



دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده مهندسی مکانیک

تحلیل دینامیکی سازه یک موشک هدایت شونده

حسن گلزار

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته

مهندسی هوافضا-سازه های هوایی

استاد راهنما:

دکتر حمید احمدیان

شهریور ماه ۱۳۸۲

تشکر و قدر دانی

سپاس پرودگار بزرگ را که در انجام این تحقیق و در تمامی مراحل زندگی راهنما و یاری رسان حقیقی من بوده است.

بر خود لازم می دانم از استاد بزرگوار آقای دکتر حمید احمدیان که در انجام این تحقیق با صبر و حوصله راهنمای اینجانب بودند تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از آقایان مهندس تورج افیونیان و حسن جلالی که در انجام آزمایشهای مودال مجموعه مورد نظر، از مساعدت ایشان استفاده نموده ام تشکر نمایم.

چکیده

معمولاً بین خواص دینامیکی سازه ای محاسبه شده به روش المان محدود و نتایج حاصل از داده تجربی آزمایش روی سازه اصلی اختلاف وجود دارد. برای ایجاد مدل مناسب و پیشگویی خواص دینامیکی سازه و بهینه کردن طراحی، بایستی مدل معتبر باشد. فرآیند معتبر سازی مدل و مراحل منحصر بفرد آن باعث می شود، عملکرد سازه مدلسازی شده با مدل واقعی یکسان باشد. لذا باعث می شود فرآیند معتبر سازی مدل، بعنوان یک صورت مسئله مطرح گردد.

استراتژی معتبر سازی مدل در مقدمه این پایان نامه آمده است با مطالعه این استراتژی حاضر تا انتهای این پایان نامه روشی برای معتبر سازی مدل سازه قدرتی یک موشک هدایت شونده ارائه خواهد شد. با استفاده از مدل های معتبر سازه های مورد بحث می توان برای ساخت و طراحی جدید از این مدل المان محدود در کاهش زمان حلقه طراحی - آزمایش - طراحی مجدد استفاده نمود که در نهایت در صنایع مرتبط مورد استفاده عملی خواهد گرفت. در این کار نشان داده شده است که بهینه سازی مدل فقط می تواند اختلافهای ایجاد شده بوسیله پارامترهای ایجاد خطا را کاهش دهد.

در این پایان نامه معتبر سازی مدل، بوسیله کنترل همگرایی در ساخت ماتریس جرم و سختی و کنترل شکل مودها و مقادیر ویژه بدست آمده از طریق المان محدود و روش تجربی، پیشنهاد داده شده تا به ترتیب خطاهای گسسته سازی و خطاهای پیکربندی در مدل المان محدود به حداقل برسد.

در این پایان نامه توجه خاصی به تعیین مشخصات دینامیکی اتصالات با استفاده از داده های تجربی و بهینه سازی در یک موشک تاکتیکی را مد نظر داشته است. از این مدل معتبر شده می توان جهت تحلیل دینامیکی سازه استفاده نمود.

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل ۱ مدلسازی اجزاء محدود زیر سازه ها

۱	۱-۱ مقدمه
۵	۱-۲ مشخصات اجزاء سازه
۵	۱-۲-۱ زیر سازه بدنه کلاهک
۹	۱-۲-۲ زیر سازه بدنه سرچنگی
۱۳	۱-۲-۳ زیر سازه بدنه جلویی
۱۷	۱-۲-۴ زیر سازه بدنه موتور پرواز
۲۰	۱-۲-۵ زیرسازه بدنه درپوش موتور پرواز
۲۲	۱-۲-۶ زیرسازه بدنه میانی
۲۵	۱-۲-۷ زیرسازه بدنه انتهایی
۲۹	۱-۲-۸ خلاصه نتایج زیر سازه ها
۳۰	۱-۳ مدلسازی اتصالات سازه ها با المان واسط
۳۵	۱-۳-۱ اتصال زیر سازه های کلاهک و سرچنگی
۳۸	۱-۳-۲ اتصال زیر سازه های کلاهک و سرچنگی با بدنه جلویی (A&B&C)
۴۱	۱-۳-۳ اتصال زیر سازه های A,B,C با بدنه موتور پرواز
۴۴	۱-۳-۴ اتصال زیر سازه های A,B,C,D با بدنه در پوش موتور پرواز
۴۶	۱-۳-۵ اتصال بدنه های انتهایی و میانی
۴۹	۱-۳-۶ اتصال سازه قذرتی موشک از ناحیه سازه های E و F
۵۱	۱-۳-۷ اتصال تقویت کننده در سازه موشک
۵۴	۱-۴ نتیجه گیری

فصل ۲ آزمایش آنالیز مودال بر روی زیر سازه ها

۵۵	۲-۱ مقدمه
۵۶	۲-۲ آماده سازی سازه
۵۷	۲-۳ سیستم اندازه گیری
۵۸	۲-۳-۱ مکانیزم تحریک سازه
۵۹	۲-۳-۱-۱ نصب شیکر و اتصال آن به سازه
۶۰	۲-۳-۱-۲ چکش ضربه
۶۳	۲-۳-۲ سنسورهای اندازه گیری
۶۳	۲-۳-۲-۱ اندازه گیری نیرو
۶۳	۲-۳-۲-۲ اندازه گیری پاسخ

۶۴	۲-۳-۲-۳ روشهای ساده برای نصب
۶۵	۲-۳-۲-۴ نصب شتابسنج ها
۶۶	۲-۳-۳ تحلیلگر
۶۷	۲-۳-۳-۱ تحلیلگر پاسخ فرکانسی (FRA)
۶۷	۲-۳-۳-۲ تحلیلگر DFT/FFT
۶۸	۲-۳-۳-۳ سیستمهای کامپیوتری
۶۸	۲-۴ انجام آزمایشهای مودال بر روی زیر سازه ها
۷۰	۲-۴-۱ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه کلاهدک A
۷۰	۲-۴-۲ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه بدنه سرچنگی B
۷۱	۲-۴-۳ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه بدنه جلویی C
۷۲	۲-۴-۴ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه بدنه موتور پرواز D
۷۳	۲-۴-۵ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه بدنه درپوش موتور پرواز E
۷۴	۲-۴-۶ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه بدنه میانی F
۷۵	۲-۴-۷ انجام آزمایش مودال بر روی زیر سازه بدنه انتهایی G
۷۷	۲-۴-۸ انجام آزمایش مودال بر روی مجموعه اتصال زیر سازه های کلاهدک و سرچنگی (A,B)
۷۸	۲-۴-۹ انجام آزمایش مودال بر روی مجموعه اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی
۷۹	۲-۴-۱۰ انجام آزمایش مودال بر روی مجموعه زیر سازه های A,B,C و زیر سازه بدنه موتور پرواز
۸۱	۲-۴-۱۱ انجام آزمایش مودال بر روی مجموعه اتصال زیر سازه های A,B,C,D با بدنه درپوش موتور پرواز
۸۲	۲-۴-۱۲ انجام آزمایش مودال بر روی مجموعه اتصال زیر سازه های بدنه های انتهایی و میانی
۸۳	۲-۴-۱۳ انجام آزمایش مودال بر روی مجموعه سازه قدرتی موشک
۸۴	۲-۴-۱۴ انجام آزمایش مودال بر روی سازه تقویت شده
۸۶	۲-۵ روشهای تحلیل و استخراج پارامترهای مودال
۸۷	۲-۵-۱ فرضیات و ساده سازی
۸۷	۲-۵-۲ روند تحلیل مودال
۸۸	۲-۵-۲-۱ روشهای تحلیل SDOF یا MDOF
۹۰	۲-۵-۲-۲ روش تحلیل SISO یا SIMO یا MIMO
۹۲	۲-۵-۳ روش تحلیل SDOF در حوزه فرکانس
۹۳	۲-۵-۳-۱ روش Peak_Picking
۹۴	۲-۵-۳-۲ روش Circle_Fit
۹۵	۲-۵-۳-۳ روش Line_Fit
۹۸	۲-۶ روش تحلیل MDOF در حوزه فرکانس
۹۷	۲-۶-۱ روش حداقل مربعات
۹۸	۲-۶-۲ روش چند جمله ای کسری منطقی
۹۹	۲-۷ مشخصه های دینامیکی حاصل از آزمایش زیر سازه ها

۹۹	۲-۷-۱ مشخصه های دینامیکی زیر سازه کلاهدک
۱۰۱	۲-۷-۲ مشخصه های دینامیکی زیر سازه سرچنگی
۱۰۴	۲-۷-۳ مشخصه های دینامیکی زیر سازه بدنه جلویی
۱۰۶	۲-۷-۴ مشخصه های دینامیکی زیر سازه بدنه موتور پرواز
۱۰۸	۲-۷-۵ مشخصه های دینامیکی زیر سازه درپوش موتور پرواز
۱۰۹	۲-۷-۶ مشخصه های دینامیکی زیر سازه بدنه میانی
۱۱۱	۲-۷-۷ مشخصه های دینامیکی زیر سازه بدنه انتهایی
۱۱۳	۲-۷-۸ مشخصه های دینامیکی زیر سازه های کلاهدک و سرچنگی
۱۱۶	۲-۷-۹ مشخصه های دینامیکی اتصال زیرسازه های A,B با بدنه جلویی
۱۱۸	۲-۷-۱۰ مشخصه های دینامیکی اتصال چهار زیر سازه ابتدایی
۱۲۱	۲-۷-۱۱ مشخصه های دینامیکی اتصال پنج زیر سازه ابتدایی
۱۲۳	۲-۷-۱۲ مشخصه های دینامیکی اتصال دو زیر سازه های انتهایی
۱۲۵	۲-۷-۱۳ مشخصه های دینامیکی سازه قدرتی موشک
۱۲۷	۲-۷-۱۴ مشخصه های دینامیکی سازه قدرتی (تقویت شده) موشک
۱۲۸	۲-۸ نتیجه گیری

فصل ۳ معتبرسازی مدل‌های المان محدود

۱۲۹	۳-۱ مقدمه
۱۲۹	۳-۲ روش‌های اصلاح مدل در حوزه مودال
۱۲۹	۳-۲-۱ روش حساسیت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
۱۳۳	۳-۲-۲ روش معادله خطا
۱۳۴	۳-۲-۳ روش پارامتر خطا
۱۳۷	۳-۳ معتبر سازی مدل المان محدود زیرسازه ها
۱۳۷	۳-۳-۱ معتبر سازی مدل المان محدود زیرسازه کلاهدک
۱۳۸	۳-۳-۲ معتبر سازی مدل المان محدود زیرسازه سرچنگی
۱۳۸	۳-۳-۳ معتبر سازی مدل المان محدود زیر سازه بدنه جلویی
۱۳۹	۳-۳-۴ معتبر سازی مدل المان محدود زیر سازه بدنه موتور پرواز
۱۴۰	۳-۳-۵ معتبر سازی مدل المان محدود زیر سازه درپوش موتور پرواز
۱۴۰	۳-۳-۶ معتبر سازی مدل المان محدود زیر سازه بدنه میانی
۱۴۱	۳-۳-۷ معتبر سازی مدل المان محدود زیر سازه زیرسازه بدنه انتهایی
۱۴۲	۳-۳-۸ معتبر سازی مدل اتصال زیرسازه کلاهدک و سرچنگی
۱۴۳	۳-۳-۹ معتبر سازی مدل اتصال زیرسازه A و B با زیرسازه بدنه جلویی
۱۴۴	۳-۳-۱۰ معتبر سازی مدل اتصال زیرسازه A و B و C با زیرسازه موتور پرواز
۱۴۵	۳-۳-۱۱ معتبر سازی مدل اتصال چهار زیرسازه ابتدایی با زیرسازه درپوش موتور پرواز

- ۱۴۶ ۳-۳-۱۲ معتبر سازی مدل اتصال زیرسازه های بدنه میانی و بدنه انتهایی
- ۱۴۷ ۳-۳-۱۳ معتبر سازی مدل اتصال زیرسازه موشک
- ۱۴۸ ۳-۳-۱۴ معتبر سازی مدل اتصال سازه تقویت شده موشک

فصل ۴ بحث و نتیجه گیری

۱۵۲

مراجع و منابع

فهرست تصاویر و نمودارها

صفحه

عنوان

۵	۱-۱ سازه قدرتی یک موشک ضد زره
۶	۱-۲ ابعاد بدنه کلاهک
۶	۱-۳ نمودار تغییرات فرکانسهای طبیعی نسبت به تعداد المان
۷	۱-۴ شکل مود اول زیرسازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۳۱۸ هرتز
۷	۱-۵ شکل مود دوم زیرسازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۸۶۶ هرتز
۸	۱-۶ شکل مود سوم زیرسازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۱۶۰۸ هرتز
۸	۱-۷ شکل مود چهارم زیرسازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۲۵۲۹ هرتز
۹	۱-۸ ابعاد هندسی بدنه سرچنگی
۱۰	۱-۹ نمودار تغییرات فرکانسهای طبیعی نسبت به تعداد المان
۱۱	۱-۱۰ شکل مود اول سرچنگی در فرکانس طبیعی ۵۷۷ هرتز
۱۱	۱-۱۱ شکل مود دوم سرچنگی در فرکانس طبیعی ۱۴۵۶ هرتز
۱۲	۱-۱۲ شکل مود سوم سرچنگی در فرکانس طبیعی ۲۰۹۵ هرتز
۱۲	۱-۱۳ شکل مود چهارم سرچنگی در فرکانس طبیعی ۲۶۶۹ هرتز
۱۳	۱-۱۴ ابعاد هندسی زیر سازه بدنه جلویی
۱۴	۱-۱۵ شکل مود اول زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۱۷۶ هرتز
۱۵	۱-۱۶ شکل مود دوم زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۲۳۱ هرتز
۱۵	۱-۱۷ شکل مود سوم زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۴۸۹ هرتز
۱۶	۱-۱۸ شکل مود چهارم زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۶۲۳/۹ هرتز
۱۷	۱-۱۹ ابعاد هندسی بدنه موتور پرواز
۱۸	۱-۲۰ شکل مود اول موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۴۰۵ هرتز
۱۸	۱-۲۱ شکل مود دوم موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۱۰۹۳ هرتز
۱۹	۱-۲۲ شکل مود سوم موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۱۹۷۵ هرتز
۱۹	۱-۲۳ شکل مود چهارم موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۲۷۷۷ هرتز
۲۰	۱-۲۴ ابعاد هندسی بدنه درپوش موتور پرواز
۲۱	۱-۲۵ شکل مود اول بدنه درپوش موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۷۲۴ هرتز
۲۱	۱-۲۶ شکل مود دوم بدنه درپوش موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۱۸۵۸ هرتز
۲۲	۱-۲۷ ابعاد هندسی زیرسازه بدنه میانی
۲۳	۱-۲۸ شکل مود اول بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۲۲۹/۹ هرتز
۲۴	۱-۲۹ شکل مود دوم بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۵۶۸ هرتز
۲۴	۱-۳۰ شکل مود سوم بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۱۰۵۷ هرتز

- ۲۵ ۱-۳۱ شکل مود چهارم بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۱۲۵۸ هرتز
- ۲۶ ۱-۳۲ ابعاد هندسی زیرسازه بدنه انتهایی
- ۲۶ ۱-۳۳ شکل مود اول زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۴۹ هرتز
- ۲۷ ۱-۳۴ شکل مود دوم زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۸۵ هرتز
- ۲۷ ۱-۳۵ شکل مود سوم زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۱۵۶ هرتز
- ۲۸ ۱-۳۶ شکل مود چهارم زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۲۳۶ هرتز
- ۳۰ ۱-۳۷ المان ضخامت صفر ارائه شده توسط گودمن، تیلور و برک
- ۳۲ ۱-۳۸ مقایسه بین داده های آزمایش و مدل هیپربولیک
- ۳۲ ۱-۳۹ مدل هیپربولیک بکار گرفته شده توسط کلاف و دانسن
- ۳۵ ۱-۴۰ اتصال بین دو بدنه ابتدایی
- ۳۶ ۱-۴۱ شکل مود اول دو بدنه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۱۶۵۳ هرتز
- ۳۶ ۱-۴۲ شکل مود دوم دو بدنه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۱۹۹۲ هرتز
- ۳۷ ۱-۴۳ شکل مود سوم دو بدنه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۲۶۹۲ هرتز
- ۳۷ ۱-۴۴ شکل مود چهارم دو بدنه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۲۷۶۰ هرتز
- ۳۸ ۱-۴۵ اتصال بین سه بدنه ابتدایی
- ۳۹ ۱-۴۶ شکل مود اول زیر سازه های A,B,C در فرکانس طبیعی ۵۲۵ هرتز
- ۳۹ ۱-۴۷ شکل مود دوم زیر سازه های A,B,C در فرکانس طبیعی ۶۱۳ هرتز
- ۴۰ ۱-۴۸ شکل مود سوم زیر سازه های A,B,C در فرکانس طبیعی ۹۷۱ هرتز
- ۴۱ ۱-۴۹ نمایش اتصال بین چهار زیرسازه ابتدایی
- ۴۲ ۱-۵۰ شکل مود اول زیر سازه های A,B,C,D در فرکانس طبیعی ۶۵۶ هرتز
- ۴۲ ۱-۵۱ شکل مود دوم زیر سازه های A,B,C,D در فرکانس طبیعی ۷۲۱ هرتز
- ۴۳ ۱-۵۲ شکل مود سوم زیر سازه های A,B,C,D در فرکانس طبیعی ۸۷۷ هرتز
- ۴۳ ۱-۵۳ شکل مود سوم بدنه های A,B,C,D در فرکانس طبیعی ۱۲۳۶ هرتز
- ۴۴ ۱-۵۴ نمایش اتصال بین پنج زیرسازه ابتدایی
- ۴۵ ۱-۵۵ شکل مود اول زیرسازه های E,A,B,C,D در فرکانس طبیعی ۷۸۶ هرتز
- ۴۵ ۱-۵۶ شکل مود دوم زیرسازه های A,B,C,D,E در فرکانس طبیعی ۱۴۹۸ هرتز
- ۴۶ ۱-۵۷ شکل مود سوم زیرسازه های A,B,C,D,E در فرکانس طبیعی ۱۸۸۵ هرتز
- ۴۷ ۱-۵۸ نمایش اتصال بین دو زیر سازه انتهایی
- ۴۷ ۱-۵۹ شکل مود اول زیرسازه های F,G در فرکانس طبیعی ۱۰۸ هرتز
- ۴۸ ۱-۶۰ شکل مود دوم زیرسازه های F,G در فرکانس طبیعی ۱۶۷ هرتز
- ۴۸ ۱-۶۱ شکل مود سوم زیرسازه های F,G در فرکانس طبیعی ۲۸۲/۸ هرتز
- ۴۹ ۱-۶۲ شکل مود چهارم زیرسازه های F,G در فرکانس طبیعی ۵۵۶ هرتز
- ۵۰ ۱-۶۳ نمایش اتصال سازه موشک
- ۵۰ ۱-۶۴ شکل مود اول سازه موشک در فرکانس طبیعی ۴۱۳/۶ هرتز

۵۱	۱-۶۵ شکل مود دوم سازه موشک در فرکانس طبیعی ۶۳۲/۱ هرتز
۵۲	۱-۶۶ نمایش اتصال قطعه تقویت کننده در سازه موشک
۵۲	۱-۶۷ شکل مود اول سازه موشک (تقویت شده) در فرکانس طبیعی ۳۰۶ هرتز
۵۳	۱-۶۸ شکل مود دوم سازه موشک (تقویت شده) در فرکانس طبیعی ۵۸۶ هرتز
۵۷	۲-۱ شمای کلی ایجاد شرایط تکیه گاهی آزاد
۵۸	۲-۲ شمای کلی سیستم اندازه گیری
۶۰	۲-۳ شمای کلی روشهای نصب سیستمهای تحریک کننده
۶۱	۲-۴ شمای کلی چکش ضربه
۶۱	۲-۵ پالس نیروی ضربه و طیف
۶۲	۲-۶ پالس نیروی ضربه و طیف آن با سرهای مختلف
۶۳	۲-۷ ساختمان یک مبدل نیرو
۶۴	۲-۸ دو طرح متداول شتابسنج پیزوالکتریک
۶۴	۲-۹ مدل دینامیکی شتابسنج
۶۶	۲-۱۰ نحوه نصب شتابسنج ها
۶۹	۲-۱۱ تصویر تحلیلیگر B&K 3550
۷۰	۲-۱۲ نمودار پاسخ فرکانسی FRF زیر سازه کلاهدک A
۷۱	۲-۱۳ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی زیر سازه بدنه سرچنگی B
۷۲	۲-۱۴ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی زیر سازه بدنه جلویی C
۷۳	۲-۱۵ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی زیر سازه بدنه موتور پرواز D
۷۴	۲-۱۶ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی زیر سازه بدنه درپوش موتور پرواز E
۷۵	۲-۱۷ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی زیر سازه بدنه میانی F
۷۶	۲-۱۸ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی زیر سازه بدنه انتهایی G
۷۷	۲-۱۹ اتصال بین دو بدنه ابتدایی (A,B)
۷۸	۲-۲۰ نمودار پاسخ فرکانسی FRF اتصال زیر سازه های کلاهدک و سرچنگی
۷۸	۲-۲۱ اتصال بین سه بدنه ابتدایی
۷۹	۲-۲۲ نمودار پاسخ فرکانسی FRF اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی
۸۰	۲-۲۳ نمایش اتصال بین روی چهار زیر سازه ابتدایی
۸۰	۲-۲۴ نمودار پاسخ فرکانسی FRF اتصال زیر سازه های A,B,C با بدنه موتور پرواز
۸۱	۲-۲۵ نمایش اتصال بین پنج زیر سازه بدنه ابتدایی
۸۲	۲-۲۶ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی اتصال زیر سازه های A,B,C,D با بدنه درپوش موتور پرواز
۸۲	۲-۲۷ نمایش اتصال بین دو بدنه انتهایی
۸۳	۲-۲۸ نمودار FRF آزمایش آنالیز مودال روی دو زیرسازه انتهایی
۸۳	۲-۲۹ تصویر آزمایش مودال روی سازه قدرتی موشک
۸۴	۲-۳۰ نمودار پاسخ فرکانسی FRF روی سازه قدرتی بدنه های موشک

۸۴	۲-۳۱	نمایش اتصال قطعه تقویت کننده با بدنه موشک
۸۵	۲-۳۲	نمودار FRF حاصل از آزمایش مودال روی سازه تقویت شده موشک
۸۸	۲-۳۳	مقایسه شماتیک روشهای تحلیل مودال SDOF و MDOF
۹۰	۲-۳۴	انتخاب منحنیهای FRF (a روش SIMO) (b روش MIMO)
۹۳	۲-۳۵	منحنیهای FRF و تحلیل Peak_Picking
۹۵	۲-۳۶	منحنی نایکوئیست
۹۶	۲-۳۷	منحنی معکوس FRF بصورت یک خط راست
۹۹	۲-۳۸	شکل مود اول زیرسازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۲۷۰ هرتز
۱۰۰	۲-۳۹	شکل مود دوم زیر سازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۷۱۰/۶ هرتز
۱۰۰	۲-۴۰	شکل مود سوم زیر سازه کلاهک در فرکانس طبیعی ۱۳۱۰ هرتز
۱۰۱	۲-۴۱	شکل مود اول زیر سازه سرچنگی در فرکانس طبیعی ۵۴۷ هرتز
۱۰۲	۲-۴۲	شکل مود دوم زیر سازه سرچنگی در فرکانس طبیعی ۱۳۸۹ هرتز
۱۰۲	۲-۴۳	شکل مود سوم زیر سازه سرچنگی در فرکانس طبیعی ۲۲۲۱ هرتز
۱۰۳	۲-۴۴	شکل مود چهارم زیر سازه سرچنگی در فرکانس طبیعی ۲۵۲۵ هرتز
۱۰۴	۲-۴۵	شکل مود اول زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۱۶۹/۶ هرتز
۱۰۴	۲-۴۶	شکل مود دوم زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۲۳۲/۵ هرتز
۱۰۵	۲-۴۷	شکل مود سوم زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۴۶۲/۷ هرتز
۱۰۵	۲-۴۸	شکل مود چهارم زیر سازه بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۶۱۰/۹ هرتز
۱۰۶	۲-۴۹	شکل مود اول زیر سازه بدنه موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۴۳۴/۷ هرتز
۱۰۷	۲-۵۰	شکل مود دوم زیر سازه بدنه موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۱۱۳۴ هرتز
۱۰۷	۲-۵۱	شکل مود چهارم زیر سازه بدنه موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۲۱۱۰ هرتز
۱۰۸	۲-۵۲	شکل مود اول زیر سازه درپوش موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۸۳۰/۲ هرتز
۱۰۹	۲-۵۳	شکل مود دوم زیر سازه درپوش موتور پرواز در فرکانس طبیعی ۲۲۱۵ هرتز
۱۰۹	۲-۵۴	شکل مود اول زیر سازه بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۲۱۷/۲ هرتز
۱۱۰	۲-۵۵	شکل مود دوم زیر سازه بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۵۳۴/۸ هرتز
۱۱۰	۲-۵۶	شکل مود سوم زیر سازه بدنه میانی در فرکانس طبیعی ۹۸۳/۲ هرتز
۱۱۱	۲-۵۷	شکل مود اول زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۴۴ هرتز
۱۱۱	۲-۵۸	شکل مود دوم زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۸۱ هرتز
۱۱۲	۲-۵۹	شکل مود سوم زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۱۵۰/۴ هرتز
۱۱۲	۲-۶۰	شکل مود چهارم زیرسازه بدنه انتهایی در فرکانس طبیعی ۲۲۵/۸ هرتز
۱۱۳	۲-۶۱	شکل مود اول اتصال زیر سازه های کلاهک و سرچنگی در فرکانس طبیعی ۱۶۲۲ هرتز
۱۱۴	۲-۶۲	شکل مود دوم اتصال زیر سازه های کلاهک و سرچنگی در فرکانس طبیعی ۱۸۳۰ هرتز
۱۱۴	۲-۶۳	شکل مود سوم اتصال زیر سازه های کلاهک و سرچنگی در فرکانس طبیعی ۲۵۲۸ هرتز
۱۱۵	۲-۶۴	شکل مود چهارم اتصال زیر سازه های کلاهک و سرچنگی در فرکانس طبیعی ۲۶۹۸ هرتز

- ۱۱۶ شکل ۲-۶۵ مود اول اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۳۲۳/۵ هرتز
- ۱۱۶ شکل ۲-۶۶ مود دوم اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۴۳۶ هرتز
- ۱۱۷ شکل ۲-۶۷ مود سوم اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۴۹۷ هرتز
- ۱۱۷ شکل ۲-۶۸ مود چهارم اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی در فرکانس طبیعی ۵۳۴/۷ هرتز
- ۱۱۸ شکل ۲-۶۹ مود اول اتصال چهار زیر سازه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۶۹۸/۹ هرتز
- ۱۱۹ شکل ۲-۷۰ مود دوم اتصال چهار زیر سازه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۷۳۳ هرتز
- ۱۱۹ شکل ۲-۷۱ مود سوم اتصال چهار زیر سازه ابتدایی در فرکانس طبیعی ۱۰۷۷ هرتز
- ۱۲۰ شکل ۲-۷۲ مود چهارم اتصال چهار زیر سازه های ابتدایی پرواز در فرکانس طبیعی ۱۱۵۷ هرتز
- ۱۲۱ شکل ۲-۷۳ مود اول اتصال پنج زیر سازه های ابتدایی در فرکانس طبیعی ۸۵۳ هرتز
- ۱۲۱ شکل ۲-۷۴ مود دوم اتصال پنج زیر سازه های ابتدایی در فرکانس طبیعی ۱۵۶۶ هرتز
- ۱۲۲ شکل ۲-۷۵ مود سوم اتصال پنج زیر سازه های ابتدایی در فرکانس طبیعی ۱۷۸۳ هرتز
- ۱۲۳ شکل ۲-۷۶ مود اول اتصال دو زیر سازه های انتهایی در فرکانس طبیعی ۹۷/۵ هرتز
- ۱۲۳ شکل ۲-۷۷ مود دوم اتصال دو زیر سازه های انتهایی در فرکانس طبیعی ۱۵۵/۴ هرتز
- ۱۲۴ شکل ۲-۷۸ مود سوم اتصال دو زیر سازه های انتهایی در فرکانس طبیعی ۲۷۵/۵ هرتز
- ۱۲۴ شکل ۲-۷۹ مود چهارم اتصال دو زیر سازه های انتهایی در فرکانس طبیعی ۵۵۴/۸ هرتز
- ۱۲۵ شکل ۲-۸۰ مود اول خمشی سازه قدرتی موشک در فرکانس طبیعی ۳۷۸/۳۸ هرتز
- ۱۲۶ شکل ۲-۸۱ مود دوم خمشی سازه قدرتی موشک در فرکانس طبیعی ۵۱۶ هرتز
- ۱۲۷ شکل ۲-۸۲ مود اول خمشی سازه قدرتی (تقویت شده) موشک در فرکانس طبیعی ۳۳۹/۲ هرتز
- ۱۲۷ شکل ۲-۸۳ مود دوم خمشی سازه قدرتی (تقویت شده) موشک در فرکانس طبیعی ۵۴۶ هرتز
- ۱۴۳ ۳-۱ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته لایه واسط زیر سازه های AB
- ۱۴۴ ۳-۲ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته لایه واسط زیر سازه های ABC
- ۱۴۵ ۳-۳ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته لایه واسط زیر سازه های ABCD
- ۱۴۶ ۳-۴ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته لایه واسط زیر سازه های ABCDE
- ۱۴۷ ۳-۵ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته لایه واسط زیر سازه های ABCD
- ۱۴۸ ۳-۶ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته لایه واسط زیر سازه های موشک

فهرست جداول

صفحه

عنوان

۹	۱-۱ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه زیر سازه کلاهدک
۱۳	۱-۲ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه زیر سازه بدنه سرچنگی
۱۶	۱-۳ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه زیر سازه بدنه جلویی
۲۰	۱-۴ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه زیرسازه موتور پرواز
۲۳	۱-۵ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه زیرسازه درپوش موتور پرواز
۲۵	۱-۶ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه در زیرسازه بدنه میانی
۲۸	۱-۷ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه زیرسازه بدنه انتهایی
۳۸	۱-۸ نتایج حاصل از مدل المان محدود اولیه اتصال دو زیر سازه ابتدایی
۴۰	۱-۹ نتایج حاصل از مدل المان محدود اولیه اتصال سه زیرسازه ابتدایی
۴۴	۱-۱۰ نتایج حاصل از مدل المان محدود اولیه اتصال چهار زیرسازه ابتدایی
۴۶	۱-۱۱ نتایج حاصل از مدل المان محدود اولیه اتصال پنج زیرسازه ابتدایی
۴۹	۱-۱۲ خلاصه نتایج حاصل از مدل المان محدود اولیه زیرسازه های F,G
۵۱	۱-۱۳ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده
۵۳	۱-۱۴ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه سازه موشک (تقویت شده)
۶۸	۲-۱ مشخصات شتاب سنج و حسگر نیرو
۱۰۱	۲-۲ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه بدنه کلاهدک
۱۰۳	۲-۳ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه سرچنگی
۱۰۶	۲-۴ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه بدنه جلویی
۱۰۸	۲-۵ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه بدنه موتور پرواز
۱۰۹	۲-۶ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه درپوش موتور پرواز
۱۱۰	۲-۷ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه بدنه میانی
۱۱۳	۲-۸ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه انتهایی
۱۱۵	۲-۹ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی زیرسازه های کلاهدک و سرچنگی
۱۱۸	۲-۱۰ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی اتصال زیر سازه های A,B با بدنه جلویی
۱۲۰	۲-۱۱ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی اتصال چهار زیر سازه ابتدایی
۱۲۲	۲-۱۲ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی اتصال پنج زیر سازه ابتدایی
۱۲۵	۲-۱۳ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی اتصال دو زیر سازه انتهایی
۱۲۶	۲-۱۴ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی سازه قدرتی موشک
۱۲۸	۲-۱۵ خلاصه نتایج آزمایش مودال روی سازه قدرتی (تقویت شده) موشک

- ۱۳۷ ۳-۱ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده در زیر سازه کلاهدک
- ۱۳۸ ۳-۲ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده بدنه سرچنگی
- ۱۳۹ ۳-۳ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده بدنه جلویی
- ۱۳۹ ۳-۴ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده بدنه موتور پرواز
- ۱۴۰ ۳-۵ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده بدنه درپوش موتور پرواز
- ۱۴۱ ۳-۶ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده بدنه میانی
- ۱۴۱ ۳-۷ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده بدنه انتهایی
- ۱۴۲ ۳-۸ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده اتصال زیرسازه کلاهدک و سرچنگی
- ۱۴۳ ۳-۹ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده اتصال زیرسازه های A و B و C
- ۱۴۴ ۳-۱۰ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده اتصال چهار زیرسازه ابتدایی
- ۱۴۵ ۳-۱۱ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده اتصال پنج زیرسازه ابتدایی
- ۱۴۶ ۳-۱۲ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده دو زیرسازه انتهایی
- ۱۴۷ ۳-۱۳ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده سازه موشک
- ۱۴۸ ۳-۱۴ خلاصه نتایج حاصل از مدل اولیه، آزمایش آنالیز مودال و مدل معتبر شده سازه تقویت شده موشک

فصل ۱

مدلسازی اجزاء محدود زیر سازه ها

۱-۱ مقدمه

تکنیک المان محدود (FE) و معتبر سازی مدل

استفاده از مدل المان محدود جهت پیش بینی خواص دینامیکی سازه ها در صنایع مکانیک مدرن بیشتر و بیشتر اهمیت یافته است، مثلاً در صنایع هوافضا هرگاه هدف یک طراحی جدید یا اصلاح یک طرح، مد نظر باشد، بایستی قبل از اینکه سازه تکمیل گردد، خواص دینامیکی سازه محصول (فرکانس طبیعی، شکل مود و ضریب استهلاک) امتحان شود تا با مقادیر مد نظر از طرف صنعت مطابقت داشته و در زمان عملکرد با مشکلی مواجه نگردد.

روش معمول ارزیابی خواص دینامیکی یک سازه، انجام یک سری آزمایشهای دینامیکی روی نمونه های

پیش تولید محصول میباشد.

تا زمانی که نتایج تجربی نشان دهد نمونه پیش تولید میتواند مشخصات مربوطه را برآورده سازد، محصول طراحی مجدد خواهد داشت و حلقه طراحی - آزمایش ادامه خواهد داشت. در این حلقه طراحی - آزمایش - طراحی مجدد، زمان و هزینه زیادی روی ساخت نمونه و انجام آزمایش صرف میگردد.

با رشد توانایی تکنیک های کامپیوتری و قدرت رقابت بین شرکتهای، از پیش بینی های مدل المان محدود بیشتر و بیشتر به جای داده های آزمایش دینامیکی تجربی استفاده میشود. از این گذشته تکنیک مدل سازی المان محدود ممکن است جهت پیش بینی پاسخ دینامیکی سازه ها در شرایط خارج از محدوده عملکرد بکار رود. چون آزمایش تجربی موارد فوق کاری بسیار مشکل و یا غیر ممکن می باشد. شبیه سازی این شرایط به دقت مدل المان محدود و همچنین به معتبر بودن مدل بستگی دارد.

تعریف مدل المان محدود معتبر، وابسته به روند ساخت مدل المان محدود می باشد. رفتار دینامیکی مدل معتبر باید تشابه قابل قبولی با رفتار سازه حقیقی مد نظر داشته باشد. معمولاً برای شبیه سازی یک سازه ابتدا یک مدل ابتدایی بنا میگردد که پس از بهینه سازی و معتبر شدن، مدل باید قابلیت پیش بینی رفتار دینامیکی سازه را در محدوده ای که در فرآیند معتبر سازی از آن داده های تجربی استفاده شده است را داشته باشد. همچنین این مدل بایستی بتواند خواص دینامیکی سازه را در خارج از محدوده ای که آزمایش انجام شده است را پیش بینی نماید (البته با دقتی خاص).

اختلاف بین پیش بینی مدل با داده های تجربی

بطور معمول، نمیتوان تضمین کرد خواص دینامیکی حاصل از مدل المان محدود اولیه یک سازه صنعتی دقتی قابل قبول داشته باشد و مستقیماً جایگزین داده های تجربی گردد. معمولاً اختلافهایی بین پیش بینی های مدل و داده های تجربی حاصل از آزمایش وجود دارد. در اندازه داده های تجربی از سازه حقیقی بعضی از خطاها ناشی از اغتشاش میباشد ولی اغلب اختلافها به علت بی دقتی در مدلسازی میباشد. به همین دلیل باید مدل المان محدود مورد ارزیابی قرار گیرد تا صحت پیش بینی آن مورد ارزیابی قرار گیرد.

سه نوع خطا می تواند در مدل‌های المان محدود وجود داشته باشد. این سه نوع خطا میتواند در طی ساخت مدل اتفاق بیافتد. خطاهای مؤثر در استخراج خواص دینامیکی مدل المان محدود بطور خلاصه شده زیر بیان میگردد.

الف) خطای گسسته سازی

مقادیر حاصل از مدل المان محدود گسسته بیشتر یا کمتر از خواص دینامیکی سازه پیوسته میباشد. هر چند زمانی که پیکربندی و متغیرهای مدل درست باشند. مرجع چنین اختلافاتی به خطاهای گسستگی مدل المان محدود بر میگردد. برای بدست آوردن خواص دینامیکی از یک مدل المان محدود هر دو ماتریس جرم و سختی مدل در محاسبه مشارکت مینمایند. بصورت ریاضی می توان بیان کرد، ساختار ماتریس جرم و سختی هر المان از مدل که در معادله حرکت مؤثر باشد برای یک سیستم پیوسته یک علت اصلی ایجاد خطاهای گسستگی میباشد.

ب) خطاهای پیکربندی

نوع المان مورد استفاده در مدل المان محدود، مخصوصاً المانهایی که در سازه نقش کلیدی دارند، مثلاً اتصالات تأثیر بسزایی در خواص دینامیکی مدل دارند. در فرآیند مدل سازی، بعضی اشکال فیزیکی مجبورند در مدل سازی ساده شوند. برای مثال در بدنه موتور هواپیما یا موشک در مدل سازی معمولی از المان پوسته استفاده میشود، هر چند در بعضی مکانها ضخامت پوسته مناسب برای مدل سازی با المان پوسته نمیباشد. فلنج های پوسته اغلب بوسیله المان تیر مدل سازی میگردند. بعضی ساده سازی ها تأثیر زیادی روی خواص دینامیکی مدل در محدود فرکانس پایین نمیگذارد اما در محدوده فرکانس بالا تأثیر گذار میباشد، ضمناً اگر بعضی قطعات یا قسمتهایی از سازه جزء اشکال "کلیدی" سازه باشند و در بعضی از مودها از مدل حذف شده باشند نایستی انتظار برآورد خواص دینامیکی از این مودها را داشته باشید یا حداقل نمیتوان پیش بینی این مودها را دقیق دانست.

ج) خطای پارامترها

چون مدل المان محدود یک مدل ساده شده از سازه میباشد. ممکن است بعضی از پارامترها را غیر دقیق نماید. مهندسين بر اساس تجربیاتشان یا از روی تخمین مقدار مناسبی از مقادیر را بکار میبرند. زمانی که مقدار این

پارامترها دقیق نباشد خواص دینامیکی حاصل دقیق نخواهد بوده زمانی که مدل تحت پروسه بهینه سازی قرار گیرد و پارامترها غیر دقیق انتخاب شده باشند این فرآیند پارامترها را به مقادیر واقعی سیر میدهد.

در پروسه معتبر سازی مدل، مدل اولیه معمولاً دارای سه نوع خطای ذکر شده خواهد بود. تأثیر انواع خطاهای مختلف که در هم آمیخته میشوند باعث میگردند تا فرآیند معتبر سازی مدل، پیچیده تر از حالتی گردد که فقط یک نوع خطا در مدل وجود داشته باشد.

استراتژی معتبر سازی مدل

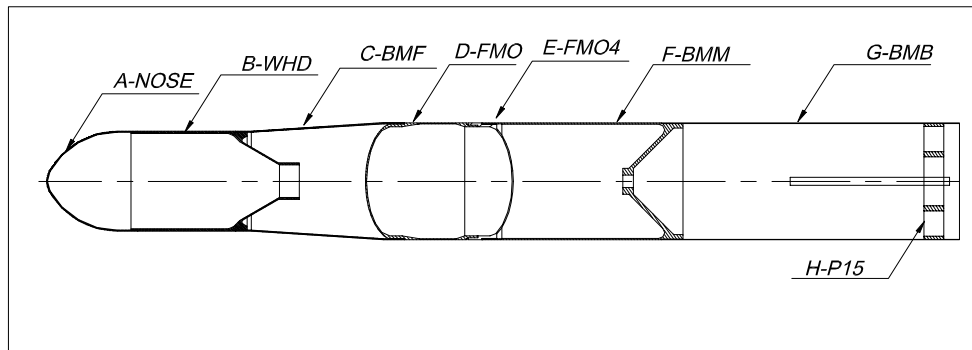
برای محاسبه و تخمین رفتار دینامیکی سازه مورد نظر این پایان نامه نیاز به مدلسازی مناسب سازه و کنترل مدل توسط آزمایشهای تجربی مودال می باشد در عمل پس از مدلسازی اولیه تک تک قطعات به روش المان محدود (فصل ۱)، با استفاده از نتایج حاصل از آزمایش مودال (فصل ۲) این قطعات، مدلها معتبر می گردند و در مرحله بعد هر دو قطعه متوالی در مدل المان محدود با استفاده از لایه نازک المان به هم متصل می گردند و مشخصات دینامیکی قطعات متصله محاسبه میگردد و به روش تجربی نیز این خواص استخراج میشود از مقایسه نتایج تجربی با نتایج آزمایش آنالیز مودال می توان پارامترهای اتصال بین قطعات را محاسبه نمود (فصل ۳) و عبارت دیگر اتصالات بین قطعات را شبیه سازی می گردد.

در این مرحله هر مدل المان محدود بهینه و معتبر گردیده است. این فرآیند تا زمانی ادامه پیدا می کند که کل سازه قدرتی جسم پرنده در مدل المان محدود به هم متصل شده باشد و کلیه اتصالات بوسیله آزمایش آنالیز مودال و بهینه سازی شبیه سازی شده باشند و خواص دینامیکی مدل المان محدود شبیه به خواص دینامیکی حاصل از آزمایش گردد.

۱-۲ مشخصات اجزاء سازه

موشک مورد تحلیل یک موشک سوخت جامد می باشد که طول آن ۱۱۶۳ میلیمتر و قطر آن ۱۴۸/۵ میلیمتر و متوسط وزن آن ۱۸/۸۶۵ کیلوگرم می باشد قسمتهای سازه قدرتی این موشک ضد زره (شکل ۱-۱) به ترتیب عبارتند از :

کلاهک A، سرچنگی B بدنه ابتدایی C، موتور پرواز D، درپوش موتور پرواز E، بدنه میانی F و بدنه انتهایی G جهت مدلسازی المان محدود از نرم افزار ANSYS استفاده شده است.

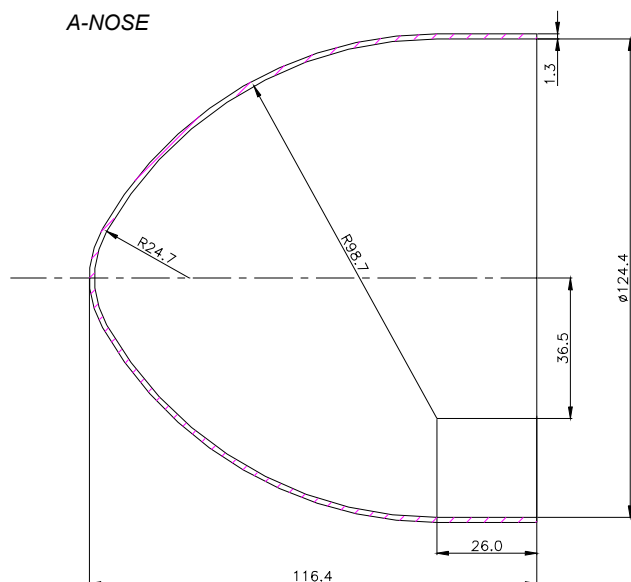


شکل ۱-۱ سازه قدرتی یک موشک ضد زره

۱-۲-۱ زیر سازه بدنه کلاهک

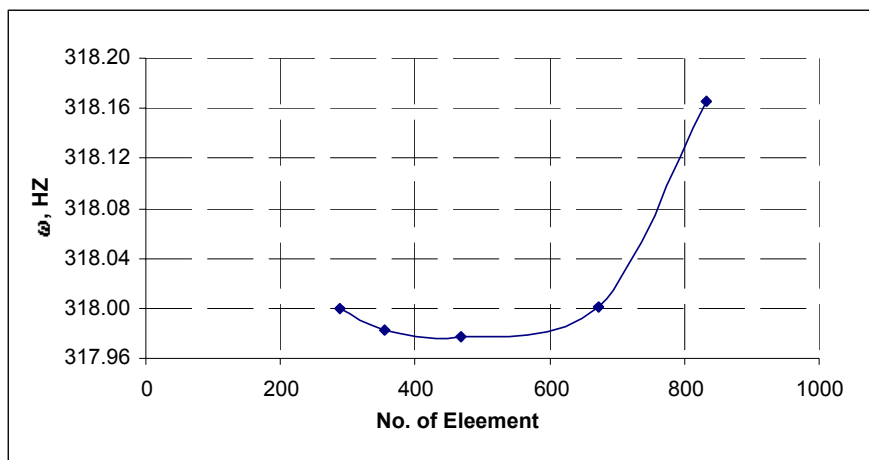
زیر سازه بدنه کلاهک (A-NOSE) بطوری که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است دارای ضخامتی در حدود ۱/۳ میلیمتر و حد اکثر قطر آن ۱۲۴/۴ میلیمتر می باشد و از جنس آلومینیوم ساخته شده است. جهت مدلسازی قطعه فوق و دوری از خطای پیکربندی^۱ از المان پوسته ای با هشت گره استفاده شده است که هر گره دارای شش درجه آزادی می باشد و جرم این قطعه در مدل المان محدود در حدود قطعه اصلی بدست آمده است

¹ Configuration errors



شکل ۱-۲ ابعاد بدنه کلاهک

تعداد المانهای بکار رفته ۴۶۸ عدد می باشد، در این تعداد المان خطاهای گسستگی^۱ به حداقل ممکن رسیده است و معیار سنجش این خطا نمودار تغییرات فرکانس طبیعی اول سازه نسبت به افزایش تعداد المان می باشد.



شکل ۱-۳ نمودار تغییرات فرکانسهای طبیعی نسبت به تعداد المان

فرکانس طبیعی و شکل مودهای زیرسازه فوق به روش تحلیل مودال المان محدود پیش بینی شده است. از نتایج حاصل از این مدل المان محدود، جهت طراحی آزمایش آنالیز^۲ مودال استفاده خواهد شد.

¹ Discretisation errors

² Test planing