بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

عنوان :

مسایل مسیر با کمترین هزینه به همراه رله ها

استاد راهنما :

دکتر غلامحسن شیردل

استاد مشاور :

دکتر شهریارفرهمند

نگارش :

اصغر صادقی

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به

ساحت مقدس آقا امام زمان(عج)

همسر و دخترانم نرگس و مهدیه

اساتید و همه کسانی که دعایشان بدرقه ی راهم بود

تقدیر وتشکر

اعتراف می کنم که نه زبان شکر تو را دارم ونه توان تشکر از بندگان تو ، اما بر حسب وظیفه از تمامی اساتید ارجمندم در طول سالهای به یاد ماندنی شاگردیشان تشکر می نمایم . از استاد گرانقدر جناب آقای **دکتر غلامحسن شیردل** برای راهنمایی و هدایت این پایان نامه ، خاضعانه سپاسگزارم . همچنین از ایشان برای تمامی دلسوزی ها و محبتهای برادرانه قدردانی می کنم.

از استاد ارجمند ، جناب آقای **دکتر شهریارفرهمند** که زحمت مطالعه و تصحیح و مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند ، سپاسگزارم . همچنین از استاد محترم **دکترمحمدرضا پیغامی** که زحمت مطالعه و تصحیح این پایان نامه را کشیدند کمال تشکر را دارم .

از همسر عزیز و دخترانم که در مدت تحصیل بنده با صبر و شکیبایی ، مشوق و همراه من بودند ، کمال تشکر را دارم .

در پایان از پدر ، مادر عزیزم و همه فرشتگانی که بالهای محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری ها سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال ، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم

و این نیست جز جلوه ای از لطف و رحمت پروردگاری که از ادای شکر حتی یک نعمت او ناتوانم .

اصغر صادقی

چکیده : مسایل مسیرهای رله ای با کمترین هزینه[1] ($MCPPR$) : شامل پیدا کردن یک مسیر با کمترین هزینه از یک مبدا به یک مقصد بوده که در طول مسیر ، گره های رله ای با هزینه های مشخص و محدودیت وزنی وجود داشته باشند .

این پایان نامه مساله ($MCPPR$) را بعنوان یک مسئله مسیر دو معیاری ویژه ، شامل تابع جمع شده هزینه مسیر و هزینه رله ها و یک تابع وزنی ، مدل بندی می کند .

فرمول بندی ($MCPPR$) بعنوان یک قسمت از یک مسئله مسیر دو معیاری ، اجازه ی توسعه الگوریتم برچسب گذاری را می دهد که کران وزنی مسیرها ، شماره برچسب گره ها را کنترل می کند . الگوریتم برای این نسخه از تابع هدف محدود شده ، پیچیدگی زمانی از مرتبه $o(wm + wnlog(max\{w,n\}))$ را دارد که n تعداد گره ها ، m تعداد یالها و w کران بالای وزن ها می باشد . نتایج محاسباتی روی مثال های تصادفی تا ۱۰/۰۰۰ گره و ۱۰۰/۰۰۰ یال ، گزارش شده است .

مطالب ذکر شده برگرفته از مقاله زیر است :

Minimum Cost Path Problems with Relays
GilbertLaporte, MartaM. B. Pascoal ,
***Computers& Operations Research* 38 (2011) 165 – 173**

کلمات کلیدی :

Relays, shortest path problem, bicriteria optimization, labeling algorithm

[1] ***Minimum Cost Path Problems with Relays***

فهرست مطالب

بخش اول

فصل۱ تعاریف مقدماتی..... ۱

فصل۲ چند موضوع مرتبط با کوتاهترین مسیر

۲ . ۱ روش های تصحیح بر چسب برای مسایل کوتاهترین مسیر دو معیاری

۱.۱.۲ مقدمه ٤

۲.۱.۲ فرمول بندی مسئله کوتاهترین مسیر دو معیاری ٦

۳.۱.۲ روش های برچسب گذاری ۹

٤.۱.۲ آزمایشات و نتایج محاسباتی ۱۹

۲ . ۲ مسئله طراحی شبکه با رله ها

۱.۲.۲ مقدمه ۲۲

۲.۲.۲ پردازش کران پایین ۲٦

۳.۲.۲ ابتکارات (روش های ابتکاری) ۳۱

بخش دوم

فصل ۳ مسایل مسیر با کمترین هزینه به همراه رله ها

۱.۳ مقدمه ۳٦

۲.۳ معرفی و فرمولبندی **مسایل مسیر با کمترین هزینه به همراه رله ها**.....**٤١**

۳.۳ الگوریتم تعیین مسیر با کمترین هزینه**با رله ها**.....**٥٠**

فصل ٤ مسایل مسیر با کمترین هزینه دو معیاری به همراه رله ها

١.٤ مقدمه ٥٣

٢.٤ الگوریتم تعیین مسیرهای با کمترین هزینه رله ای کارآمد..... ٥٦

فصل ٥ نتایج محاسباتی

١.٥ نتایج محاسباتی برای مسایل رله ای با کمترین هزینه..... ٥٨

٢.٥ نتایج محاسباتی برای مسایل مسیرهای رله ای با کمترین هزینه دو معیاری.....٦٠

فصل٦ نتایج ٦٢

پیوست جداول **۶۳**

واژه نامه..... **۷۱**

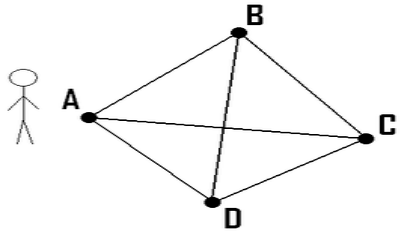
مراجع..... **۷۹**

بخش اول

فصل۱ تعاریف مقدماتی

۱.۱ تابع هدف یک یا چند معیاری : در گذشته به طور متداول مسئله ، تنها یک تابع هدف داشته و هدف آن مثلاً کمینه کردن مجموع فاصله یا زمان سفر بوده است ، که به آن مسئله ای با تابع هدف یک معیاری(هدفه) می گویند . اما در عمل ، مسایل متعددی وجود دارند که علاوه بر اینکه در آنها کمینه کردن مقدار هزینه یا سفر مطرح است ، هدفهای دیگری چون کمینه کردن میزان خطر ، تاخیر ، احتمال خطر و .... وجود دارند که ممکن است در یک مسئله ، کمینه کردن دو یا چندمورد از آنها همزمان مد نظر باشد. تابع هدف اینگونه مسایل را دو یا چند معیاری گویند .

۲.۱ مسئله فروشنده دوره گرد [۱] (TSP) :



اگر فروشنده دوره‌گرد از نقطه A شروع کند و فواصل بین نقاط مشخص باشد، کوتاه‌ترین مسیر که از تمام نقاط یکبار بازدید می‌کند و به A بازمی‌گردد کدام است؟

مسئله فروشنده دوره گرد TSP یکی از مسائل مهم در زمره تئوری پیچیدگی محاسباتی الگوریتم ها می باشد که در گروه $NP-Hard$ قرار می گیرد این مسئله اولین بار توسط دو دانشمند به نام های هامیلتون ایرلندی و کیرکمن بریتانیایی مطرح شد . معمولا بحث در خصوص این تئوری در مطالب اولیه دروس ریاضیات دانشجویان ریاضی ارائه می شود و در دروسی نظیر تئوری گراف می توانید مطالب مشابه را نیز بدست آورید.

[۱] **Travelling salesman problem**

طرح مسئله

تعدادی شهر داریم و هزینه(مسافت) مسافرت به هر یک از آنها مشخص است به دنبال کم هزینه ترین مسیر هستیم به طوری که از همه شهرها فقط یکبار عبور کنیم و مجددا به محل شروع بازگردیم

۳.۱ **مسئله ان پی- سخت** : مجموعه ی «**انپی-سخت**» شامل چندهزار مساله‌ی مختلف با کاربردهای فراوان است که تاکنون برای آن‌ها راه حل سریع و قابل انجام در زمان معقول پیدا نشده‌است و به احتمال زیاد در آینده نیز یافت نخواهد شد . این که راه حل سریعی برای آن‌ها وجود ندارد هم اثبات شده‌است . البته ثابت شده‌است که اگر فقط برای یکی از این مساله‌ها راه حل سریعی پیدا شود ، این راه حل موجب حل سریع بقیه‌ی مساله‌ها خواهد شد . البته احتمال پیدا شدن چنین الگوریتمی ضعیف است . منظور از راه حل سریع آن است که زمان اجرای آن با اندازه‌ی ورودی مساله به صورت چندجمله‌ای رابطه داشته باشد. بطور خلاصه ، **انپی- سخت** مسئله ای حل نشدنی درزمان چندجمله‌ای ، بر حسب اندازه‌ی ورودی مساله (زمان معقول) است.

٤.۱ **مسئله پستچی** : مسئله پستچی چینی نخستین بار از سوی ریاضیدان چینی به نام

$Mei\ ko\ kwan$ در سال ۱۹٦۰ طرح شد. یک پستچی می خواهد تمامی نامه ها را به مقصد آنها برساند. در حالی که مسافت طی شده کمینه باشد و بعد از پایان کار به نقطه آغاز برگردد. در این کار، باید هر خیابان را حداقل یک بار طی کند و اگر مجبور شود که از مسیری دوبار عبور کند، باید مسیری با کوتاهترین مسافت را انتخاب کند.

۵.۱ **خروج به ترتیب ورود FIFO** :

خروج به ترتیب ورود (**First in, First out**) یاFIFO یکی از روش‌های سازماندهی کنترل داده با توجه به زمان و اولویت‌بندی است. این اصطلاح، اصل تکنیک پردازش صف یا بر آوردن تقاضای عرضه شده به وسیله راهکار «اولین ورودی، اولین دریافت کننده خدمات» را توصیف می‌نماید: هر مهره‌ای که زودتر وارد شود، زود تر بررسی می‌گردد و هر مهره‌ای پس از آن وارد شود صبر می‌کند تا اعمال انجام گرفته روی مهره اول تمام شود.

بنابراین، این موضوع شبیه رفتار صف بندی انسان‌ها است، که در آن افراد ، صف را به ترتیب ورودشان ترک می‌نمایند و در پشت چراغ راهنمایی منتظر نوبت خود می‌شوند. FCFS نیز نام دیگری برای الگوریتم زمانبندی سیستم‌عامل FIFO است. روشی که به هر فرآیندی زمانی از زمان پردازنده را مطابق با ترتیب ورودش اختصاص می‌دهد. در معنای وسیع تر، سرواژه LIFO یا «آخرین ورودی، اولین خروجی» متضاد FIFO است. با در نظر گرفتن واژه FILO به معنای «اولین ورودی، آخرین خروجی» تفاوت این دو واژه آشکار تر می‌شود.

فصل۲ چند موضوع مرتبط با کوتاهترین مسیر

۱.۲ روش های تصحیح برچسب برای مسائل کوتاه ترین مسیر دو معیاری

در این بخش با حل مسئله ی کوتاهترین مسیر دو معیاری مواجه هستیم به ویژه ، دسته ای از روشهای برچسب گذاری برای تولید مجموعه کامل بردارهای طول مسیر بهینه پارتو[۱] ، از یک گره مبدا به تمام گره های دیگر ، در یک شبکه دو معیاری را نمایش خواهیم داد . روش های پیشنهاد شده ، از لحاظ نظری به وسیله اصل بهینگی پشتیبانی می شود وآنها بر پایه گره های نوآوری مختلف[۲] و استراتژی انتخاب برچسب ، تعریف شده اند. مطالب ذکر شده در این بخش بر گرفته از مقاله زیر است:

Label Correcting Methods to Solve Multicriteria Shortest Path Problems, F. GUERRIERO AND R. MUSMANNO , Communicated by W. B. Gong

JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS:VOL. ۱۱۱,NO.۳,pp. ۵۸۹-۶۱۳December ۲۰۰۱

۱.۱.۲ **مقدمه**

به طور متداول مسئله کوتاهترین مسیر ، تنها یک تابع هدف داشته و هدف آن کمینه کردن مجموع فاصله یا زمان سفر بوده است . هر چند در خیلی از کاربردها ، با طراحی واستفاده کارآمد از حمل و نقل ، شبکه های ارتباطی و انتقال مواجه هستیم ، پیچیدگی محیط های اقتصادی و اجتماعی به تابع های هدف دیگری به جزهزینه یا زمان سفر نیاز دارد . به عبارت دیگر ، توجه به این که خیلی از مسئله های دنیا چند هدفه هستند ، ضروری می باشد .

[۱] Pareto optimality
[۲] Various innovative nod

برای مثال ، تحلیل انتخاب مسیر برای محموله مواد خطرناک [۱۲] ، خیلی مهم است که توجه شود ، چندین دسته قابل توجه وجود دارند و در نتیجه ، معیارهای مختلف برای محاسبه هر حل جزیی باید در نظر گرفته شود ؛ از قبیل تعداد مردمی که در خطر هستند ، احتمال تصادف و فاصله سفر.

در طراحی شبکه های ارتباطی یکپارچه[۱] [۱۳] ، یک حالت نمونه که ، فقط با ملاحظه تابع های هدف زیاد می تواند نمایش داده شود ، مرتبط با انتخاب یک مسیر قابل قبول است بگونه ای است که یک مرتبه معین از سرویس های مورد نیاز برقرار است و همزمان هزینه ، تاخیر ، تعداد پروازها و احتمال ضرر ، کمینه هستند . .

کاربرد دیگری که برای توجه کردن مهم است ، چندین عامل است که به وسیله انتخاب مسیرهای شاهراه در شبکه های حمل و نقل ، نشان داده شده است . جایی که معیار بوم شناختی و اقتصادی ، همزمان باید اهمیت داده شود [١٤] .

کاربردهای ذکر شده در بالا تعداد کمی از پتانسیل کاربردهای مسئله کوتاهترین مسیر چند هدفه [۲] می باشد . برای ملاحظه کاربردهای بیشتر این مسئله خواننده را به مرجع های [۱۵] و [١٦] توصیه می کنیم .

در بهینگی چند معیاری (هدفه)[۳] ، فرض شده است که هدفها در مغایرت با هم قرار دارند ، بنابراین به جز در وجودِ تابع سودمند خوش تعریف ، یک جواب بهینه یکتا وجود ندارد . در این بخش مفهوم بهینگی جای خود را به بهینگی محدود نشده[٤] یا پارتو می دهد . چون عموما جواب های مختلفی وجود دارند که آنها می تواند به عنوان بهترین جواب ملاحظه شوند ، از این نظر آنها را نمی توان بهبود داد. به عبارت دیگر ممکن است که یک مجموعه از جواب های شدنی (یعنی : مجموعه جواب های پارتو) پیدا شوند که در مورد آنها ، بهبود هر تابع هدف بدون قربانی کردن حداقل یکی دیگر از

[۱] Integrated communication network
[۲] Multicriteria shortest path (MSP) problem
[۳] Multicriteria criteria
[٤] nondominated

تابع های هدف امکان ندارد. در این حالت تصمیم گیرنده باید قادر باشد از بین مجموعه جواب پارتو ، جواب همراه با سازش (مصالحه) رضایت بخش را انتخاب کند.

در حالیکه مسئله کوتاهترین مسیر کلاسیک دارای کران پیچیدگی چند جمله ای است ، اما مشابه آن برای مسئله MSP برقرار نیست . همانطوری که در [۱۷] نشان داده شده است ، مثال هایی از مسئله وجود دارند که پیچیدگی محاسباتی با اندازه مسئله ها ، به طور نمایی افزایش پیدا می کند ، یعنی تعداد مسیرهای پارتو به صورت نمایی با تعداد گره ها رشد می کند . بدون شک ، این سرعت جستجو را در این ناحیه آهسته خواهد کرد . هر چند در سالهای اخیر یک کوشش جستجوی قابل توجه برای فرمول بندی و حل مسئله MSP توسعه یافته است .

برطبق اصول طبقه بندی شده پیشنهادی در [۱۸] ، روشهای پیشنهاد شده در ادبیات حل مسئله MSP ، در سه رده زیر می تواند دسته بندی شود :

۱) روشهای مولد

۲) روشهای پایه گذار ی شده بر توابع سودمند ، که در آنها بیانی که در بر دارنده ترجیح های تصمیم گیرنده است ، وجود دارد .

۳) روشهای محاوره ای ، که در آنها بیانی مترقی از ترجیح های تصمیم گیرنده وجود دارد .روشهای مولد ، یا کل مجموعه جوابهای بهینه ی پارتوی شناسایی شده را تولید می کند و یا یک تقریب از این مجموعه را می دهد .

شیوه هایی که در این گروه قرار دارند می توانند به طور خلاصه به صورت زیر طبقه بندی شوند :

۱) مدلهای برچسب گذاری بهینگی پارتو

۲) روش های دسته بندی (روش اولویت)

۲.۱.۲ فرموله کردن مسئله

فرض کنید $\varphi(\mathcal{N},\mathcal{A})$ گراف جهت داری را نشان می دهد که شامل مجموعه متناهی $\mathcal{N}=\{1,\dots,n\}$ از گره ها و مجموعه متناهی $\mathcal{A}\subset\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ از m یال باشد . مرتبط با هر یال یک بردار طول $q^{(i,j)}\in\mathcal{R}^p$ وجود دارد که p تعداد معیار را نشان می دهد . همانطور که در مقدمه ملاحظه شد ، برای هر k ، $q_k^{(i,j)}$ ممکن است معانی مختلفی داشته باشد ، که وابسته به مسئله عملی داده شده ، است . (یعنی ،زمان ، هزینه ، مصرف انرژی ومیزان خطر)

دو گره متمایز i و j داده شده است مسیر π_{ij} از گره i به j ، یک دنباله از گره های متمایز $\pi_{ij}=\{i=i_1,\dots,i_l=j\},\quad l\geq 2$ است که $k=1,\dots,l-1\ ,(i_k,i_{k+1})\in\mathcal{A}$.

فرض می کنیم تمام گره هایی که در مسیر دیده می شوند ، همگی متمایز هستند . یک دور[1] c ، یک مسیری است که گره های تکراری ندارد . مگر آنکه گره اول بر گره آخر منطبق می باشد . یعنی $i_l=i_1$.

مسیر π_{ij} از گره i به گره j، بردار هدف $q^{\pi_{ij}}$ را که با $q^{\pi_{ij}}=\left(q_1^{\pi_{ij}},\dots,q_p^{\pi_{ij}}\right)$ داده می شود را محاسبه می کند ، که : $q_k^{\pi_{ij}}=\sum_{(i,j)\in\pi_{ij}}q_k^{(i,j)}\ ,\ k=1,\dots,p$

تعریف ۱.۱.۲ مسیر π_{ij} از i به j ، مسیر دیگر $\bar{\pi}_{ij}$ را محدود می کند اگر بردار هدف $q^{\pi_{ij}}$ ، $q^{\bar{\pi}_{ij}}$ را از لحاظ زیر محدود کند :

$$q_k^{\pi_{ij}}\ \leq\ q_k^{\bar{\pi}_{ij}}\ ,k=1,\dots,p$$

که نامساوی اکید حداقل برای یکی از k ها برقرار است .

تعریف ۲.۱.۲ یک مسیر π_{ij} از گره i به j ، مسیر بهینه پارتو است اگر مسیر دیگر $q^{\bar{\pi}_{ij}}$ از i به j نباشد که $q^{\pi_{ij}}$ را محدود کند .

[1] cycle

در این بخش با مسئله پیدا کردن مجموعه تمام مسیرهای بهینه پارتو از یک گره مبدا s به تمام گره های دیگر φ ، مواجه هستیم . مسئله ای که ملاحظه شد ، ممکن است به صورت زیر باشد :

$$min\ f^k\ (x) = \sum q_k^{(i,j)}\ x_{ij}\ ,\qquad \forall k = ۱, \dots, p$$

$$s.t. \qquad \sum_{\{j:(s,j)\in\mathcal{A}\}} x_{sj} - \sum_{\{j:(j,s)\in\mathcal{A}\}} x_{js} = |\mathcal{N}| - ۱$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = -۱ \quad ,\quad \forall \mathrm{i} \in \mathcal{N} - \{s\}$$

$$x_{ij} \in z_{\cdot}^{+}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

از هم اکنون ، فرض می شود که شرط زیر برقرار باشد :

فرض ۱.۱.۲ برای هر دور C در $\varphi(\mathcal{N},\mathcal{A})$ ، فرض می شود که

$$q_{\mathrm{k}}^{\mathrm{C}} \geq ۰ \qquad \forall\ k = ۱, \dots, p$$

و نامساوی اکید برای بعضی مقادیر k برقرار است .

فرض ۱.۱.۲ تضمین می کند که در یک شبکه با مقدار معیار (هدف) دلخواه ، مسئله MSP ، اصل بهینگی زیر را برقرار می کند [۲۳] و [۲٤] .

گزاره ۱.۱.۲ اصل بهینگی :

هر مسیر محدود نشده π_{st} از یک گره مبدا s به یک گره متمایز t ، فقط شامل زیر مسیرهای محدود نشده ی π_{si} از s به هر گره میانی $i \in \pi_{\mathrm{st}}$ می باشد .

برطبق اصل بهینگی ، یک جواب بهینه برای مسئله MSP می تواند با یافتن زیر جواب های متوالی ، تعیین شود . بنابراین یک الگوریتم برچسب گذاری برای حل مسئله ، می تواند استفاده شود . بعلاوه تست محدود نشده بودن ، می تواند برای هر گره میانی ، بعضی از مسیرهای کاندید شده ، که

برای تعیین اینکه آیا محدود شده هستند یا خیر ، بکار برده شود . برای تعریف پروسه های کارا ، که محدود نشده بودن یک مسیر را بررسی کند ، تعریف زیر مفید خواهد بود .

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_p)$ و $y = (y_1, \dots, y_p)$ دو عضو $\mathcal{R}^p$ باشند ، می گوییم x به طور الفبایی از y کوچکتر است هرگاه $x_k < y_k$, $x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}$ برای بعضی $k \in \{1, \dots, p\}$ برقرار باشد و می نویسند $x \prec_L y$.

گزاره ۲.۱.۲ فرض کنید Π_j مجموعه تمام مسیرهای از s به گره j باشد . اگر برای مسیر $\pi_{sj} \in \pi_j$ ، شرط زیر برقرار باشد : $\forall\, \bar{\pi}_{si} \in \Pi_j, \pi_{sj} \neq \bar{\pi}_{sj}$, $q^{\pi_{si}} \prec_L q^{\bar{\pi}_{si}}$ آنگاه π_{sj} یک مسیر محدود نشده از گره s به گره j است و گفته می شود که کوتاهترین مسیر بصورت الفبایی[۱] از s به j است . نتایج گزاره ۲.۱.۲ خاطر نشان می کند که حل مسئله MSP با یک مبدا و چند مقصد[۲] ، همچنین اجازه تعیین کوتاهترین مسیرها بصورت الفبایی از گره s به تمام گره های دیگر را می دهد .

روش های برچسب گذاری ۳.۱.۲[۳] : روش هایی که در این بخش نمایش داده شده ، برپایه شیوه برچسب گذاری می باشد و بوسیله اصل بهینگی (گزاره ۱.۱.۲) پشتیبانی می شود و نتایج در وضعیت گزاره ۲.۱.۲ قرار دارد . فرض می کنیم که مجموعه $D(i)$ از برچسب ها ، به هر گره $i \in \mathcal{N}$ مرتبط باشد . ζ امین برچسب گره i ، یعنی $d(i)_\zeta = \left[d(i)_\zeta^1, \dots d(i)_\zeta^p\right]$ ، بردار طول مسیر یک مسیر از گره مبدا s به گره i را نشان می دهد . و هر مولفه ی $d(i)_\zeta^k$ در $d(i)_\zeta$ ، طول مسیر مرتبط با تابع $f^k(x)$ در (P) می باشد . در هر تکرار مجموعه

[۱] lexicographically
[۲] **single-origin all-destinations**
[۳] **Labeling Methods**

$D(i), \forall\, i \in \mathcal{N} - \{s\}$ بگونه ای بروز رسانی می شود که $D(i)$ در هر زمان ، یک مجموعه محدود نشده است . یعنی ، هیچ عضو $D(i)$ با عضو (متمایز) دیگر $D(i)$ محدود نشده است . روش های برچسب گذاری پیشنهاد شده را می توان برگرفته از دو نمونه پروسه اولیه دید که با توجه به روش انتخاب برچسب[۱] و روش انتخاب گره[۲] می باشد . در حالت اول ، در هر تکرار یک برچسب انتخاب می شود (برای مثال l امین برچسب مرتبط با گره i) و یک برچسب جدید برای هر گره j متصل به i بدست می آید . در حالت دوم ، در هر تکرار یک گره i انتخاب می شود و تمام برچسب های داخل $D(i)$ برای بدست آوردن یک مجموعه جدید برچسب ها برای هر فرزند گره i ، استفاده می شوند .

دو مدل روش مختلف با ملاحظه دو خط مشی ، انتخاب برچسب و انتخاب گره در ذیل می آید. .

۱) **روش های انتخاب برچسب** : گام اصلی یک روش انتخاب برچسب کلی ، با پروسه جستجوی یک برچسب برای ایجاد برچسب های جدید ، نمایش داده شده است . جستجوی یک برچسب $D(i)$ مرتبط با یک گره i ، آزمایش تمام کمانهای خروجی $(i,j) \epsilon\, \mathcal{A}$ از i برای تعیین برچسب جدید $\bar{d}_j$ ، را ایجاب می کند . یعنی $\bar{d}\,(j) = d(i) + q^{(i,j)}$

هر برچسب ایجاد شده جدید $\bar{d}\,(j)$ با تمام برچسب های موجود گره j ، مقایسه می شود . اگر $\bar{d}\,(j)$ محدود نشده بود ، آنگاه به $d(j)$ اضافه می شود و تمام برچسب های داخل $d(j)$ که بوسیله $\bar{d}\,(j)$ محدود شده اند خط می خورند . اگر برچسب زیادی برای جستجو باقی نمانده باشد ، الگوریتم به پایان می رسد .

---

[۱] **label-selection**
[۲] **node-selection**

الگوریتمی که در بالا مختصراً توصیف شد ، علاوه بر مجموعه $D(i)$ ، برای هر $i \epsilon \mathcal{N}$ ، یک مجموعه از برچسب های کاندید φ را که شامل تمام برچسب های دلخواه ، با پتانسیل تعیین یک برچسب جدید برای حداقل یک گره می باشند را ذخیره می کند . مبنای الگوریتم انتخاب برچسب پایه ، برای مسئله MSP بصورت زیر می تواند باشد .

گام ۰ مجموعه ی آغازین $D(s) = \{d(s)_1\} = \{[0,0,\dots,0]\},$

$$D(j) = \emptyset\,, \quad \forall j \in \mathcal{N} - \{s\},$$
$$\varphi = \{d(s)_1\}\,.$$

گام ۱ انتخاب برچسب

گام ۱a اگر $\varphi = \emptyset$ ، توقف کن .

گام ۱b برچسب $d(i)_\zeta \epsilon \varphi$ را انتخاب کن و آن را از φ حذف کن .

گام۲ جستجوی برچسب . $\forall j \epsilon \mathcal{N}: (i,j) \epsilon \mathcal{A}, j \neq s$ تحت گام های ۲a و۲b زیر

گام ۲a قرار بده برای هر $k = 1,\dots,p$ ، $\bar{d}(j) := d(i)_\zeta^k + q_k^{(i,j)}$

گام۲b بررسی محدود بودن ، $\bar{d}(j)$ را با هر $d(j) \epsilon D(j)$ مقایسه کن . اگر $\bar{d}(j)$ با بعضی از برچسب های $D(j)$ محدود شده باشد ، برو به گام۱ ،در غیر اینصورت ، $\bar{d}(j)$ را به $D(j)$ و φ اضافه کن ؛ از $D(j)$ و φ تمام برچسب هایی که با $\bar{d}(j)$ محدود می شوند را حذف کن .

بر پایه انجام عملیات بوسیله روش برچسب گذاری بالا گزاره زیر را می توان اثبات کرد .

گزاره ی ۳.۱.۲

(۱) در پایان هر تکرار شرایط زیر برقرار است :

$$D(s) = \{d(s)_1\} = \{[0,0,\dots,0]\} \quad (1a)$$

$(۱b)$ به ازای هر $j \in \mathcal{N}$ ، اگر $D(j) \neq \emptyset$ [یعنی : $D(j) = \{d(j)_۱, \dots, d(j)_l\}$] و $j \neq s$ ، آنگاه $d(j)_k$ ، $k = ۱, \dots, l$ ، بردار طول مسیر[۱] یک مسیر از گره s به گره j می باشد و $D(j)$ ، یک مجموعه ی محدود نشده است . اثبات در [۹].

(۲) بر طبق پایان الگوریتم ، اگر $D(j) \neq \emptyset$ و $j \in \mathcal{N}$ و $j \neq s$ باشند ، آنگاه $D(j)$ بردار طول مسیر تمام مسیر های بهینه پارتو از s به j را شامل می شود .

بر طبقِ روشِ مطابق با انتخاب برچسب در گام اول ، اجراهای متفاوت روش انتخاب برچسب پایه ای ، توسعه یافته است . اشاره با ارز شی است که ترتیبی که برچسب ها بدست آمده و در داخل لیست φ قرار می گیرند برای اعتبار و درستی روش حساس و مهم است . هرچند کارایی الگوریتم می تواند وابسته به استراتژی باشد که برای منظم کردن پروسه برچسب هایی که داخل φ می افتند ، استفاده می شود .

در هر تکرار ، اگر خارج شدن برچسب φ ، برحسب کوچکترین ترتیب الفبایی باشد ، روش تنظیم برچسب پیشنهاد شده است که در مرجع [۱۲] بدست آمده است .

در این حالت ، اگر معیارها ، روی مجموعه تمام برچسب های مرتبط با هر گره ، نامنفی باشند ، ملاحظه برچسب های دائمی و موقت ممکن می شود . وقتی باقیمانده اولی تغییری نکرد ، بعدی در طول اجرای الگوریتم می تواند حذف شود . بعلاوه وقتی یک برچسب موقت از φ بیرون می رود آن برچسب پایدار و ثابت می شود ؛ بنابراین هر برچسب دقیقاً یک بار به φ وارد و یک بار خارج می شود . وقتی لیست کاندید برای خارج شدن برچسب φ در هر تکرار ، برچسب کوچکترین ترتیب الفبایی نباشد ، الگوریتم به یک روش تصحیح برچسب محدود می شود . در این حالت ، از پیدا کردن

[۱] **path length vector**

برچسب با کوچکترین ترتیب الفبایی اجتناب می کنیم اما یک برچسب خروجی φ ، لزوما طول بردار یک مسیر بهینه پارتو نیست ، یعنی بعضی برچسب های غیر بهینه ی پارتو نیز جستجو می شوند . در ساده ترین استراتژی انتخاب برچسب ، برچسب ها از لیست φ با ترتیب ورود آنها خارج می شوند . یعنی ، برچسب ها به ترتیب در پایین لیست وارد می شوند و به ترتیب از بالای لیست خارج می شوند . به عبارت دیگر لیست φ ، با صف $FIFO$[۱] ، ذخیره می نماید . در نتیجه روش مربوط بعنوان برچسب $FIFO$[۲] ارجاع داده می شود (نشان داده می شود)

یک روش تصحیح برچسب خیلی پیشرفته (حساس) مطابق با مسئله MSP تعریف شده بود . یک استراتژی کارای بخصوص برای خارج کردن گرهی که در لیست کاندید ، در زمینه مسئله کوتاهترین مسیر کلاسیک می باشد . این استراتژی ، روش برچسب کوچک اول[۳] (SLF) [۳۸] نامیده می شد . این روش لیست کاندید را در یک صف پایان یافته دو گانه ی[۴] Q ذخیره می کند و یک گره را در پایین یا بالای Q وابسته به اینکه آیا ، برچسب گره ، بزرگتر از برچسب گره بالای Q است یا نه ، درج می کند.

استراتژی که بطور خلاصه در بالا توصیف شد برای مسئله MSP اختصاص داده شده بود . بدست آوردن یک روش تصحیح برچسب جدید که در نتیجه به روش برچسب با ترتیب الفبایی کوچک اول $(SLLF)$ اشاره دارد ، در هر تکرار برچسب به برچسب بالای φ منتقل می شود ، در حالیکه یک برچسب جدید برپایه قانون زیر اضافه می گردد .

---

[۱] **FIFO queue**
[۲] **FIFO-LABEL**
[۳] **small label first**
[۴] **double-ended**