دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

جبرها و ساختارهای نوویکف روی جبرهای لی

نگارش: هانیه طایر

استاد راهنما: دکتر حسام‌الدین شریفی
استاد مشاور: دکتر محمدعلی نصرآزادانی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی و سپاس

خداوند مهربان را سپاس می‌گویم که از هیچ هستی‌ام بخشید و حلاوت کسب علم را بر وجودم ارزانی داشت. خدای بزرگی که سایه پر از آرامش پدر و مادری مهربان را به من هدیه کرد و برادرانی که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر، آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و دعای خیرشان سرمایه‌های جاودانی زندگی من است.

خدایا به من آرامشی ده تا بپذیرم آنچه را که نمی‌توانم تغییر دهم، دلیری ده تا تغییر دهم آنچه را که می‌توانم تغییر دهم و بینشی ده تا تفاوت آن دو را بدانم.

چکیده

ایده‌آل‌های جبرهای نوویکف و ساختارهای نوویکف روی جبرهای لی متناهی‌البعد را مطالعه می‌کنیم و برخی از قضایای ساختاری درباره‌ی ایده‌آل‌های جبرهای نوویکف را ارائه می‌دهیم. خانواده‌ای از جبرهای لی با رده‌های بالای حل پذیری را نشان می‌دهیم که ساختار نوویکف را می‌پذیرند. با ارائه مثالی از جبرهای لی پوچ‌توان سه مرحله‌ای نشان می‌دهیم که ساختار نوویکف نمی‌پذیرند و ساختار نوویکف پذیری را روی جبرهای لی پوچ‌توان سه مرحله‌ای آزاد را بررسی می‌کنیم. در انتها، نشان می‌دهیم که جبرهای لی ماتریس‌های بالا مثلثی فقط در ابعاد بسیار کوچک ساختار نوویکف می‌پذیرند.

کلید واژه: جبر لی، حل‌پذیری، پوچ‌توانی، فیلی‌فورم، جبر چپ‌متقارن، جبر نوویکف، ساختار نوویکف

فهرست مطالب

مقدمه

ماریوس سوفوس لی[۱]، یکی از مهم‌ترین ریاضیدانان قرن نوزدهم بود. با ارزش‌ترین دستاورد وی نظریه پیوسته متقارن، و به کار بردن این نظریه در مطالعه‌ی ساختار هندسی و معادلات دیفرانسیل است. یکی از بزرگترین موفقیت‌های لی، کشف گروه‌های تبدیل پیوسته بود که هم اکنون گروه‌های لی نامیده می‌شوند. وی در ادامه ساختاری را تعریف کرد و مولدهای آن را براکت‌های جابجاگر نامید. امروزه به افتخار لی، این ساختار را جبر لی می‌نامند.

سرگئی نوویکف[۲]، پیشرفت‌های مهمی در توپولوژی پدید آورد و در این زمینه برنده مدال فیلدز ۱۹۷۰ گردید. نوویکف در زمینه‌های مختلف از قبیل فیزیک، توپولوژی، مدل‌های انتگرال‌پذیر در مکانیک و ریاضیات کلاسیک، مدل‌های انتگرال‌پذیر در مکانیک کوانتمی و مکانیک آماری، ویژگی‌های هامیلتونی مطالعه کرد و آثاری در این زمینه‌ها داشت و بخشی از آثار وی در زمینه‌ی نظریه‌ی میدان‌های ۲-بعدی همدیس، موضوع جبری جدید بسیار زیبایی را فراهم کرد.

در جبرها، آنچه که مورد توجه ریاضیدان‌ها قرار می‌گیرد، طبقه‌بندی و ساختارهاست. طبقه‌بندی جبرهای لی پوچ‌توان هنوز یک مسئله‌ی باز است، گر چه پیش از این، طبقه‌بندی انواع دیگر جبرهای لی در ۱۹۸۰ به دست آمده بودند(مانند ساده‌ها و نیم‌ساده‌ها)، ولی هنوز هم توصیف کردن و طبقه‌بندی کردن جبرهای لی پوچ‌توان، یکی از مسئله‌های باز باقی مانده در نظریه‌ی جبرهای لی با بعد متناهی روی میدان‌های جبری بسته با مشخصه‌ی صفر است.بنابراین به نظر می‌رسد سنجیده‌تر است که این مسئله را با زیر رده‌ای از جبرهای لی پوچ‌توان حل کنیم و این موضوع انگیزه‌ی ما برای مطالعه‌ی جبرهای لی فیلی‌فورم است. در واقع جبرهای لی فیلی‌فورم یک نوع خاصی از جبرهای لی پوچ‌توان هستند که توسط ورگن[۳] در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ معرفی شدند.

در مقاله‌های اخیر، خانواده‌ی مشخصی از جبرهای لی فیلی‌فورم مختلط $n-$بعدی مطالعه شده‌اند، همچنین یک روش جدید برای ساختن جبرهای لی فیلی‌فورم با بزرگ‌ترین بعد ایده‌آل‌های آبلی‌شان به دست آمده است. نتایج به دست آمده را می‌توان یک قدم رو به جلو برای حل این مسئله‌ی و طبقه‌بندی این جبرها

[۱] Marius Sophus Lie

[۲] Sergei Novikov

[۳] Vergne

در نظر گرفت.
بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و فیزیک از جبرهای چپ-متقارن، یا بطور خلاصه $LSA-$ ها، نشأت می‌گیرند. این جبرها، قبلاً، توسط کیلی[۴] در۱۸۹۶، در متن جبرهای درخت ریشه‌دار معرفی شدند. سپس برای مدت طولانی به فراموشی سپرده شدند تا اینکه در سال۱۹۶۰، وینبرگ[۵]، مخروط‌های همگن محدب را با استفاده از جبرهای چپ-متقارن طبقه‌بندی کرد. از این زمان به بعد، مقاله‌های تحقیقی کاملاً متفاوت زیادی روی $LSA-$ ها منتشر شد. ازآن‌جمله، ارتباط بین منیفلدهای مسطح آفینی با گروه‌های اساسی‌شان را کشف کردند و اخیرا، جبرهای چپ‌متقارن را در ریاضی فیزیک، برای نظریه‌ی میدان کوانتوم و نظریه معرفی کردند. همچنین $LSA-$ها در نظریه‌ی میدان کانفرمال موردعلاقه هستند. جبرهای چپ متقارن یک رده از جبرهای غیر شرکت‌پذیر است و با توجه به غیر شرکت‌پذیری، قضیه‌ی نمایش مناسبی از جبرهای چپ متقارن وجود ندارد. جبرهای چپ متقارن شامل فرم‌های درجه دوم است که در حالت کلی خطی نیستند. بنابراین مطالعه‌ی آن‌ها بسیار سخت است. بنابراین یکی از مهم‌ترین مشکلات این است که چگونه جبرهای چپ متقارن مفیدی بسازیم. یک راه این است که غیر خطی بودن آن‌ها را در جهت مشخصی کاهش بدهیم. یک راه دیگر این است که آن‌ها را از بیان جبرها و ساختارهای جبری ساخته شده بسازیم.
$LSA-$ها پذیرنده‌ی جبرلی هستند، ولی هر جبرلی ساختار LSA را نمی‌پذیرد. بخصوص، جبرهای لی پوچتوانی وجود دارند که هیچ ساختار LSA نمی‌پذیرند.
جبر نوویکف نوع خاصی از جبرهای چپ‌متقارن است. جبرهای نوویکف در مطالعه‌ی عملگرهای هامیلتون در زمینه‌ی انتگرال‌پذیری معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مشخصی معرفی شده بودند. همچنین در مطالعه‌ی کروشه‌های پواسون از نوع هیدرودینامیک و عملگر معادله یانگ-باکستر[۶] ظاهر شدند. بخصوص، جبرهای نوویکف در تناظر دو سویی با رده‌ی خاصی از جبرهای کانفرمال لی هستند. این اهمیت جبرهای نوویکف در فیزیک نظری را نشان می‌دهد. همچنین ارتباط بین جبرهای نوویکف و جبرهای ورتکس[۷] مشهور است.نوویکف این پرسش را مطرح کرد که آیا جبر

[۴]Caylay

[۵]Vinberg

[۶]Yang-Baxter

[۷]Vertex

نوویکف ساده وجود دارد. زلمانووف[8] نتایجی در این زمینه بدست‌آورد و آن‌ها را توسعه داد و نظریه‌ی جبرهای نوویکف و طبقه بندی آن‌ها را شروع کرد.
از آن پس ساختار جبری جبرهای نوویکف توسط افراد دیگر مطالعه شد و پرسش برای ساختارنوویکف‌پذیر مطرح شد و تلاش‌های زیادی برای طبقه‌بندی جبرهای نوویکف مختلط در ابعاد کوچک صورت گرفت. از آن جمله، بای[9] و منگ[10] جبرهای نوویکف را روی $\mathbb{C}$ تا بعد ۳ طبقه بندی کردند. متذکر می‌شویم که طبقه‌بندی جبرهای نوویکف ۴−بعدی خیلی مشکل است و تاکنون دسته‌بندی اصولی در این بعد روی جبرهای نوویکف انجام نشده است.
پرسش برای ساختارنوویکف‌پذیر آسان‌تر از پرسش برای ساختار $LSA-$ پذیر است.یک دلیل اینست که تعداد کمتری از جبرهای لی, ساختار نوویکف می‌پذیرند نسبت به جبرهای لی که ساختار LSA می پذیرند.
در این رساله قصد داریم بخشی از طبقه‌بندی‌ها و ساختارهای جبر نوویکف را بررسی کنیم. در این راستا:
در فصل اول، مقدماتی از مفهوم جبرلی، ایده‌آل‌های جبر لی، جبر لی حل‌پذیر و جبر لی پوچ‌توان و مثال‌هایی از این جبرها ارائه می‌دهیم.
در فصل دوم، جبرهای چپ و راست متقارن، ساختار آفین، جبرهای نوویکف، ساختارهای نوویکف را تعریف می‌کنیم و برای درک بهتر مثال‌هایی از این تعاریف ارائه می‌دهیم و سعی می‌کنیم روی برخی جبرهای لی این جبرها و ساختارها را بسازیم.
در فصل سوم، جبر نوویکف آزاد و جبر لی فیلی‌فورم را معرفی می‌کنیم و با استفاده از این جبرها ساختار نوویکف را روی جبرهای لی حل‌پذیر $k-$مرحله‌ای و جبرهای لی پوچ‌توان سه مرحله‌ای بررسی می‌کنیم.
در فصل چهارم، نشان می‌دهیم که ساختار نوویکف روی جبرهای لی ماتریس‌های بالا مثلثی و ماتریس‌های اکیدا بالا مثلثی، فقط در ابعاد خیلی کوچک وجود دارد.

---

[8] Zelmanov

[9] Bai

[10] Meng

فصل ۱

تعاریف و مقدمات جبر لی

در این فصل، مطالبی از مراجع [۱۱، ۱۲] گردآوری شده است که شامل مقدماتی از جبر لی می‌باشد.

۱.۱ مفهوم جبر لی

تعریف ۱.۱. فضای برداری L روی میدان F، همراه با عمل

$$L \times L \to L,$$
$$(x, y) \mapsto [x, y]$$

(این عمل را *براکت* یا *جابه‌جاگر* x و y می‌گویند.) یک *جبر لی* روی F نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صادق باشد:

(۱) عمل براکت دوخطی باشد، یعنی برای هر $x, y, z \in L$ و $\lambda \in F$،

$$۱)[x, y+z] = [x, y] + [x, z],$$
$$۲)[x+y, z] = [x, z] + [y, z],$$
$$۳)[\lambda x, y] = [x, \lambda y] = \lambda [x, y].$$

(۲) برای هر $x \in L$، $[x, x] = ۰$.

(۳) برای هر $x, y, z \in L$، $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = ۰$.

شرط (۳) *اتحاد ژاکوبی* نامیده می‌شود.

تذکر ۲.۱. شرط (۲) در تعریف جبر لی نتیجه می دهد:

$$[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in L$$

$$[x, ۰] = ۰ = [۰, x], \forall x \in L$$

مثال ۳.۱. $\mathbb{R}^۳$ با عمل ضرب خارجی، یک جبر لی است.

$$\wedge : \mathbb{R}^۳ \times \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳,$$
$$\wedge(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

مثال ۴.۱. اگر $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ نمایانگر ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد، V همراه با عمل براکت زیر، یک جبر لی است.

$$\forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad [A, B] = AB - BA$$

هم‌چنین فرض کنید $t(n,F)$ نشان دهنده‌ی ماتریس‌های بالامثلثی باشد در این صورت:

$$\begin{aligned}[\ ,\ ]: t(n,F)\times t(n,F) &\longrightarrow t(n,F)\\ (A,B) &\longmapsto [A,B]=AB-BA\end{aligned}$$

یک فرم دو خطی است که به همراه براکت فوق یک جبر لی است. همچنین، $n(n,F)$ و $\delta(n,F)$ که به ترتیب نشان دهنده‌ی ماتریس‌های اکیدا بالامثلثی و قطری هستند، به همراه براکت فوق جبر لی هستند.

مثال ۵.۱. فرض کنید L یک فضای برداری روی میدان F باشد که در آن فرم دو خطی $[\ ,\ ]$ بصورت:

$$\forall x,y\in L; [x,y]=\circ$$

تعریف شده است. در این صورت L یک جبر لی است.

تعریف ۶.۱. جبر لی L را با فرم دو خطی که در مثال قبل بیان شد، یک جبر لی *آبلی* می‌گویند.

مثال ۷.۱. جبر لی $\delta(n,F)$ یک جبر لی آبلی است.

مثال ۸.۱. فرض کنید L جبر لی ۱− بعدی، با پایه $\{x\}$ است. $(x\in F)$ برای هر عضو دلخواه a,b داریم:

$$a=\lambda x, b=\lambda' x, \forall\lambda,\lambda'\in F$$
$$[a,b]=\lambda\lambda'[x,x]=\circ$$

بنابراین L آبلی است.

مثال ۹.۱. فرض کنید L یک جبر لی دو بعدی غیرآبلی است. پایه $\{x,y\}$ را برای L در نظر بگیرید. برای هر عضو دلخواه $a,b\in L$ داریم:

$$a=\alpha x+\beta y, b=\alpha' x+\beta' y, \forall\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in F$$

$$[\alpha x+\beta y,\alpha' x+\beta' y]=\alpha\alpha'[x,x]+\beta\beta'[y,y]+\alpha\beta'[x,y]+\beta\alpha'[y,x]$$
$$=\alpha\beta'[x,y]+\beta\alpha'[y,x]$$
$$=\alpha\beta'[x,y]-\beta\alpha'[x,y]$$
$$=\alpha''\beta''[x,y]$$

بنابراین $L'=span\{[x,y]\}$ ، لذا $dimL'=۱$ و L' آبلی است.

تعریف ۱۰.۱. دو جبر لی L و L' یکریخت‌اند، اگر یکریختی فضای برداری $\phi:L\to L'$ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$\forall x,y\in L \quad \phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)],$$

در این‌صورت ϕ یکریختی جبرهای لی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱. زیرمجموعه‌ی K از L، *زیرجبر (لی)* نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x,y\in K$، $[x,y]\in K$ باشد، به عبارت دیگر K به نوبه‌ی خود همراه با عملی که از L دارد، یک جبر لی باشد.

مثال ۱۲.۱. مجموعه ماتریس‌های $n\times n$ روی F را با $gl(n,F)$ نشان می‌دهند. $\boldsymbol{t}(n,F)$ و $\boldsymbol{n}(n,F)$ زیر جبرهای $gl(n,F)$ هستند.

مثال ۱۳.۱. هر عضو ناصفر $x\in L$، زیرجبر یک بعدی Fx، همراه با ضرب بدیهی را می‌سازد.

تعریف ۱۴.۱. اگر V فضای برداری متناهی‌البعد روی F باشد، مجموعه‌ی تبدیلات خطی از V به V را با $End\ V$ نمایش می‌دهند. بعد $End\ V$ به عنوان یک فضای برداری روی F، برابر $n^۲$ می‌باشد که $n=dim\ V$ است.

تعریف ۱۵.۱. $End\ V$ همراه با عمل $[x,y]=xy-yx$، به یک جبر لی روی F تبدیل می‌شود. برای تشخیص این ساختار جبری از ساختار قبلی آن که شرکت‌پذیر بود، $End\ V$ به عنوان یک جبر لی را با $gl(V)$ نمایش می‌دهند و آن را جبر *خطی عام* می‌نامند. هر زیرجبر از جبر لی $gl(V)$، جبر لی خطی نامیده می‌شود.

در تعریف $End\ V$، می‌توان به جای در نظر گرفتن تبدیلات خطی از ماتریس‌ها استفاده کرد، یعنی پایه‌ای برای V در نظر گرفت و در نتیجه $gl(V)$ را با مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n\times n$ روی F

مشخص کرد، که در این‌صورت آن را با $gl(n, F)$ نمایش می‌دهند. این دیدگاه محاسبات را ساده‌تر می‌سازد. به عنوان مثال، جدول ضرب $gl(n, F)$، نسبت به پایه‌ی استاندارد که از ماتریس‌های E_{ij}[1] تشکیل شده است، به صورت زیر است:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj},$$

زیرا، $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

مشاهده می‌شود که تمام ضرایب ±۱ یا ۰ هستند، به‌ویژه، در میدان F قرار دارند.

مثال ۱۶.۱. فرض کنید $dim(V) = l + ۱$ باشد. مجموعه‌ی خودریختی‌هایی از V که *اثر*[2] آن‌ها صفر می‌باشد را با $sl(V)$، یا $sl(l + ۱, F)$ نمایش می‌دهند. (اثر یک ماتریس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی آن می‌باشد؛ و مستقل از انتخاب پایه برای V است، از این‌رو اثر یک خودریختی از V خوش‌تعریف است.) از آن‌جا که $Tr(xy) = Tr(yx)$ و $Tr(x + y) = Tr(x) + Tr(y)$، $sl(V)$ زیرجبری از $gl(V)$ است، که *جبر خطی خاص* نامیده می‌شود. در ادامه می‌خواهیم بعد $sl(V)$ را محاسبه کنیم. از یک طرف می‌دانیم $sl(V)$ زیرجبر سره‌ای از $gl(V)$ است، از این‌رو بعد آن حداکثر $(l + ۱)^۲ - ۱$ می‌باشد. از سوی دیگر، می‌توانیم این تعداد از ماتریس‌های مستقل خطی با اثر صفر را مشخص کنیم: تمام ماتریس‌های E_{ij} $(i \neq j)$، همراه با تمام ماتریس‌های $H_i = E_{ii} - E_{i+۱,i+۱}$ $(۱ \leq i \leq l)$، که در کل $l + (l + ۱)^۲ - (l + ۱) = (l + ۱)^۲ - ۱$ ماتریس هستند. این پایه معمولاً به عنوان پایه‌ی استاندارد $sl(l + ۱, F)$ در نظر گرفته می‌شود.

اگر H و K زیرفضاهایی از L باشند، $[H, K]$ نمایانگر زیرفضایی از L می‌باشد که توسط جابه‌جاگرهای $[x, y]$، $x \in H$، $y \in K$ تولید شده است.

۲.۱ جبر

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید A فضای برداری روی میدان F است. A با نگاشت دو خطی

$$A \times A \longrightarrow A$$

[1] ماتریسی که درایه‌ی (i, j) آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر می‌باشد.

[2] trace

$$(x, y) \longmapsto xy$$

جبر نامیده می‌شود. به xy ضرب x و y می‌گویند.

معمولا جبرهایی که ضرب آن‌ها ویژگی‌های بیشتری دارد مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بعنوان مثال ضربی که در جبرهای لی تعریف شد در شرط (۲) و(۳) نیز صدق می‌کنند. (ضرب xy بصورت $[x, y]$ تعریف شده است.)

تعریف ۱.۱۸. جبر A شرکت‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall x, y, z \in A; (xy)z = x(yz)$$

تعریف ۱.۱۹. اگر عضو ۱_A در A وجود داشته باشد که به ازای هر عضو ناصفر x در A تساوی زیر برقرار باشد:

$$۱_A x = x = x ۱_A$$

آنگاه یکدار نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲۰. $gl(V)$ با عمل ترکیب نگاشت‌ها، جبر شرکت‌پذیر یکدار است، که در آن V یک فضای برداری است.

مثال ۱.۲۱. $gl(n, F)$ با عمل ضرب ماتریس‌ها، جبر شرکت‌پذیر یکدار است.

مثال ۱.۲۲. فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر است. برای هر $a, b \in A$ قرار دهید:

$$[a, b] = ab - ba$$

این براکت، دو خطی و لی است.

نتیجه ۱.۲۳. از هر جبر شرکت‌پذیر می‌توان یک جبر لی ساخت.

۱.۳ جبر لی مشتق

تعریف ۱.۲۴. فرض کنید A یک جبر باشد. $\delta : A \to A$ را عمل‌گر مشتق می‌گوییم هرگاه:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

مجموعه‌ی تمام عمل‌گرهای مشتق روی A را با $Der\ A$ نمایش می‌دهند.

$Der\ A$ زیرفضایی برداری از $End\ A$ است و از آن‌جا که براکت دو عمل‌گر مشتق باز یک عمل‌گر مشتق است، $Der\ A$ زیرجبری از $gl(A)$ می‌باشد.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید L یک جبر لی باشد. خودریختی

$$\begin{aligned} ad_x :&L \to L, \\ &y \mapsto [x, y] \end{aligned}$$

یک عمل‌گر مشتق است که آن را عمل‌گر مشتق *الحاقی* می‌گویند.

۴.۱ ایده‌ال

تعریف ۲۶.۱. زیرفضای I از جبر لی L را *ایده‌ال* گویند، هرگاه برای هر $x \in L$ و $y \in I$، $[x, y] \in I$ باشد.

مثال ۲۷.۱. $n(n, F)$ ایده‌آل $t(n, F)$ است.

گزاره ۲۸.۱. فرض کنیم L جبر لی است، $[L, L]$ نیز یک ایده‌آل L است که با L' نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲۹.۱. از تعریف نتیجه می‌شود هر ایده‌آل زیر جبر لی هست. اما عکس آن همیشه درست نیست، مثلا $t(n, F)$ زیرجبر $gl(n, F)$ است اما برای $n \geq ۲$، $t(n, F)$ ایده‌آل $gl(n, F)$ نیست. زیرا، اگر $e_{۱۱} \in t(n, F)$ و $e_{۲۱} \in gl(n, F)$ در نظر بگیریم، آنگاه $[e_{۲۱}, e_{۱۱}] = e_{۲۱}$

گزاره ۳۰.۱. اگر I و J ایده‌آل‌های L باشند آنگاه

الف $I \cap J$

ب $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$

ج $[I,J]=\{\Sigma x_i y_i \mid x_i\in I, y_i\in J\}$

نیز ایده‌آل‌های L هستند.

$[L,L]$ حالت خاصی از ساختار $[I,J]$ است.

مثال ۳۱.۱. به وضوح ۰ (زیرفضایی که فقط از بردار صفر تشکیل شده است) و خود L، ایده‌ال‌هایی از L هستند و ایده‌آل‌های بدیهی L نامیده می‌شوند.

تعریف ۳۲.۱. *مرکزسازجبر* لی L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(L)=\{x\in L \mid [x,y]=0, \forall y\in L\}$$

مشاهده می‌شود که جبر لی L آبلی است، اگر و فقط‌اگر $Z(L)=L$ باشد. به عبارت دیگر، جبر لی L آبلی است، اگر و فقط‌اگر $[L,L]=0$ باشد.

گزاره ۳۳.۱. $Z(L)$ یک ایده‌آل L است.

تعریف ۳۴.۱. جبر لی L را *ساده* گویند، هرگاه غیر از صفر و خودش هیچ ایده‌ال دیگری نداشته باشد، بعلاوه، $[L,L]\neq 0$ باشد.

مشاهده می‌شود که برای جبر لی ساده‌ی L داریم $Z(L)=0$ و $[L,L]=L$.

مثال ۳۵.۱. فرض کنید $L=sl(2,F)$ و $char\ F\neq 2$. پایه‌ی استاندارد L از سه ماتریس زیر تشکیل شده است:

$$e=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

جدول ضرب $L=sl(2,F)$ توسط معادلات زیر به طور کامل مشخص می‌شود:

$$[e,f]=h,\ [h,e]=2e,\ [h,f]=-2f.$$

(مشاهده می‌شود که e، f، h بردارهای ویژه‌ای برای ad_h متناظر با مقدارهای ویژه‌ی ۲، ۲−، ۰ هستند.) فرض کنید $I \neq 0$ ایده‌الی از L و $z = ae + bf + ch$ عضو ناصفر دلخواهی از I باشد. در این‌صورت داریم:

$$[e, z] = [e, ae + bf + ch] = b[e, f] + c[e, h] = bh - 2ce \in I$$

$$[e, bh - 2ce] = -2be \in I$$

در این‌صورت $e \in I$ یا $b = 0$ می‌باشد. اگر $b = 0$ باشد، با توجه به روابط فوق داریم:

$$bh - 2ce = -2ce \in I$$

در این‌صورت $e \in I$ یا $c = 0$ می‌باشد. اگر $c = 0$ باشد، با توجه به روابط فوق داریم:

$$z = ae + bf + ch = ae \in I$$

در این‌صورت $e \in I$ یا $a = 0$ می‌باشد. اگر $a = 0$ باشد، با توجه به روابط فوق داریم:

$$z = ae + bf + ch = 0$$

که این نتیجه تناقض با ناصفر بودن z دارد، بنابراین $e \in I$ می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان دید $f, h \in I$، و در نتیجه $I = sl(2, F)$. بنابراین $sl(2, F)$ جبر لی ساده می‌باشد.

تعریف ۱.۳۶. زمانی که جبر لی L ساده نباشد، یعنی ایده‌ال ناصفر سره‌ای داشته باشد، می‌توان جبر *خارج‌قسمتی* L/I را تعریف کرد که ساختار آن مشابه ساختار حلقه‌ی خارج‌قسمتی است، یعنی به عنوان فضای برداری L/I فضای خارج‌قسمتی است و ضرب لی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I$$

می‌توان نشان داد که این ضرب خوش‌تعریف است، زیرا اگر $x + I = x' + I$ و $y + I = y' + I$ باشد، در این‌صورت داریم: $x' = x + u \ (u \in I)$ و $y' = y + v \ (v \in I)$، از این‌رو $[x', y'] = [x, y] + ([u, y] + [x, v] + [u, v])$، و بنابراین $[x', y'] + I = [x, y] + I$، زیرا براکت‌های داخل پرانتز همگی در I قرار دارند.

تعریف ۳۷.۱. *نرمال‌ساز* یک زیرجبر (یا فقط زیرفضای) K از L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_L(K) = \{x \in L | [x, K] \subset K\}$$

بنا به اتحاد ژاکوبی، $N_L(K)$ زیرجبری از L است. زمانی که K زیرجبر L باشد، در این‌صورت، $N_L(K)$ بزرگ‌ترین زیرجبری است که شامل K به عنوان یک ایده‌ال است.

زمانی که $K = N_L(K)$ باشد، K را *خودنرمال* می‌نامیم.

تعریف ۳۸.۱. *مرکزساز* زیرمجموعه‌ی X از L، به صورت زیر است:

$$C_L(X) = \{x \in L | [x, X] = 0\}.$$

بنا به اتحاد ژاکوبی $C_L(X)$ زیرجبری از L است.

مثال ۳۹.۱. $C_L(L) = Z(L)$.

۵.۱ همریختی و نمایش

تعریف ۴۰.۱. فرض کنید L و L'، جبر لی روی F باشند. تبدیل خطی $\phi : L \to L'$ *همریختی* نامیده می‌شود، اگر برای هر $x, y \in L$، $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$، *تکریختی* نامیده می‌شود اگر $Ker\ \phi = 0$، *برو‌ریختی* نامیده می‌شود اگر $Im\ \phi = L'$، و یکریختی نامیده می‌شود اگر هم تکریختی و هم بروریختی باشد.

مشاهده می‌شود که $Ker\ \phi$ ایده‌الی از L و $Im\ \phi$ زیرجبری از L' است. مانند سایر نظریه‌های جبری تناظر یک‌به‌یکی بین همریختی‌ها و ایده‌ال‌ها وجود دارد. ϕ متناظر با $Ker\ \phi$ و ایده‌ال I متناظر با *نگاشت کانونی* $x \mapsto x + I$ از L به روی L/I است.

گزاره ۴۱.۱. (۱) اگر $\phi : L \to L'$ همریختی جبرهای لی باشد، آنگاه

$$L/Ker\ \phi \cong Im\ \phi$$

.

(۲) اگر I و J ایده‌ال‌هایی از L باشند که $I \subset J$ باشد، در این‌صورت J/I ایده‌الی از L/I است و $(L/I)/(J/I)$ یکریخت طبیعی با L/J است.

(۳) اگر I و J ایده‌ال‌هایی از L باشند، یکریختی طبیعی بین $(I+J)/J$ و $I/(I \cap J)$ وجود دارد.

تعریف ۴۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد. همریختی $\phi : L \to gl(V)$ را یک *نمایش جبر لی* L می‌گویند.

مثال ۴۳.۱. همریختی

$$ad : L \to gl(L),$$
$$x \mapsto ad_x$$

که $ad_x(y) = [x, y]$، نمایش الحاقی نامیده می‌شود.

مشاهده می‌شود که $Ker\ ad = Z(L)$. اگر L ساده باشد می‌دانیم $Z(L) = 0$، بنابراین $ad : L \to gl(L)$ یک تکریختی است، یعنی هر جبر لی ساده یکریخت با یک جبر لی خطی است.

۶.۱ حل‌پذیری

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید L یک جبر لی است. دنباله‌ی ایده‌آل‌های L را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L^{(0)} = L,\ L^{(1)} = [L, L],\ \ldots,\ L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$$

و زنجیر سری مشتق زیر را داریم:

$$L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \ldots$$

جبر لی L را *حل‌پذیر* می‌گوییم هرگاه به ازای یک $n \in N$ داشته باشیم $L^{(n)} = 0$