بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه سمنان است.

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

((گروه ریاضی))

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان :

تعمیم هایی از قضایای نقطه ی ثابت روی فضاهای متریک

نگارنده:

صمد محسنی کلاگر

استاد راهنما:

دکتر مجید اسحقی

استاد مشاور:

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

آبان ۱۳۹۱

سپاس گزاری...

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر مجید اسحقی، که با کرامتی چون خورشید ، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کار ساز و سازنده بارور ساختند ؛ تقدیر و تشکر نمایم.
(و یزکیهم و یعلمهم الکتاب و الحکمه).

معلما مقامت ز عرش برتر باد — همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد
به نکته های دلاویز و گفته های بلند — صحیفه های سخن از تو علم پرور باد

همچنین از پدر و مادر عزیز ، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب ، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم ؛ سپاسگزاری نمایم. از سرکار خانم مریم رمضانی نیز که در این پایان نامه مرا یاری نموده اند کمال تشکر را دارم. شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

صمد محسنی کلاگر
آبان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

در این رساله ابتدا قضیه ی نقطه ی ثابت ندلر [۱] و چند تعمیم از آن بیان شده است. سپس مفهوم انقباض تعمیم یافته را برای نگاشت های مجموعه مقداری تعریف کرده و با بیان چند قضیه، وجود نقاط ثابت برای این نگاشت ها را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین یک شمول دیفرانسیل هایپربولیک را به کمک این قضیه ها حل می کنیم. در ادامه چند قضیه ی نقطه ی ثابت جدید برای نگاشت های مجموعه مقداری تحت شرط انقباضی جدید اثبات می کنیم. و در پایان شرایط کافی که منجر به وجود نقطه ی ثابت سه تایی برای نگاشت های مجموعه مقداری می شوند را بدست می آوریم.

کلمات کلیدی:

نقطه ی ثابت، مجموعه ی مرتب جزئی، انقباض ضعیف تعمیم یافته، نقطه ی ثابت سه تایی.

---

[۱] Nadler

فهرست مطالب

عنوان ‌‌ صفحه

۱ مقدمه ای بر نقاط ثابت توابع تک مقداری و توابع مجموعه مقداری ۱

۱-۱ نقطه ی ثابت برای توابع تک مقداری ۲

۱-۲ نقطه ی ثابت برای توابع مجموعه مقداری ۳

۲ فضاهای مجموعه مقداری مرتب جزئی ۱۷

۲-۱ قضیه ی گرختی و توابع انقباضی در فضاهای مرتب جزئی ۱۸

۲-۲ شمول دیفرانسیل ۲۷

۳ ایده ی اثبات پاتا برای توابع مجموعه مقداری در فضاهای مرتب جزئی ۳۲

۳-۱ قضیه ی پاتا برای توابع تک مقداری ۳۳

۳-۲ شرط انقباضی پاتا برای توابع مجموعه مقداری ۳۴

٤ نتایج نقطه ثابت برای توابع مجموعه مقداری و تک مقداری در فضاهای مرتب جزئی ٤۱

۵ قضیه ی نقطه ثابت سه تایی برای توابع مجموعه مقداری در فضاهای مرتب جزئی ٦۳

۵-۱ قضیه ی نقطه ی ثابت دو تایی ۶۴

۵-۲ قضیه ی نقطه ی ثابت سه تایی ۶۷

منابع و مآخذ ۷٦

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۰

پیشگفتار

در فصل اول این رساله فرض می کنیم (X,d) فضای متریک کامل و در فصل های بعد فضای متریک کامل مرتب جزئی باشد. در این فصل نقطه ی ثابت، شرط انقباضی و قضیه ی معروف نقطه ی ثابت باناخ را بیان می کنیم. نگاشت مجموعه مقداری $F : X \to CB(X)$ را معرفی می کنیم که در آن $CB(X)$ مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های ناتهی، بسته و کراندار از X است. همچنین قضیه ی ندلر را برای وجود نقطه ی ثابت برای نگاشت های مجموعه مقداری ثابت می کنیم. در آخر این فصل به بررسی قضیه هایی که تعمیم قضیه ی ندلر می باشند، از جمله قضیه ی میزوکی-تاکاهاشی [۱] برای توابع مجموعه مقداری می پردازیم.

در فصل دوم نگاشت انقباض تعمیم یافته و خواص تقریبی، AV، $LCAV$ و $UCAV$ را برای نگاشت های مجموعه مقداری تعریف کرده و با سه قضیه به ترتیب بیان می کنیم که اگر نگاشت مجموعه مقداری F دارای خواص AV، $LCAV$ و $UCAV$ باشد تحت چه شرایطی نقطه ی ثابت دارد. در ادامه ی این فصل، معادله ی دیفرانسیل شمول و یک معادله ی دیفرانسیل شمول هایپربولیک را معرفی کرده و ثابت می کنیم که این معادله ی هایپربولیک در شرایط قضیه ی نقطه ثابت مورد نظر صدق می کند و دارای یک نقطه ی ثابت است که در واقع این نقطه ی ثابت همان جواب معادله است.

در سال ۲۰۱۱ میلادی، پاتا [۲]در [۳۶]، ایده ی جدیدی در زمینه ی قضایای نقطه ی ثابت به وجود آورده است. در فصل سوم این رساله با استفاده از ایده ی پاتا یک شرط انقباضی جدید برای نگاشت های مجموعه مقداری معرفی شده در فصل دوم بیان می کنیم و با استفاده از ایده ی اثبات پاتا ثابت می کنیم این نگاشت ها تحت شرط انقباضی جدید نقطه ی ثابت دارند و یک کران همگرایی برای این نگاشت ها بدست می آوریم.

در فصل چهارم تابع کنترل ψ، مجموعه ی $B(X)$ و تابع فاصله ی δ را معرفی کرده و با قضایایی بیان می کنیم که نگاشت انقباض مجموعه مقداری F شامل توابع ψ و δ تحت چه شرایطی می تواند نقطه ی ثابت داشته باشد و چگونه می توان این قضایا را در حالت خاص برای توابع تک مقداری نتیجه گرفت.

در فصل پنجم به بیان تعاریف و قضایای نقطه ی ثابت سه تایی برای توابع مجموعه مقداری می پردازیم و در پایان ثابت می کنیم که یک نگاشت مجموعه مقداری تحت چه شرایطی نقطه ی ثابت سه تایی دارد.

تمام نتایج و قضایای موجود در فصل های دوم، سوم و پنجم جدید می باشند و توسط مولف اثبات شده اند.

[۱] Mizoguchi-Takahashi

[۲] Pata

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$CB(X)$	مجموعه تمام زیر مجموعه های بسته، ناتهی و کراندار از X
H_d	متریک هاسدورف تولید شده توسط متریک d
$B(X)$	مجموعه تمام زیر مجموعه های ناتهی و کراندار از X
2^X	مجموعه تمام زیر مجموعه های ناتهی از X
$x \leq y$	x با y قابل مقایسه است
AV	ارزش تقریبی
CAV	ارزش تقریبی مقایسه ای
$LCAV$	ارزش تقریبی مقایسه ای پایینی
$UCAV$	ارزش تقریبی مقایسه ای بالایی
$C(J_a, \mathbb{R})$	فضای باناخ شامل توابع پیوسته از J_a به $\mathbb{R}$

فصل ۱

مقدمه ای بر نقاط ثابت توابع تک مقداری و توابع مجموعه مقداری

در این رساله، اگر F یک نگاشت مجموعه مقداری باشد، منظور از نماد Fx، اثر نگاشت F روی نقطه ی x ($F(x)$) می باشد.

در این فصل تعاریف و قضایایی از نقاط ثابت برای توابع تک مقداری و توابع مجموعه مقداری که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند را یادآور می‌شویم.

۱-۱ نقطه ی ثابت برای توابع تک مقداری

تعریف ۱-۱-۱. نقطه $x \in X$ نقطه ثابت نگاشت $f : X \to X$ نامیده می شود اگر $f(x) = x$.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنیم (X, d_X)، (Y, d_Y) دو فضای متریک باشند. نگاشت $f : X \to Y$ لیپ شیتز نامیده می شود اگر $L > 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x_1, x_2 \in X$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2). \quad (۱-۱)$$

تعریف ۱-۱-۳. اگر نگاشت $f : X \to Y$ یک نگاشت لیپ شیتز باشد، عدد (ضریب)

$$K = \inf\{L \in \mathbb{R} \mid \forall x_1, x_2 \in X, d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)\}, \quad (۱-۲)$$

ثابت لیپ شیتز نگاشت f نامیده می شود. اگر $K < 1$، آنگاه f را یک نگاشت انقباضی می نامیم.

در سال ۱۹۲۲ ریاضیدان لهستانی به نام استفان باناخ[۱] در [۳۰] قضیه ای را تحت شرایط مناسب برای وجود و یکتایی نقطه ثابت مطرح کرد که بعد ها این قضیه به قضیه ی نقطه ثابت باناخ یا قانون انقباض باناخ [۲] معروف شد.

قضیه ۱-۱-۴. *(قضیه ی نقطه ی ثابت باناخ) اگر (X, d) یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباضی باشد، آنگاه f یک نقطه ثابت منحصر بفرد دارد.*

---

[۱] Stefan Banach

[۲] Banach Contraction Principle

برهان. رجوع شود به قضیه ی ۱.۲ از [۲۹]. □

۱-۲ نقطه ی ثابت برای توابع مجموعه مقداری

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد، $CB(X)$ خانواده ی همه ی زیر مجموعه های ناتهی، بسته و کراندار از X است.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. در این صورت نگاشت $H : CB(X) \times CB(X) \to [0, \infty)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$H(A, B) = \max\{\sup_{b \in B} D(b, A), \sup_{a \in A} D(a, B)\} \qquad (A, B \in CB(X))$$

$$D(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b),$$

$$D(A, b) = \inf_{a \in A} d(a, b).$$

در قضیه ی زیر نشان می دهیم که H یک متریک روی $CB(X)$ است. این متریک را متریک هاسدورف تولید شده توسط d می نامیم.

قضیه ۱-۲-۲. *$(CB(X), H)$ یک فضای متریک است.*

برهان. برای هر A، B و C از $CB(X)$ موارد زیر را ثابت می کنیم:

۱) $H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$،

۲) $H(A, B) = H(B, A)$،

۳) $H(A, B) \leq H(A, C) + H(B, C)$.

اثبات (۱) و (۲) واضح است. برای اثبات (۳)، با استفاده از تعریف ۱-۲-۱ داریم

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in A}\{D(x, B)\} &= \sup_{x \in A}\{\inf_{y \in B} d(x, y)\} \\
&\leq \sup_{x \in A}\{\inf_{y \in B}(d(x, z) + d(y, z))\} \\
&= \sup_{x \in A}\{d(x, z) + \inf_{y \in B} d(y, z)\} \\
&= \sup_{x \in A} d(x, z) + \inf_{y \in B} d(y, z) \quad (\forall z \in X),
\end{aligned}$$

که نتیجه می دهد

$$\sup_{x\in A}\{D(x,B)\} \leq \sup_{x\in A}\inf_{z\in C} d(x,z) + \sup_{z\in C}\inf_{y\in B} d(z,y)$$
$$= \sup_{x\in A} D(x,C) + \sup_{z\in C} D(z,B).$$

به طور مشابه داریم

$$\sup_{x\in B}\{D(x,A)\} \leq \sup_{x\in B}\inf_{z\in C} d(x,z) + \sup_{z\in C}\inf_{y\in A} d(z,y)$$
$$= \sup_{x\in B} D(x,C) + \sup_{z\in C} D(z,A).$$

حال قرار می دهیم

$$a_1 = \sup_{x\in A} D(x,C),$$

$$a_2 = \sup_{z\in C} D(z,B),$$

$$a_3 = \sup_{x\in B} D(x,C),$$

$$a_4 = \sup_{z\in C} D(z,A).$$

با استفاده از تعریف ۱-۲-۱ داریم

$$H(A,B) \leq \max\{a_1+a_2, a_3+a_4\}, \qquad (۱-۳)$$

ازطرفی چون

$$a_1 \leq \max\{a_1, a_4\},$$

$$a_2 \leq \max\{a_2, a_3\},$$

$$a_3 \leq \max\{a_2, a_3\},$$

$$a_4 \leq \max\{a_1, a_4\},$$

و

$$a_1 + a_2 \leq \max\{a_1, a_4\} + \max\{a_2, a_3\}, \qquad (۴-۱)$$

و

$$a_3 + a_4 \leq \max\{a_2, a_3\} + \max\{a_1, a_4\}, \qquad (۵-۱)$$

در نتیجه با استفاده از روابط(۱-۳)، (۱-۴)، (۱-۵) و تعریف ۱-۲-۱ داریم

$$\begin{aligned} H(A,B) &\leq \max\{a_1, a_4\} + \max\{a_2, a_3\} \\ &= \max\{\sup_{x\in A} D(x,C), \sup_{z\in C} D(z,A)\} + \max\{\sup_{z\in C} D(z,B), \sup_{x\in B} D(x,C)\} \\ &= H(A,C) + H(B,C). \end{aligned}$$

و برهان تمام است.

□

ملاحظه ۱-۲-۳. *فرض کنیم* $A = \{a\}$ *و* $B = \{b\}$*، در این صورت داریم* $D(a,B) = d(a,b)$ *و* $D(b,A) = d(a,b)$ *که نتیجه می شود*

$$H(A,B) = d(a,b).$$

لم ۱-۲-۴. *فرض کنیم* $A, B \in CB(X)$ *و* $a \in A$*. در این صورت برای* $a \in A$ *و* $\epsilon > 0$*،* $b \in B$ *ای وجود دارد به طوری که*

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \epsilon.$$

برهان. رجوع شود به ملاحظه ی ۱ در بخش ۳ از [۳۱]. □

لم ۱-۲-۵. *فرض کنیم* $\{A_n\}$ *یک دنباله در* $CB(X)$ *باشد و برای* $A \in CB(X)$ *داشته باشیم* $\lim_{n\to\infty} H(A_n, A) = 0$*. اگر* $x_n \in A_n$ *و* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$*، در این صورت داریم* $x \in A$*.*

برهان. رجوع شود به لم ۲ از [۲۶]. □

تعریف ۱-۲-۶. نگاشت $F : X \to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقداری نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۷. نقطه ی $x \in X$ یک نقطه ی ثابت از نگاشت مجموعه مقداری F نامیده می شود هرگاه $x \in Fx$.

تعریف ۱-۲-۸. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $F : X \to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقداری انقباضی نامیده می شود هرگاه $k \in [0,1)$ ای وجود داشته باشد به طوری که نامساوی زیر برای هر $x,y \in X$ برقرار باشد

$$H(Fx,Fy) \leq kd(x,y). \qquad (۱-۶)$$

در سال ۱۹۶۹ ، ندلر در [۳۱] ، قضیه ای را برای تعمیم قضیه ی نقطه ثابت باناخ به صورت زیر ارائه داد.

قضیه ۱-۲-۹. *(قضیه ی نقطه ی ثابت ندلر)[۳۱] فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. اگر $T : X \to CB(X)$ نگاشت مجموعه مقداری انقباضی باشد، آنگاه T نقطه ثابت دارد.*

برهان. فرض کنیم $x_0 \in X$، در این صورت بنابر ناتهی بودن Tx_0، $x_1 \in X$ ای وجود دارد به طوری که $x_1 \in Tx_0$، اگر $x_1 = x_0$، اثبات تمام است. فرض کنیم $x_1 \neq x_0$. $l_1 \in (l,1)$ای وجود دارد به طوری که با استفاده از (۱-۶) داریم

$$D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1) \leq ld(x_0,x_1) < l_1d(x_0,x_1).$$

به طور مشابه $x_2 \in X$ ای وجود دارد به طوری که $x_2 \in Tx_1$ و $d(x_1,x_2) \leq l_1d(x_0,x_1)$. با ادامه ی این روند می توانیم دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ را چنان پیدا کنیم که $x_n \neq x_{n+1}$ و $x_{n+1} \in Tx_n$ و

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq l_1d(x_{n-1},x_n) \qquad \forall n \geq 1.$$

حال نشان می دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ $(m>n)$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\le d(x_m,x_{m-1}) + d(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+2},x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_n) \\ &\le l_1^{m-n} d(x_{n+1},x_n) + \cdots + l_1^2 d(x_{n+1},x_n) + l_1 d(x_{n+1},x_n) + d(x_{n+1},x_n) \\ &\le \frac{1-l_1^{m-n}}{1-l_1} d(x_{n+1},x_n) \\ &\le \frac{1}{1-l_1} d(x_{n+1},x_n) + d(x_m,x_n), \end{aligned}$$

اگر $m,n \to \infty$، آنگاه داریم $d(x_m,x_n) \to 0$. پس دنباله ی $\{x_n\}$ کوشی است. از طرفی چون (X,d) یک فضای متریک کامل است، پس $z \in X$ ای وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z.$$

حال ثابت می کنیم z یک نقطه ثابت برای نگاشت T است.

$$\begin{aligned} 0 \le D(z,Tz) = D(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}, Tz) &= \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1},Tz) \\ &\le \lim_{n\to\infty} H(Tx_n,Tz) \\ &= \lim_{n\to\infty} l d(x_n,z) = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه $D(z,Tz)=0$ و $z \in Tz$ و برهان تمام است.

□

مثال ۱-۲-۱۰. فرض کنیم $X=[0,1]$ و $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x,y \in X$، در این صورت (X,d) یک فضای متریک کامل است. اگر نگاشت $T: X \to CB(X)$ با ضابطه $Tx=[0,1]$ تعریف شده باشد، آنگاه T یک نگاشت مجموعه مقداری انقباضی است. با استفاده از ضابطه نگاشت T، برای هر $x \in X$ داریم $x \in Tx$ که نشان می دهد هر نقطه از بازه $[0,1]$ نقطه ثابت نگاشت T است.

مثال ۱-۲-۱۱. فرض کنیم $X=[0,1]$ و $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x,y \in X$، در این صورت (X,d) یک فضای متریک کامل است. اگر نگاشت های $f: X \to X$ و $F: X \to CB(X)$ به

ترتیب به صورت زیر تعریف شده باشند

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}x + 1 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

و

$$Fx = \{0\} \cup \{f(x)\} \quad \forall x \in X.$$

بنابراین F یک نگاشت مجموعه مقداری انقباضی است و دارای نقاط ثابت $0, \frac{2}{3}$ می باشد.

ملاحظه ۱-۲-۱۲. *دو مثال بالا نشان می دهند که نقطه ثابت در قضیه ندلر لزوما یکتا نیست.*

در قضیه ی زیر نشان می دهیم که نقطه ی ثابت در قضیه ی ندلر تحت شرایطی می تواند یکتا باشد.

قضیه ۱-۲-۱۳. *فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقداری باشد. اگر T یک نگاشت انقباضی باشد و نامساوی*

$$\inf_{y \in Tx_1} \{d(x_1, y) + d(y, z)\} \leq D(x_1, Tx_1) + D(Tx_1, z), \qquad (۱-۷)$$

برای هر $x_1, z \in X$ برقرار باشد آنگاه $l_1 \in [0, 1)$ ای وجود دارد به طوری که

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1-l}(D(x_1, Tx_1) + D(x_2, Tx_2)) \qquad \forall x_1, x_2 \in X,$$

همچنین T دارای نقطه ی ثابت یکتا است.

برهان. برای هر $y, z \in X$ داریم

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(y, z) + d(z, x_2),$$

و

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq \inf_{y \in Tx_1} \{d(x_1, y) + d(y, z)\} + d(z, x_2) \\ &\leq D(x_1, Tx_1) + D(z, Tx_1) + d(z, x_2), \end{aligned} \qquad (۱-۸)$$

از طرفی

$$\inf_{z\in Tx_2}\{D(z,Tx_1)+d(z,x_2)\} \le \inf_{z\in Tx_2}\{d(y,z)+d(z,x_2)\} \le D(y,Tx_2)+D(x_2,Tx_2). \quad (۱-۹)$$

از روابط (۱-۸) و (۱-۹) داریم

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\le D(x_1,Tx_1)+D(y,Tx_2)+D(x_2,Tx_2)\\ &\le D(x_1,Tx_1)+H(Tx_1,Tx_2)+D(x_2,Tx_2)\\ &\le D(x_1,Tx_1)+ld(x_1,x_2)+D(x_2,Tx_2), \end{aligned}$$

و

$$(1-l)d(x_1,x_2) \le D(x_1,Tx_1)+D(x_2,Tx_2),$$

که نتیجه می دهد

$$d(x_1,x_2) \le \frac{1}{1-l}D(x_1,Tx_1)+D(x_2,Tx_2).$$

اگر $x_1,x_2\in X$ دو نقطه ی ثابت از نگاشت T باشند، طبق تعریف نقطه ی ثابت برای توابع مجموعه مقداری داریم

$$x_1\in Tx_1 \qquad , \qquad x_2\in Tx_2 \Rightarrow D(x_1,Tx_1)=D(x_2,Tx_2)=0,$$

که نتیجه می دهد $d(x_1,x_2)=0$ و $x_1=x_2$ و برهان تمام است.

□

بعد از قضیه ندلر برای توابع مجموعه مقداری تحقیقات گسترده ای در این زمینه انجام شده است که با استفاده از شرط های ضعیف تر این قضیه را تعمیم داده اند. برای نمونه می توان به یکی از مهمترین آنها یعنی قضیه میزوکی-تاکاهاشی در [۲۷] اشاره کرد.

قضیه ۱-۲-۱۴. [۲۷] *فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. فرض کنیم $T:X\to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقداری باشد که برای هر $x,y\in X$ در نامساوی زیر صدق کند:*

$$H(Tx,Ty)\le \alpha(d(x,y))d(x,y), \quad (۱-۱۰)$$

که $\alpha : [0, \infty) \to [0, 1)$ *برای هر* $t \in [0, \infty)$ *در شرط* $\limsup_{s\to t^+} \alpha(s) < 1$ *صدق می کند. در این صورت* T *یک نقطه ثابت دارد.*

برهان. گیریم $x_0 \in X$ و $x_1 \in Tx_0$. عدد طبیعی n_1 را طوری انتخاب می کنیم که

$$\alpha^{n_1}(d(x_0, x_1)) \leq \{1 - \alpha(d(x_0, x_1))\}d(x_0, x_1).$$

حال می توانیم $x_2 \in T(x_1)$ را طوری انتخاب کنیم که با تعریف متریک هاسدورف داشته باشیم

$$d(x_2, x_1) \leq H(Tx_1, Tx_0) + \alpha^{n_1}(d(x_0, x_1)),$$

در این صورت داریم

$$d(x_2, x_1) \leq \alpha(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) + \alpha^{n_1}(d(x_0, x_1)) < d(x_0, x_1).$$

حال عدد طبیعی $n_2 > n_1$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$\alpha^{n_2}(d(x_2, x_1)) \leq \{1 - \alpha(d(x_2, x_1))\}d(x_2, x_1).$$

چون $Tx_2 \in CB(X)$، $x_3 \in Tx_2$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$\begin{aligned} d(x_3, x_2) &\leq H(Tx_2, Tx_1) + \alpha^{n_2}(d(x_2, x_1)) \\ &\leq \alpha(d(x_2, x_1))d(x_2, x_1) + \alpha^{n_2}(d(x_2, x_1)) \\ &< d(x_2, x_1). \end{aligned}$$

با ادامه این روند، چون برای هر k داریم $Tx_k \in CB(X)$ می توانیم n_k را طوری انتخاب کنیم که

$$\alpha^{n_k}(d(x_k, x_{k-1})) \leq \{1 - \alpha(d(x_k, x_{k-1}))\}d(x_k, x_{k-1}).$$

حال $x_{k+1} \in Tx_k$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq H(Tx_k, Tx_{k-1}) + \alpha^{n_k}(d(x_k, x_{k-1})),$$

بنابراین $d(x_{k+1}, x_k) < d(x_k, x_{k-1})$. اگر قرار دهیم $d_k := d(x_k, x_{k-1})$ آنگاه داریم که $\{d_k\}$ دنباله ای نزولی و نامنفی است. نشان می دهیم این دنباله کوشی است. قرار می دهیم $\lim_{k\to\infty} d_k = c \geq 0$. طبق فرض داریم که $\limsup_{r\to c^+} \alpha(r) < 1$، بنابراین k_0 ای وجود دارد که برای هر $k \geq k_0$ داشته باشیم $\alpha(d_k) < h$ که در آن h ثابت دلخواهی است که $\limsup_{r\to c^+} \alpha(r) < h < 1$. حال داریم

$$
\begin{aligned}
d_{k+1} &= d(x_{k+1}, x_k) \\
&\leq H(Tx_k, Tx_{k-1}) + \alpha^{n_k}(d_k) \\
&\leq \alpha(d_k)d_k + \alpha^{n_k}(d_k) \\
&\leq \alpha(d_k)\alpha(d_{k-1})d_{k-1} + \alpha(d_k)\alpha^{n_{k-1}}(d_{k-1}) + \alpha^{n_k}(d_k) \\
&\dots \\
&\leq \Pi_{i=1}^{k}\alpha(d_i)d_1 + \sum_{m=1}^{k-1}\Pi_{i=m+1}^{k}\alpha(d_i)\alpha^{n_m}(d_m) + \alpha^{n_k}(d_k) \\
&\leq \Pi_{i=1}^{k}\alpha(d_i)d_1 + \sum_{m=1}^{k-1}\Pi_{i=max\{k_0,m+1\}}^{k}\alpha(d_i)\alpha^{n_m}(d_m) + \alpha^{n_k}(d_k) := A
\end{aligned}
$$

در نامساوی آخر از اینکه $\alpha < 1$ استفاده می کنیم تا بعضی از عوامل را حذف کنیم. حال روی دومین