دانشگاه پیام‌نور مشهد
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های مدول ضربی

استاد راهنما:
دکتر سعید رجایی

استاد مشاور:
دکتر علی‌اکبر استاجی

نگارش:
مریم علی آبادی

مهر ۱۳۸۸

تقدیم به

همسر گرامی و فرزندان عزیزم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس شایسته خداوندی است که موهبت‌های بیکران بر بندگان ارزانی داشت و گوهر خرد در وجود آدمیان انشاء کرد و به آنها قدرت تفکر و اندیشیدن بخشید.

اکنون که به عنایات حضرت حق توانستم کار تدوین این رساله را به پایان رسانم بر خود می‌دانم از تمام عزیزانی که در این راه از مساعدت و راهنمایی‌شان بهره بردم تشکر و قدردانی نمایم. به ویژه از استاد فرزانه جناب آقای **دکتر سعید رجایی** که مسئولیت راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند و از رهنمودهای علمی و نکته‌های بجای ایشان کمال استفاده را بردم همچنین استاد گرانقدر جناب آقای **دکتر علی‌اکبر استاجی** که به حق اگر نبود راهنمایی‌ها و دلسوزی‌های ایشان کار نگارش این پژوهش به اتمام نمی‌رسید و نیز از استاد بزرگوار جناب آقای **دکتر کاظم خشایارمنش** که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، صمیمانه سپاس‌گزاری نموده، از خداوند طلب عزت و سربلندی در عرصه علم و پژوهش برای این بزرگواران را دارم.

در پایان وظیفه‌ی خود می‌دانم سپاس صمیمانه‌ام را تقدیم پدر و مادر عزیزم نمایم که همواره و بی‌دریغ مرهون الطافشان بودم.

چکیده

درسراسر این پایان نامه R را حلقه‌ی جابجایی یکدار و M را R–مدول یکانی در نظر می‌گیریم. اگر برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آلی مانند I از R موجود باشد به قسمی که $N = IM$، دراین صورت M را مدول ضربی می‌نامیم.

فرض کنیم که M، R–مدول ضربی غیر صفر باشد، آن گاه ثابت می‌کنیم که:

۱) یک دوسویی از $N(M) \cap V(ann_R(M))$ به $Spec_R(M)$ وجود دارد و در حالت خاص دوسویی از $N(M) \cap Max(R)$ به $Max_R(M)$ موجود است.

۲) $N(M) \cap V(ann_R(M)) = Supp(M) \cap V(ann_R(M))$.

۳) برای هر ایده‌آل I از R، $P \bigcap_{P \in N(M) \cap V(ann_R(M))} = (M :_R M(\sqrt{I} + ann_R(M)))$.

سپس ایده‌آل $\theta(M) = \sum_{m \in M}(Rm : M)$، از R راکه در مطالعه‌ی مدول‌های ضربی مفید است را در نظر گرفته و در اثبات نتایج زیر از آن کمک می‌گیریم. فرض کنیم $P \in Spec(R)$ و M، R–مدول غیر صفری باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) M، مدول ضربی متناهیاً تولید شده است.

۲) PM، مدول ضربی است.

۳) برای هر عدد صحیح مثبت n، $P^n M \neq P^{n+1} M$.

آن گاه:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (P^n + ann_R(M)) \in V(ann_R(M)) = Supp_R(M) \subseteq N(M)$$

واژه‌های کلیدی:

زیرمدول اول – زیرمدول ماکسیمال – مدول متناهیاً تولید شده – مدول ضربی .

فهرست مندرجات

پیشگفتار

مدول‌های ضربی نوع خاصی از مدول‌ها هستند که از سال ۱۹۸۰ مورد توجه قرار گرفته‌اند. با گذشت چند دهه از انتشار اولین مقاله در مورد مدول‌های ضربی توسط اندرسون [۱]، مطالعات و تحقیقات در مورد مدول‌ها و ایده‌آل‌های ضربی به طور چشمگیری گسترش یافت. مدول‌های ضربی توسط افرادی چون اسمیت [۲] (۱۹۸۸)، البست [۳](۱۹۹۸)، اندرسون (۲۰۰۰) و اندرسون و الشانیافی [۴](۲۰۰۲) بررسی شده است.

در این پایان نامه به مفهوم ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های، مدول ضربی روی حلقه‌ی جابجایی و یکدار می‌پردازیم. در سراسر پایان نامه R نمایش حلقه‌ی جابجایی و یکدار و M، $R-$مدول می‌باشد.

این رساله مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، را بیان می کنیم.این فصل شامل سه بخش مدول، موضعی سازی و حاصل‌ضرب تانسوری می‌باشد.

فصل دوم شامل دو بخش است. در بخش اول ابتدا مدول و ایده‌آل ضربی را تعریف کرده سپس طی چند قضیه شرایطی که یک مدول به مدول ضربی تبدیل می‌شود را بیان می‌کنیم. در ادامه با قضیه‌ی مهم ۱۳.۱.۲، ثابت می‌کنیم که $R-$مدول وفادار M، ضربی است اگر و تنها اگر برای هر گردایه‌ی ناتهی از ایده‌آل‌های $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از R، $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I\lambda)M$ و همچنین برای هر زیرمدول N از M و ایده‌آل A از R که $N \subset AM$، ایده‌آل B از R موجود است که $B \subset A$ و $N \subseteq BM$. از این قضیه در اثبات قضایای فصل بعد کمک می‌گیریم. در بخش دوم این فصل،

[۱] Anderson

[۲] Smith

[۳] El-Bast

[۴] Al-Shaniafi

به بررسی زیرمدول‌های اول و ماکسیمال، مدول ضربی می‌پردازیم. نماد $N(M)$ را برای نشان دادن مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R که $PM \neq M$ است، به کار می‌بریم. با توجه به قضیه‌ی ۴.۲.۲، ثابت می‌کنیم که یک تناظر یک به یک و حافظ ترتیب از $N(M) \cap V(ann(M))$ به $Spec_R(M)$ وجود دارد و از آن فرم زیرمدول‌های اول مدول ضربی M را نتیجه می‌گیریم و سپس ثابت می‌کنیم که در حالت خاص تناظر یک به یکی نیز از $N(M) \cap Max(R)$ به $Max_R(M)$ وجود دارد که زیرمدول ماکسیمال، M را مشخص می‌کند.

فصل سوم که مهمترین فصل این پایان‌نامه می‌باشد مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول روابط بین ایده‌آل‌ها وزیرمدول‌ها را بررسی می‌کنیم. در ابتدا برای ایده‌آل I و ایده‌آل ماکسیمال P از حلقه‌ی R مفاهیم I–تابی، I–دوری،P–تابی و P–دوری را تعریف کرده سپس با قضیه‌ی مهم ۶.۱.۳، رابطه‌ی بین مدول ضربی و مفاهیم فوق را اثبات می‌کنیم. یک قضیه از جبر جابجایی بیان می‌کند که رادیکال ایده‌آل I برابر با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول شامل I است. در ادامه‌ی بخش این قضیه را به مدول‌های ضربی تعمیم می‌دهیم. در بخش دوم این فصل با توجه به مطالب [۱۲]، به بررسی مجموع و اشتراک زیرمدول‌های، مدول ضربی می‌پردازیم و شرایطی که مجموع و اشتراک زیرمدول‌های یک مدول ضربی، ضربی می‌شوند را بررسی می‌کنیم. آخرین بخش این فصل را با تعریف ایده‌آل $\theta(M)$ از حلقه‌ی R، شروع می‌کنیم که در مطالعه‌ی مدول‌های ضربی مفید می‌باشد و سپس برای ایده‌آل I از R، ایده‌آل $\theta(M)$ را به $\theta(IM)$ تعمیم می‌دهیم و در نهایت قضیه‌ی ۱۲.۳.۳، را بیان و اثبات می‌کنیم تا شرایطی که تحت آن یک حلقه‌ی موضعی و نوتری به حوزه‌ی ارزیاب گسسته تبدیل می‌گردد را مشخص کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در فصل اول تعاریف و قضایایی را بیان می‌کنیم که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. این فصل شامل سه بخش می‌باشد که در بخش اول تعریف مدول و قضایای مربوط به آن را آورده‌ایم، سپس در بخش دوم موضعی‌سازی توضیح داده شده است و در بخش سوم این فصل حاصل‌ضرب تانسوری و قضایایی مربوط به آن را آورده‌ایم. در اینجا لازم به ذکر است که در تمام این پایان‌نامه R نمایش یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است و تمامی مدول‌ها یکانی هستند.

۱.۱ مدول

در این بخش ابتدا تعریف مدول و سپس تعاریف و قضایای مقدماتی در مورد مدول‌ها را که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را آورده‌ایم.

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک $R-$مدول، گروهی آبلی و جمعی مانند M ، همراه با تابعی مانند $R \times M \longrightarrow M$ است که نقش (r,m) را با rm نشان داده می‌شود به طوری‌که به ازای هر $r,s \in R$ و $m,n \in M$،

۱) $r(m+n) = rm + rn$.

۲) $(r+s)m = rm + sm$.

۳) $r(sm) = (rs)m$.

هرگاه R دارای واحد 1_R بوده و به ازای هر $m \in M$، $1_R m = m$، گوییم M یک $R-$مدول یکانی است.

تعریف ۲.۱.۱ : ایده‌آل P در حلقه R را اول گوییم، هرگاه $P \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل A و B از R که $AB \subseteq P$ نتیجه شود که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۳.۱.۱ : زیر مدول N از $R-$مدول M را اول نامیم، هرگاه $N \neq M$ و به ازای هر $a \in R$ و $x \in M$ که $ax \in N$ نتیجه شود که $x \in N$ یا $aM \subseteq N$.

تعریف ۴.۱.۱ : مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R را با $Spec(R)$ نشان می‌دهیم و مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های اول، $R-$مدول M را با $Spec_R(M)$ نشان می‌دهیم واگر R را به عنوان $R-$مدول

و حلقه در نظر بگیریم واضح است که:

$$Spec(R) = Spec_R(R)$$

تعریف ۵.۱.۱ : فرض کنیم N زیر مدولی از R−مدول M باشد، آن گاه $(N :_R M)$ را مجموعه‌ی $\{r \in R \mid rM \subseteq N\}$ تعریف می‌کنیم و در حالت خاص $(\circ :_R M)$ را پوچ‌ساز M نامیده و با $ann_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ : هر گاه $ann_R(M) = \circ$، R−مدول M را وفادار می‌گوییم.

قضیه ۷.۱.۱ : اگر $\{N_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از زیرمدول‌ها و N زیرمدولی از R−مدول M باشند، آن‌گاه:

۱) $(N : M)M \subseteq N$.

۲) اگر $N_i \subseteq N_j$، آن‌گاه $(N_i : M) \subseteq (N_j : M)$.

۳) $(\bigcap_{i\in I} N_i : M) = \bigcap_{i\in I}(N_i : M)$.

برهان : واضح است.

■

تعریف ۸.۱.۱ : ایده‌آل P از حلقه R را ماکسیمال گوییم، هرگاه $P \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل I که $P \subseteq I \subseteq R$ نتیجه شود که $I = P$ یا $I = R$.

تعریف ۹.۱.۱ : زیر مدول N از R−مدول M را ماکسیمال نامیم، هرگاه $N \neq M$ و برای هر زیرمدول K از M، اگر $N \subseteq K \subseteq M$ نتیجه شود که $K = N$ یا $K = M$.

تعریف ۱۰.۱.۱ : مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R را با $Max(R)$ و مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های ماکسیمال $R-$مدول M را با $Max_R(M)$ نشان می‌دهیم. اگر R را به عنوان $R-$مدول و حلقه در نظر بگیریم، واضح است که

$$Max(R) = Max_R(R)$$

قضیه ۱۱.۱.۱ : هر ایده‌آل سره حلقه‌ی R، مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال است.

برهان : به مرجع [۱۴]، فصل ۳، قضیه ۱۸.۲ رجوع شود.

■

تعریف ۱۲.۱.۱ : اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال جیکوبسن R می‌نامیم و با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۱ : رادیکال جیکوبسن R، برابر مجموعه‌ی تمام $x \in R$ است که به ازای هر $y \in R$، $1 - xy$ معکوس پذیر باشد.

برهان : به مرجع [۵]، قضیه ۱.۹ رجوع شود.

■

قضیه‌ی زیر به فن دترمینان معروف است.

قضیه ۱۴.۱.۱ : اگر I یک ایده‌آل و M، $R-$مدول متناهیاً تولید شده باشد که $IM = M$، آن‌گاه $i \in I$ وجود دارد که $(1 - i)M = 0$.

برهان : به مرجع [۱۳]، صفحه‌ی ۲۶۰، لم ۴.۷ رجوع شود.

■

لم ۱.۱.۱۵ (لم ناکایاما)[۱] فرض کنیم M، R–مدول متناهیاً تولید شده و I ایده‌آلی از R مشمول در $J(R)$ باشد، از $IM = M$ نتیجه می‌شود که $M = 0$.

برهان : به مرجع [۵]، قضیه ۲.٦، صفحه ۲۱ رجوع شود.

■

تعریف ۱.۱.۱٦ : فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد، $V(I) = \{P \in Spec(R) \mid I \subseteq P\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱۷ : فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه رادیکال I را با $\sqrt{I}$ نشان داده و به صورت $\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}(r^n \in I)\}$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱۸ : فرض کنیم P ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد، P، ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in R$ از $ab \in P$ نتیجه شود که $a \in P$ یا $b \in P$.

برهان : به مرجع [۱۴]، صفحه ۱۹٦ قضیه ۱۵.۲ رجوع شود.

■

تعریف ۱.۱.۱۹ : زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R بسته‌ی ضربی نامیده می‌شود هرگاه:

۱) $1 \in S$

۲) اگر $s_1, s_2 \in S$، آن‌گاه $s_1 s_2 \in S$.

قضیه ۱.۱.۲۰ : هرگاه S زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R و جدا از ایده‌آل I باشد، آن‌گاه ایده‌آلی مانند P وجود دارد که در مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های R که جدا از S و شامل I هستند، ماکسیمال است. به‌علاوه، هر چنین ایده‌آلی اول می‌باشد.

[۱] Nakayama's lemma

برهان : به مرجع [۱۴]، صفحه ۵۸۸ قضیه ۲.۲ رجوع شود.

■

قضیه ۲۱.۱.۱ : فرض کنیم I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P\in V(I)} P$$

برهان : به مرجع [۱۴]، صفحه ۵۹۱، قضیه ۶.۲ رجوع شود.

■

قضیه ۲۲.۱.۱ : اگر $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$، خانواده‌ای از ایده آل‌های حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه:

$$(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M = \sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M)$$

برهان : فرض کنیم $x\in(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M$، **در نتیجه** $x=\sum_{i=1}^n a_i m_i$ **که در آن** $m_i\in M$ **و همچنین** $a_i\in\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. **از طرفی** $a_i=\sum_{j=1}^k b_{ij}$ **که برای** $(\lambda\in\Lambda)$، $b_{ij}\in I_\lambda$. **بنابراین داریم:**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i m_i &= \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k b_{ij})m_i && \text{بنا به فرض ،}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k(b_{ij}m_i) && \text{بنا به توزیع پذیری ضرب به جمع ،}\\
&= \sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^n b_{ij}m_i\in\sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M)
\end{aligned}$$

در نتیجه $x\in\sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M)$. **بنابراین** $(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M\subseteq\sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M)$.

برعکس: فرض کنیم $x\in\sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M)$، **پس** $x=\sum_{i=1}^n a_i$ **که در آن** $a_i\in I_\lambda M$. **بنابراین عناصر** $b_{ij}\in I_\lambda$ **و** $m_j\in M$ **وجود دارند به طوری‌که** $a_i=\sum_{j=1}^k b_{ij}m_i$ **در نتیجه داریم:**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k b_{ij}m_i) && \text{بنا به فرض ،}\\
&= \sum_{j=1}^k(\sum_{i=1}^n(b_{ij})m_i\in\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M
\end{aligned}$$

در نتیجه $\sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) \subseteq (\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M$ و حکم اثبات می‌شود.

■

تعریف **۲۳.۱.۱** : اگر به ازای هر زنجیر $I_۱ \subseteq I_۲ \subseteq \cdots$ از ایده‌آل‌های R، عددی صحیح مانند n موجود باشد که به ازای هر $i \geq n$، $I_i = I_n$، آن‌گاه حلقه‌ی R را نوتری نامیم.

تعریف **۲۴.۱.۱** : اگر Q ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. اگر برای هر $a,b \in R$ که $ab \in Q$ و $a \notin Q$، $n \in N$ موجود باشد به طوری‌که $b^n \in Q$، آن‌گاه Q ایده‌آل اولیه نامیده می‌شود.

قضیه **۲۵.۱.۱** : اگر Q ایده‌آل اولیه از R باشد، آن‌گاه $P = \sqrt{Q}$ ایده‌آل اولی از R است. در این حالت Q را ایده‌آل P–اولیه از R می‌نامیم.

برهان :

به مرجع [۱۴] صفحه‌ی ۵۹۲، قضیه‌ی ۹.۲ رجوع شود.

■

تعریف **۲۶.۱.۱** : فرض کنیم I ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. یک تجزیه‌ی اولیه I برابر با اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل‌های اولیه از R است. به عنوان مثال $I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n$، که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\sqrt{Q_i} = P_i$ (هر Q_i یک P_i–اولیه است.) یک تجزیه اولیه I است.

قضیه **۲۷.۱.۱** : در حلقه‌ی نوتری R، هر ایده‌آل تجزیه اولیه دارد.

برهان :

به مرجع [۵]، قضیه ۷.۱۳ رجوع شود.

■

قضیه ۲۸.۱.۱ : (اشتراک کرول) فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R باشد به طوری‌که $I \subseteq J(R)$، آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.

برهان :

به مرجع [۱۴] صفحه‌ی ٦۰٦، قضیه‌ی ۴.۴ رجوع شود.

■

نتیجه ۲۹.۱.۱ : فرض کنیم (R, P) حلقه‌ی شبه–موضعی باشد، آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$

برهان :

بنا به قضیه‌ی ۲۸.۱.۱، واضح است.

■

قضیه ۳۰.۱.۱ : فرض کنیم R حلقه‌ی نوتری با رادیکال جیکوبسن J و M یک R–مدول متناهیاً تولید شده باشد، آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n M = 0$

برهان :

به مرجع [۸]، قضیه ۷۹، رجوع شود.

■

قضیه ۳۱.۱.۱ : اگر I ایده‌آل متناهیاً تولید شده و $I \subseteq \sqrt{J}$، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری‌که $I^n \subseteq J$.

برهان :

فرض کنیم که $I = < x_1, \cdots, x_k >$. **بنابراین برای هر** $1 \leq i \leq k$ **داریم:**

$$x_i \in I \subseteq \sqrt{J} \to \exists n_i \in \mathbb{N}; x_i^{n_i} \in J$$

قرار می‌دهیم $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 1$. پس $I^n =< x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}; \sum t_i = n, t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} >$ اگر برای هر i، $t_i < n_i$ آن‌گاه $\sum t_i < n$. بنابراین اگر $a = x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k}$ به قسمی باشد که $a \in I^n$، آن‌گاه $1 \leq i \leq k$ به قسمی وجود دارد که $t_i \geq n_i$ و در نتیجه $x_i^{t_i} \in J$، یعنی؛ $a \in J$. از این‌رو $I^n \subseteq J$.

■

۲.۱ موضعی‌سازی

در این بخش به معرفی مدول کسرها، حلقه‌ی کسرها، میدان کسرها، موضعی سازی و ارتباط آن با بخش‌های بعد می‌پردازیم.

فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به این صورت تعریف می‌شود که به ازای هر $(a,s),(b,t) \in R \times S$

$$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists u \in S; u(ta - sb) = 0$$

در این صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

به ازای هر $(a,s) \in R \times S$ رده هم‌ارزی عنصر (a,s) رابا $\frac{a}{s}$ و مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ را با$S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $S^{-1}R$، متشکل از رده‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$، تحت اعمال جمع و ضرب که به صورت زیر تعریف می‌شوند حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

و

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{rb}{st}$$

که در آن $r,a,b \in R$ و $s,t \in S$. $S^{-1}R$ حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S نامیده می‌شود.

عضو خنثی در این حلقه $\frac{0_R}{1}$ و عضو یکه آن $\frac{1}{1}$ است که به ازای هر $s \in S$ با $\frac{0_R}{s}$ و $\frac{s}{s}$ برابر هستند.

حال به تعریف مدول کسرها می‌پردازیم. فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R و M یک R-مدول باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $M \times S$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم که به ازای هر $(m_1,s_1),(m_2,s_2) \in M \times S$:

$$(m_1,s_1) \sim (m_2,s_2) \Leftrightarrow \exists u \in S; u(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0$$

در این صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $M \times S$ است. به ازای هر $(m,s) \in M \times S$ رده هم‌ارزی عنصر (m,s) را با $\frac{m}{s}$ و مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}M$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $S^{-1}M$ متشکل از رده‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ تحت اعمال جمع و ضرب که به صورت زیر تعریف می‌شوند، مدولی روی حلقه‌ی $S^{-1}R$ می‌باشد.

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{s_1 s_2}$$

و

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{m_1}{s_1} = \frac{r m_1}{s s_1}$$

که درآن $s, s_1, s_2 \in S$ و $m_1, m_2 \in M$ و $r \in R$. $S^{-1}R-$ مدول $S^{-1}M$، مدول کسرهای M نسبت به S نامیده می‌شود. عنصر صفر این مدول $\frac{0_M}{1}$ است که به ازای هر $s \in S$ با $\frac{0_M}{s}$ برابرمی‌باشد. لازم به ذکر است که $S^{-1}M$ با عمل زیر، یک $R-$مدول است.

$$R \times S^{-1}M \to S^{-1}M$$

$$(r, \frac{m}{s}) \to \frac{rm}{s}$$

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد. اگر$S = R \backslash P$، آن‌گاه حلقه‌ی $S^{-1}R$ را با نماد R_P و مدول $S^{-1}M$ را با M_P نمایش می‌دهیم.

فرض‌کنیم $H = \{\frac{a}{s} \mid a \in P, s \in R \setminus P\}$. به‌وضوح H یک ایده‌آل از R_P و نیز تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R_P است و از این‌روR_P یک حلقه‌ی موضعی است.

تعریف ۲.۲.۱ : فرآیند تبدیل R به R_P را موضعی‌سازی R در P نامند.