بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

فرآیندهای پواسن ناهمگون وایبل

استاد راهنما :

دکتر افشین پرورده

استاد مشاور :

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

عبدالرسول مستاجران

شهریورماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان‌نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش ریاضی

آقای عبدالرسول مستاجران

تحت عنوان

فرآیندهای پواسن ناهمگون وایبل

در تاریخ **۸۷/٦/۲۵** توسط هیأت داوران زیر بررسی با نمره **۱۸/۷۸** و با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر افشین پرورده با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲ – استاد مشاور گروه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر هوشنگ طالبی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- استاد داور خارج از گروه دکتر صفیه محمودی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

امضای مدیر گروه

سپاسگذاری

ره پویان راه دانش هر اندازه پیش روند و هر دری از علوم به روی آنها گشوده شود، باز همان نوآموزان مکتب استادان هستند که بی‌فروغ نور علم ایشان در بی راهه‌ها سرگردان بودند.

به مصداق سخن شریف « **من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** » بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس وامتنان خود را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر افشین پرورده که در کلیه مراحل تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند، ابراز دارم. از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مجید اسدی که زحمت مشاوره این رساله را برعهده داشتند وهمچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر هوشنگ طالبی وخانم دکتر صفیه محمودی که داوری این رساله را پذیرفته وبا پیشنهادات خود موجب ارتقای آن گردیدند، صمیمانه تشکر می نمایم. از همه اساتید گروه آمار دانشگاه اصفهان ودوستان دوران تحصیل که از نظرات ایشان بهره‌مند شده‌ام از صمیم قلب تشکر می‌کنم و آرزوی موفقیت وکامیابی آنها رادارم.

تقدیم به

پدر بزرگوارم

به پاس زحمات بی دریغش

و مادر مهربانم

به پاس محبت های پاک و خالصانه اش

چکیده

سیستم‌های قابل تعمیر، سیستم‌هایی هستند که وقتی شکست، نقص یا خرابی در آنها رخ می‌دهد از کار افتاده و می‌توانند به وسیله فرآیند تعمیر و یا جایگزینی قطعات معیوب دوباره شروع به کار کنند. برای مدل‌سازی زمان شکست یک سیستم تعمیر پذیر فرآیندهای پواسن نقش مهمی دارند. بنابراین مطالعه خواص فرآیندهای پواسن اهمیت زیادی دارد. اگر زمان بین دو شکست متوالی در یک سیستم تعمیر پذیر از توزیع نمایی پیروی کند فرآیند حاکم بر رخداد تعداد شکست‌های سیستم، فرآیند پواسن همگون است اما در عمل این شرایط همیشه برقرار نیست و به همین دلیل می‌توان از فرآیند پواسن ناهمگون، برای مدل‌سازی استفاده نمود.

یکی از مهمترین فرآیندهای پواسن، فرآیند پواسن ناهمگون وایبل است. وقتی تابع شدت فرآیند پواسن به شکل تابع توانی باشد، فرآیند را فرآیند پواسن ناهمگون وایبل یا فرآیند قانون توانی می‌نامند. در این رساله استنباط آماری فرآیند پواسن ناهمگون وایبل را در حالت مشاهدات کامل و ناقص مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا به بررسی روش‌هایی برای تشخیص این که داده‌های شکست از فرآیند پواسن پیروی می‌کنند می‌پردازیم. سپس برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای و همچنین آزمون فرض را برای پارامترهای فرآیند پواسن ناهمگون وایبل ارائه می‌دهیم.

در عمل ممکن است به دلایل گوناگون بعضی از داده‌ها گم شوند. به همین دلیل استنباط آماری و تحلیل‌های پیش بینی برای فرآیند پواسن ناهمگون وایبل را با مشاهدات ناقص از طریق شیوه آمار کلاسیک بررسی می‌کنیم. سپس به پیش بینی فرآیندهای پواسن ناهمگون با استفاده از روش بیز می‌پردازیم. یکی از مزیت‌های این روش، کاربرد آن برای نمونه‌های با حجم کوچک است. در نهایت به بررسی استنباط بیزی برای انواع فرآیندهای پواسن ناهمگون که در آنها زمان شکست از مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته پیروی می‌کند می‌پردازیم. در این حالت چگالی‌های پسین به فرم صریح قابل محاسبه نیستند لذا از روش نمونه‌گیری گیبز برای برآورد این چگالی‌ها استفاده می‌کنیم.

کلید واژه : قابلیت اعتماد، فرآیند شمارشی، تعمیر کامل، تعمیر مینیمال، پیش بینی تک نمونه‌ای، پیش بینی دو نمونه‌ای آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته، آماره‌های مقادیر رکورد، نمونه‌گیر گیبز

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول:تعاریف و مفاهیم پایه

فصل دوم: استنباط آماری فرآیندهای پواسن

عنوان **صفحه**

فصل سوم: استنباط آماری و پیش بینی برای فرآیند پواسن ناهمگون با مشاهدات ناقص

عنوان **صفحه**

فصل چهارم: تحلیل‌های پیش بینی برای فرآیندهای پواسن ناهمگون با استفاده از روش بیزی

فصل پنجم: نمونه‌گیر گیبز و کاربرد آن در فرآیندهای پواسن ناهمگون

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

یکی از مهمترین مباحث آماری که امروزه به عنوان شاخه‌ای از علم آمار کاربرد فراوانی دارد، مبحث قابلیت اعتماد و بررسی آماری طول عمر یک سیستم است. یکی از کاربردهای این مبحث، تحلیل‌های بقاء، طول عمر، زمان‌های شکست و تحلیل‌های پیش بینی یک سیستم در مهندسی، پزشکی و غیره می‌باشد. اغلب در کاربرد با سیستم‌هایی سروکار داریم که در معرض خرابی و از کارافتادن هستند بعضی از سیستم‌ها قابل تعمیر نیستند که یا با سیستم‌های نو جایگزین می‌شوند و یا تعمیر می‌شوند. در این رساله سیستم‌های قابل تعمیر را در نظر می‌گیریم لذا سیستم‌های قابل تعمیر را معرفی می‌کنیم. توزیع‌های آماری از مهمترین ابزارهای اولیه‌ای هستند که در هر مبحث آماری مطرح و مورد نیازند. با شناخت توزیع یک مجموعه داده، مطالعه و بررسی روی این داده‌ها بسیار راحت‌تر و منظم‌تر می‌شود و سرعت رسیدن به اهداف مورد نیاز افزایش می‌یابد. در بخش ۲ پس از تعریف سیستم‌های قابل تعمیر، به بررسی توزیع وایبل که یکی از پر کاربردترین توزیع‌ها در مبحث قابلیت اعتماد و تحلیل سیستم‌های تعمیر پذیر و غیر قابل تعمیر است می‌پردازیم. با توجه به کاربردهای فرآیندهای نقطه‌ای که در قابلیت اعتماد برای مدل‌سازی رخداد پیشامدها در زمان استفاده می‌شود در بخش

سوم، به معرفی این نوع فرآیندها می‌پردازیم. انواع مدل‌های سیستم‌های قابل تعمیر را در بخش ۴ به طور مختصر معرفی می‌کنیم. فرآیند پواسن که همواره یکی از مهمترین فرآیندها برای تشریح پدیده‌های تصادفی می‌باشد را در بخش ۵ مورد بررسی قرار می‌دهیم. معرفی و بحث رده بندی فرآیند پواسن بر اساس تابع شدت و با توجه به نوع متوقف نمودن آزمایش هدف دیگر این فصل است که در بخش‌های ۶ و ۷ به آن می‌پردازیم.

۱-۲ سیستم‌های قابل تعمیر

سیستم‌های قابل تعمیر[1]، سیستم‌هایی هستند که وقتی شکست، نقص یا خرابی روی می‌دهد از کار می‌افتند و می‌توانند، به وسیله فرآیند تعمیر و یا جایگزینی قطعات خراب شده دوباره شروع به کار کنند. برای مثال اتومبیل یک سیستم قابل تعمیر است زیرا با خراب شدن قطعات آن، می‌توان آنها را تعمیر و یا جایگزین نمود و دوباره اتومبیل به حالت اول یعنی آماده کار در می‌آید. اما یک لامپ سیستم قابل تعمیر نیست، چون تنها راه تعمیر لامپ سوخته تعویض آن با یک لامپ سالم است.

برای مطالعه الگوهای قابلیت اعتماد برای سیستم‌های قابل تعمیر، مقیاس زمان که برای اندازه گیری زمان‌های شکست استفاده می‌شود را باید به درستی مشخص کنیم. برای مثال تعداد کیلومتر یا مایل که یک اتومبیل طی کرده اندازه بهتری نسبت به سن اتومبیل است، چون ممکن است مدتی در حال سرویس باشد و در نتیجه سن اتومبیل معیار مناسبی برای نشان دادن مدت عملکرد یک اتومبیل نیست. همچنین برای یک ماشین فتوکپی، تعداد کپی‌های گرفته شده می‌تواند مناسب باشد.

برای سیستم‌های غیر قابل تعمیر تنها یک زمان شکست برای هر سیستم وجود دارد، اما برای سیستم‌های قابل تعمیر تعدادی شکست برای یک سیستم مشاهده می‌شود. فرض کنید $0 < T_1 < T_2 < \dots$ زمان‌های شکست سیستم باشد که اندازه گرفته شده است. زمان‌های بین شکست ها (یا گپ ها) را با $X_1, X_2, \dots$ نشان می دهیم، داریم

$$\begin{aligned} X_1 &= T_1 \\ X_2 &= T_2 - T_1 \\ X_3 &= T_3 - T_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (۱-۲-۱)$$

T_i ها را نیز می‌توان بر حسب X_i ها به صورت زیر به دست آورد.

[1] -Repairable systems

$$
\begin{aligned}
T_1 &= X_1 \\
T_2 &= X_1 + X_2 \\
T_3 &= X_1 + X_2 + X_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (۱-۲-۲)
$$

تعریف ۱-۲-۱: زمان کلی[1]

شکست‌های یک سیستم قابل تعمیر بر حسب زمان کلی اندازه گیری می‌شود، اگر زمان‌های شکست را به عنوان زمان سپری شده از نقطه شروع به کار سیستم در نظر بگیریم. شکست‌ها در زمان کلی با $T_1 < T_2 < \ldots$ نشان داده می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۲: زمان موضعی[2]

زمان‌های شکست یک سیستم قابل تعمیر بر حسب زمان موضعی اندازه گیری می‌شود، اگر زمان‌های شکست را به عنوان زمان سپری شده از شکست قبلی در نظر بگیریم. شکست‌ها در زمان موضعی با $T_1 < T_2 < \ldots$ نشان داده می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۳: بهبود[3] **و تنزل**[4]

در یک سیستم قابل تعمیر، اگر زمان‌های بین شکست‌ها کوتاهتر شوند، گوییم رو به تنزل (زوال) است و اگر زمان های بین شکست‌ها بزرگترشوند، گوییم سیستم رو به بهبود است.

در ادامه به بررسی مفاهیم و تعاریف اساسی در قابلیت اعتماد می‌پردازیم.

تعریف ۱-۲-۴: تابع توزیع تجمعی

تابع توزیع تجمعی (cdf) متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود

$$F(x) = P(X \leq x)$$

1 -Global time
2 -Local time
3 -Improvement
4 -Deterioration

چون طول عمر همیشه نامنفی است، توزیع احتمال تنها با احتمال یک روی محور مثبت زمان موجود است. به بیان دیگر $F(x)=0 \;;\; \forall \;\; x<0$.

تعریف ۱-۲-۵: تابع بقاء[1]

تابع بقاء $S(x)$ که تابع قابلیت اعتماد نیز نامیده می‌شود، عبارت است از احتمال آن که یک سیستم ماموریت خودش را کاملا تا زمان x انجام دهد(یا تا زمان x کار کند).

تابع بقاء در x، احتمال اینکه زمان شکست بعد از زمان x باشد، را ارزیابی می کند. بنابراین تابع بقاء یا قابلیت اعتماد با تابع توزیع تجمعی به صورت زیر در ارتباط است.

$$S(x)=P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-F(x) \qquad (۱-۲-۱)$$

تعریف ۱-۲-۶: تابع چگالی احتمال

تابع نامنفی f را تابع چگالی یک متغیر تصادفی X گوییم هرگاه

$$P(X\in A) = \int_A f(x)\,dx \quad , \quad \forall A\in\Re$$

توجه کنید در این صورت متغیر تصادفی X پیوسته است و

$$f(x)=\frac{d}{d(x)}F(x)$$

از رابطه (۱-۲-۱) داریم

$$f(x)=-\frac{d}{d(x)}S(x).$$

یک روش دیگر برای بیان تابع چگالی احتمال از طریق حد به صورت زیر است.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\leq x+\Delta x)}{\Delta x}\ . \qquad (۲-۲-۱)$$

[1] -Survival function

تعریف ۱-۲-۷: تابع مخاطره[1]

تابع مخاطره عبارت است از

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} \quad . \qquad (۱-۲-۳)$$

این رابطه، حد احتمال شکست یک واحد (برای اولین و تنها زمان شکست) در یک فاصله کوچک به شرط این که واحد در ابتدای فاصله سالم و در حال کار بوده است می‌باشد. با مقایسه تعریف تابع مخاطره $h(x)$ در رابطه (۱-۲-۳) با $f(x)$ در رابطه (۱-۲-۲)، شباهت بسیار این دو مشخص می شود با این تفاوت که یکی احتمال شرطی است و دیگری نیست. یک ویژگی تابع چگالی احتمال آن است که انتگرال آن باید برابر یک شود.

تابع مخاطره به عنوان حد یک احتمال شرطی بیان می شود، اما یک تابع چگالی احتمال شرطی نیست. انتگرال تابع مخاطره لازم نیست برابر یک شود و به طور کلی برای اغلب توزیع‌هایی که مطالعه می‌کنیم انتگرال تابع مخاطره یک نمی‌شود. یک سیستم که تابع مخاطره آن صعودی است دارای این خاصیت است که با افزایش سن سیستم احتمال خرابی سیستم نیز افزایش می‌یابد، به بیان دیگر احتمال خرابی سیستم در زمان t به شرط این که تا قبل از t سالم مانده باشد با افزایش t (سن) افزایش می‌یابد. در این مورد گوییم سیستم کهنه (فرسوده) شده است.

در ادامه شباهت‌ها و تفاوت‌های بین سیستم‌های قابل تعمیر و غیر قابل تعمیر را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. بسیاری از مفاهیم و اصطلاحات در این دو نوع سیستم مشابه هستند. در سیستم‌های غیر قابل تعمیر طول عمر سیستم یک متغیر تصادفی است، تعمیر وجود ندارد و سیستم بعد از اولین و تنها شکست حذف می‌شود. چون شکست یک سیستم بر سیستم‌های مشابه که در جاهای دیگر واقعند بی‌تاثیر است، این فرض که سیستم‌های مختلف دارای طول عمر مستقل از هم هستند منطقی به نظر می‌رسد. همچنین چون بسیاری از سیستم‌ها، به وسیله ماشین آلات و دستگاه‌های یکسان ساخته می‌شوند، منطقی است که فرض کنیم طول عمر سیستم‌ها دارای توزیع یکسانی هستند. این دو فرض با این عبارت می‌تواند بیان شود که طول عمر مستقل و همتوزیع (iid) از توزیعی مانند $F(x)$ فرض می‌شوند.

یک سیستم قابل تعمیر را رو به تنزل (یا در حال زوال) گوییم وقتی که زمان‌های بین شکست میل به کوچک شدن کنند و یک سیستم غیر قابل تعمیر را کهنه گوییم، وقتی که تابع مخاطره آن صعودی باشد. یک سیستم غیر قابل تعمیر با تابع مخاطره نزولی را burn-in تجربی گوییم. عبارت "تنزل" را برای سیستم‌های قابل تعمیر و

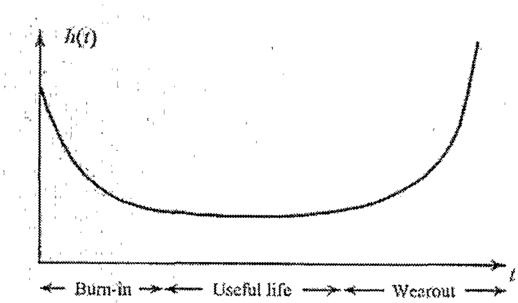
[1] -Hazard function

"کهنه شده" را برای سیستم‌های غیر قابل تعمیر به کار می‌بریم. همچنین عبارت‌های "بهبود" و " burn-in " را به ترتیب برای سیستم‌های قابل تعمیر و سیستم‌های غیر قابل تعمیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱-۲-۱: برای یک متغیر تصادفی پیوسته تابع مخاطره عبارتست از . $h(x) = \dfrac{f(x)}{S(x)}$

اثبات : از ارائه اثبات به دلیل سادگی صرفنظر می‌کنیم.

توجه کنید که تعریف اولیه h نیز برای متغیرهای تصادفی پیوسته مطرح شد. اغلب، انتخاب توزیع برای استفاده در مدل‌سازی طول عمر بستگی به شکل تابع مخاطره دارد. اگر واحدها به کهنه شدن میل کنند، آنگاه تابع مخاطره باید تابعی صعودی باشد. در این مورد فرض یک تابع توزیع نمایی که دارای تابع مخاطره ثابت است مناسب به نظر نمی‌رسد. توزیع‌های گاما و وایبل به اندازه کافی قابل انعطاف هستند تا توزیع‌هایی را که مخاطره صعودی و یا نزولی دارند شامل شوند. بعضی سیستم‌ها با احتمال زیادی در همان زمان‌های اولیه شروع به کار، خراب می‌شوند. اما سپس در زمان‌های بعدی به یک حالت پایدار رسیده و در نهایت با افزایش سن سیستم مخاطره افزایش می‌یابد. چنین توابع مخاطره‌ای دارای منحنی وانی شکل یا U شکل هستند، که در شکل شماره۱-۱ نشان داده شده است. سه مرحله از طول عمر یک واحد عبارتند از ۱- burn-in ۲- طول عمر مفید ۳- کهنه شدن .هیچکدام از توزیع‌های وایبل و گاما به حد کافی انعطاف پذیر نیستند تا تابع مخاطره‌ای را که در ابتدا نزولی و در انتها صعودی است شامل شوند.



شکل ۱-۱ تابع مخاطره وانی شکل

دانستن هر کدام از $f(x)$، $F(x)$، تابع بقاء $S(x)$، یا تابع مخاطره $h(x)$ کافی است تا بتوانیم مابقی را به دست آوریم. این مطلب در قضیه بعد مشخص خواهد شد.

قضیه ۱-۲-۲: برای یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع مخاطره $h(x)$، تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ به ترتیب داریم

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x h(y)\,dy\right)$$

و

$$f(x) = h(x)\exp\left(-\int_0^x h(y)\,dy\right)$$

اثبات: از ارائه اثبات به دلیل سادگی صرفنظر می‌کنیم.

۱-۲-۱ توزیع وایبل

در این قسمت توزیع وایبل را معرفی و توابع بقاء و مخاطره آن را به دست می‌آوریم. توزیع وایبل توزیعی است که بیشترین استفاده و کاربرد را در مطالعات طول عمر دارد. توزیع وایبل، فرآیند قانون توانی یا به عبارت بهتر فرآیند پواسن ناهمگون که در بخش‌های بعدی تعریف و ارائه می‌شود را شرح می‌دهد که به طور متداول برای الگوسازی سیستم‌های قابل تعمیر استفاده می‌شود همچنین اگر تعمیرات، یک سیستم را به حالت خوب مثل نو[1] برگرداند آنگاه این فرض که زمان های بین شکست‌ها X_1 , X_2 ,.... متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع از توزیع وایبل است، منطقی به نظر می رسد.

تعریف ۱-۲-۹: توزیع وایبل دارای تابع بقاء به صورت زیر است

$$S(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right] \ , \quad x>0\,,\ \beta>0\,,\theta>0 \qquad (۱-۲-۵)$$

تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی احتمال و تابع مخاطره توزیع وایبل در ادامه آمده است.

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right] \ , \quad x>0 \qquad (۱-۲-۶)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right] \ , \quad x>0 \qquad (۱-۲-۷)$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} \ , \quad x>0 \qquad (۱-۲-۸)$$

[1] -Good as new