‌گزارم و آرزوی توفیق روز افزون دارم.



## چکیده

در این پایان‌نامه، اربیفلدهای ریمانی به صورت فضاهایی که به طور موضعی روی خارج‌قسمتی مدارهای یک گروه متناهی از ایزومتری‌های یک منیفلد ریمانی مدل می‌شوند، معرفی می‌گردند. به این ترتیب، منیفلدهای ریمانی به رسته بزرگ‌تر اربیفلدها گسترش می‌یابند. در واقع، اربیفلدها را می‌توان منیفلدهای با نقاط تکین دانست. پس از بررسی اربیفلدها و مطالعه ساختار ریمانی آنها، تعمیم برخی از قضایا و نتایج نظیر مقایسه حجمی، قضیه قطر بیشینه، قضیه تناهی و قضیه شکافتگی برای اربیفلدهای ریمانی بیان می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** اربیفلد ریمانی، ژئودزیک اربیفلد، نگاشت نمایی اربیفلد، مقایسه حجمی اربیفلد، قطر بیشینه اربیفلد، شکافتگی اربیفلد.



# فهرست مطالب

ث	فهرست تصاویر
۱	پیشگفتار
۳	۱ مفاهیم مقدماتی
۴	۱.۱ فضاهای طولی و منیفلدهای ریمانی
۶	۱.۱.۱ ژئودزیک‌ها
۷	۲.۱.۱ مسیر و طول مسیر
۸	۳.۱.۱ فضاهای طولی
۱۰	۴.۱.۱ منیفلدهای ریمانی به‌عنوان فضاهای طولی
۱۴	۵.۱.۱ انحنای توپونوگوف و تعلیق
۱۷	۲.۱ گروه‌های متعامد
۲۱	۳.۱ عمل گروه
۲۴	۴.۱ زیرگروه‌های متناهی دیفنومورفیسم‌ها
۲۹	۲ اربیفلدها
۳۰	۱.۲ ساختار اربیفلدها
۳۶	۱.۱.۲ اربیفلدهای خوب
۳۷	۲.۱.۲ توپولوژی اربیفلدها

۴۰	..... نقاط تکین	۳.۱.۲
۴۲	..... پوشش‌های اربیفلدها	۴.۱.۲
۴۳	..... مثال‌هایی از اربیفلدها	۲.۲
۴۷	..... نگاشت اربیفلدها	۳.۲
۵۰	..... زیراربیفلدها	۱.۳.۲
۵۱	..... افراز یکانی	۲.۳.۲
۵۳	..... کلاف اربیفلدها	۴.۲
۵۴	..... کلاف مماس اربیفلدها	۱.۴.۲
۵۶	..... بخش اربیفلدها	۲.۴.۲

### ۳ اربیفلدهای ریمانی ۵۹

۶۰	..... ساختار ریمانی اربیفلدها	۱.۳
۶۱	..... ژئودزیک‌های ریمانی اربیفلدها	۲.۳
۶۲	..... نگاشت نمایی اربیفلدها	۱.۲.۳
۶۴	..... ساختار طولی اربیفلدها	۳.۳
۶۴	..... لایه‌بندی اربیفلدها	۱.۳.۳
۶۷	..... ساختار متریک	۲.۳.۳
۶۹	..... قضیه ساختاری ژئودزیک‌ها	۳.۳.۳
۷۱	..... مقایسه حجمی اربیفلدها	۴.۳
۷۵	..... اربیفلدهای با قطر بیشینه	۵.۳
۷۹	..... شکافتگی اربیفلدها	۶.۳
۸۰	..... مقایسه لاپلاسیان	۱.۶.۳
۸۲	..... توابع بوسمان	۲.۶.۳
۸۴	..... قضیه شکافتگی اربیفلدها	۳.۶.۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۸۹

مراجع

۹۳





# فهرست تصاویر

۱۰	.....	۱.۱
۱۶	..... کره دو بعدی $S^2$ ، فضایی با فزونی صفر	۲.۱
۱۹	..... چگونگی حصول دوران از ترکیب بازتاب‌های در طول بردارهای $w, v$	۳.۱
۳۵	..... هر منیفلد مرزدار، یک اریفلد است.	۱.۲
۴۴	..... اریفلد $\mathbb{Z}_n$ -قطره اشک	۲.۲
۴۵	..... اریفلد $\mathbb{Z}_m$ - $\mathbb{Z}_n$ -فوتبال	۳.۲
۴۶	..... اریفلد رویه بالش	۴.۲
۵۸	..... کلاف مماس و کلاف مماس پذیرفتنی اریفلد $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$	۵.۲
۶۲	..... ژئودزیک‌های ریمانی اریفلدها رفتار کمینه طول موضعی را ندارند.	۱.۳
۶۶	..... بعد تکین نقاط مخروط روی قرص دو بعدی	۲.۳



# پیشگفتار

صرف نظر از جزئیات، منیفلدها<sup>۱</sup> به طور موضعی شبیه به یک فضای اقلیدسی هستند. در حالی که اربیفلدها با مدل شدن روی فضای مدارهای عمل یک گروه متناهی از دیفیئومورفیسم‌های یک منیفلد همبند، منیفلدها را تعمیم می‌دهند. مفهوم اربیفلد، نخستین بار در دهه پنجاه میلادی توسط ساتاکه<sup>۲</sup> [۲۴] با نام  $V$ -منیفلدها معرفی شد. اما در حدود سال ۱۹۷۰ ترستن<sup>۳</sup> [۲۷] دوباره این مفهوم را به عنوان ابزاری برای مطالعه توپولوژی منیفلدهای سه‌بعدی، به طور مستقل ابداع و اصطلاح اربیفلد را برای آن برگزید. نتایج اولیه در این نظریه، برانگیخته از تعمیم مفاهیم و قضایا از منیفلدها به اربیفلدها، بیان شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها و یافتن پایاها است. مشکلی که وجود دارد، آن است که بعضی از مفاهیم در رسته منیفلدها، تعمیم منحصر بفرد و صحیحی به رسته اربیفلدها ندارند. با این وجود، بسیاری از نتایج پس از پیکربندی دوباره، قابل گسترش هستند. اربیفلدها در تقاطع زمینه‌های مختلف ریاضیات و حتی علوم دیگر نظیر فیزیک قرار دارند. از این رو به فراخور کاربرد، روش‌های گوناگونی برای ارائه اربیفلدها وجود دارد. اربیفلدها می‌توانند متناظر با کلاس‌های خاصی از گروه‌واره‌های لی در نظر گرفته شوند. شیوه دیگر، بیان اربیفلدها به صورت استک‌ها<sup>۴</sup> است. اما روشی که در این پایان‌نامه اتخاذ می‌شود، به مانند منیفلدها، استفاده از کارت‌ها و اطلس‌ها است. به نظر می‌رسد، این روش برای بیان دیدگاه‌های هندسه ریمانی منیفلدها در اربیفلدها مناسب‌تر است.

در فصل اول، برخی تعاریف و مفاهیم مورد نیاز درباره اربیفلدهای ریمانی مانند فضاهای طولی،

---

<sup>۱</sup> در این پایان‌نامه منیفلدها به صورت هموار در نظر گرفته می‌شوند، مگر خلاف آن تصریح گردد.

<sup>۲</sup> Satake

<sup>۳</sup> Thurston

<sup>۴</sup> Stacks

منیفلدهای ریمانی، انحنای توپونوگوف<sup>۵</sup> و در نهایت عمل گروه‌های متناهی از دیفئومورفیسم‌های یک منیفلد همبند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل دوم، به مطالعه اریفلدها اختصاص دارد. اریفلدها شاید به‌اندازه منیفلدها همگن نباشند. اما یکی از ویژگی‌های خاص آنها داشتن نقاط تکین است؛ یک مجموعه بسته و هیچ‌جا چگال که وجود آن یک اریفلد را از منیفلدها متمایز می‌کند. در واقع منیفلدها، اریفلدهای بدون نقاط تکین هستند. حتی ممکن است فضای توپولوژیک زمینه یک اریفلد، منیفلد نباشد. مانند هر کاتگوری دیگر، ریخت‌ها تحت عنوان نگاشت اریفلد معرفی می‌گردند. با بحث درباره تارهای مماس اریفلدها که برخلاف منیفلدها دیگر فضای برداری نیستند، فصل خاتمه می‌یابد.

سرانجام در فصل سوم، ساختار اریفلد ریمانی ارائه شده و به پیاده‌سازی ایده‌های هندسه ریمانی بر روی آن پرداخته می‌شود. پس از تعریف ژئودزیک‌ها و نگاشت نمایی اریفلدها، ساختار طولی اریفلدها مورد بحث قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود، یک قطعه ژئودزیک با نقاط انتهایی منظم (ناتکین) هیچ‌گاه از نقاط تکین عبور نمی‌کند. همچنین، قضیه مقایسه نسبت حجمی بیشاپ<sup>۶</sup> برای اریفلدهای با انحنای ریچی از پایین کران‌دار، قابل‌توسیع است. تعمیمی از قضیه قطر بیشینه چنگ<sup>۷</sup> برای اریفلدها ثابت می‌شود. به‌خصوص، یک رده‌بندی از اریفلدهای ریمانی خوب و کامل با قطر بیشینه و انحنای ریچی از پایین کران‌دار ارائه می‌شود. در آخرین مبحث، نسخه‌ای از قضیه شکافتگی برای اریفلدها مطرح و اثبات می‌گردد.

---

<sup>۵</sup>Toponogov

<sup>۶</sup>Bishop

<sup>۷</sup>Cheng