دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

سرشت نمایی تقریبی تصویری و تزریقی بودن مدول‌های باناخ

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی‌محض (آنالیز ریاضی)

گل‌نوش روحانی

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی‌محض (آنالیز ریاضی) خانم گل‌نوش روحانی

تحت عنوان

سرشت نمایی تقریبی تصویری و تزریقی بودن مدول‌های باناخ

در تاریخ ۱۳۹۰/۹/۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ – استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر رسول نصر اصفهانی
۲ – استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۳ – استاد داور ۱	دکتر صابر ناصری (کردستان)
۴ – استاد داور ۲	دکتر محمدرضا کوشش

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه یک روش عددی مبتنی بر توابع هستهٔ بازتولید برای حل برخی معادلات با مشتقات پاره‌ای با شرایط مرزی غیرموضعی مانند معادلات شبه سهموی، معادلهٔ تلگراف و مسئلهٔ معکوس برای معادلهٔ سهموی بررسی می‌شود. در واقع با به کار گرفتن هستهٔ بازتولید، جواب تحلیلی را به صورت یک سری نامتناهی به دست آورده و یک مجموع متناهی از آن سری را به عنوان جواب تقریبی در نظر می‌گیریم. در آخر آنالیز همگرایی انجام شده و نتایج عددی رضایت‌بخش، کارایی روش را به خوبی نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی : فضای هستهٔ بازتولید، شرایط مرزی غیرموضعی، معادلات شبه—سهموی، معادلهٔ تلگراف غیرخطی هذلولوی، مسئلهٔ معکوس برای معادلهٔ سهموی

فصل ۱

مقدمه

در سال ۱۹۶۸ جانسون بعد از بررسی ویژگی های جبرهای باناخ روی فضاهای با بعد متناهی، برای اولین بار با در نظر گرفتن جنبه هومولوژیک آنها، نتایجی در مورد مشتق مرکزساز (ضربی)، جابجاگرها در جبرهای باناخ و نیز شکافتن جبر باناخ روی رادیکالش به دست آورد. از آن به بعد میانگین‌پذیری گروه‌های توپولوژیک فشرده موضعی به عنوان ویژگی های کوهمولوژیک در نظر گرفته شد و قضیه‌های نقطه ثابت به عنوان نتایج کوهمولوژیک داده شد. جانسون همچنین تعاریفی از گروه‌های همولوژی و کوهمولوژی روی جبرباناخ $\mathfrak{A}$ با ضرایبی درفضای X ارایه داد و رابطه بین آنها را بررسی کرد. سپس قضایای همولوژیک را بیان داشت و نشان داد که بعضی از جبرهای عملگری فشرده میانگین‌پذیرند وبه این ترتیب مفهوم میانگین‌پذیری و انقباض‌پذیری جبرهای باناخ درسال ۱۹۷۲ برای اولین بار توسط او مطرح شد و روابط مهمی در نظریه جبرهای باناخ به اثبات رسید.

قهرمانی ولوی در سال ۲۰۰۴ با گسترش نظریه‌های جانسون، در مقاله‌ای به نام "مفاهیم تعمیم یافته میانگین‌پذیری" نشان دادند که کلاس متناظر جبرهای باناخ، فراتر از جبرهای میانگین‌پذیر معرفی شده توسط جانسون می‌باشد وسپس در سال ۲۰۰۸ در مقاله‌ای با همان نام نشان دادند که همانند هم‌ارزی میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری تقریبی یکنواخت، انقباض‌پذیری وانقباض‌پذیری تقریبی یکنواخت نیز هم‌ارزند. آنها همین‌طور میانگین‌پذیری و انقباض‌پذیری تقریبی کراندار را باوجود عملگر تقریب همانی کراندار برای ایده‌آل قطری سرشت‌نمایی کردند و نتیجه‌هایی برای همانی تقریبی روی جبرهای دنباله‌ای باناخ، جبرهای لیپ‌شیتز وجبرهای برلینگ بدست آوردند.

در سال ۱۹۸۶ هلمسکی برای نخستین بار به بررسی همولوژی فضاهای باناخ و جبرهای توپولوژیک پرداخت و سه سال بعد در مقاله‌ای به نام "جبرهای چندنرمی و باناخ " مدول‌ها و جبرهای چندنرمی و باناخ را مورد مطالعه قرار داد ، بخصوص مدول‌های آنالیزی را در مفهوم تصویری و تزریقی و تخت همراه با کاربردهای آنها تفسیر کرد.

بعد از او پیرکفسکی مفهوم تصویری و تزریقی را در جبرهای باناخ گسترش داد و حالت تقریبی و نیز تقریبی یکنواخت آنها را سرشت‌نمایی کرد و فراتر از آن ارتباط آنها را با میانگین‌پذیری و انقباض‌پذیری تقریبی وتقریبی یکنواخت روی جبرهای باناخ تفسیر کرد. او همچنین نشان داد که هر جبر میانگین‌پذیر تقریبی یکنواخت، میانگین‌پذیر است.

فصل ۲

مفاهیم و نتایج مقدماتی

در این فصل، به طور مختصر تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی، ضرب تانسوری و آنالیز هارمونیک را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم.

۲–۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۲ فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. در این‌صورت یک نیم‌نرم روی X، نگاشت p از X به $\mathbb{R}$ است به‌گونه‌ای‌که برای هر $x,y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $p(x) \geq 0$.

(ب) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

(ج) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

یک نرم روی X، نیم‌نرم p روی X است به‌گونه‌ای که

(د) اگر $p(x) = 0$ آن‌گاه $x = 0$.

زوج (X,p) که در آن X یک فضای برداری و p یک نرم روی X است را یک فضای نرم‌دار گوییم.

تعریف ۲.۲ فضای نرم دار X را فضای باناخ گوییم، هرگاه متر القا شده از نرم آن، X را به یک فضای متریک کامل تبدیل کند.

مثال ۳.۲ فرض کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد. برای هر $1 \leq p < \infty$، فضای برداری $L^p(X, \mu)$ متشکل از کلاس‌های هم‌ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$، فضای باناخ است. همچنین فضای برداری $L^\infty(X)$، متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\} < \infty$، فضای باناخ است.

اثبات. به مثال ۴.۲ از [۱۵] رجوع شود. ■

تعریف ۴.۲ فرض کنیم M زیر فضایی بسته از فضای نرم‌دار X باشد. اگر زیر فضای بسته‌ای مانند N از X وجود داشته باشد به گونه‌ای که $X = M + N$ و $M \cap N = \{0\}$، آن‌گاه M را در X متمم‌شده گوییم. در این حالت X جمع مستقیم M و N گفته می‌شود و با نماد $X = M \oplus N$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۵.۲ فرض کنیم X فضای باناخ و Y زیرفضایی از X باشد. در این صورت

(الف) اگر $\dim Y < \infty$ باشد، آن‌گاه Y متمم‌پذیر است.

(ب) اگر $\dim X/Y < \infty$ باشد، آن‌گاه Y متمم‌پذیر است.

اثبات. به گزاره ۴.۲۱ از [۲۲] رجوع شود. ■

مثال ۶.۲ اگر $X = \mathbb{N}$، آن‌گاه $C_0(X) = \{(x_n)_n : \lim_n x_n = 0\}$ یک زیرفضای

$$\ell^\infty(X) = \{(x_n)_n : \sup_n |x_n| < \infty\}$$

است ولی $C_0(X)$ در $\ell^\infty(X)$ متمم‌پذیر نیست.

اثبات. به ۱.۳ از [۴] رجوع شود. ■

قضیه ۷.۲ (قضیه باناخ آلااُغلو) اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه گوی یکه بسته X^* فشرده ضعیف ستاره است.

اثبات. به قضیه۴.۲۶ از [۱۵] رجوع شود. ■

تعریف ۸.۲ فرض کنیم X و Y و Z سه فضای نرم دار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دوخطی گوییم هرگاه

(الف) برای هر $y \in Y$، نگاشت $x \longrightarrow \phi(x,y)$ روی X خطی باشد،

(ب) برای هر $x \in X$، نگاشت $y \longrightarrow \phi(x,y)$ روی Y خطی باشد.

اگر $Z = \mathbb{F}$ ، ϕ را یک تابعک دوخطی یا فرم دوخطی می‌نامیم. نگاشت دوخطی ϕ را کراندار گوییم، هرگاه $M > ۰$ باشد به گونه‌ای‌که برای $x \in X$ و $y \in Y$، $\|\phi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$. همچنین نرم ϕ با دستور زیر تعریف می‌شود

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x,y)\| : \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}$$

مجموعه نگاشت‌های دوخطی از $X \times Y$ به Z را با نماد $\mathcal{L}^۲(X,Y;Z)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲ به روش مشابه، نگاشت‌های $n-$خطی کراندار $\phi : X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z$ تعریف می‌شود. مجموعه همه نگاشت‌های $n-$خطی کراندار از $X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n$ به Z را با نماد $\mathcal{L}^n(X_۱, X_۲, \cdots, X_n; Z)$ نمایش می‌دهیم. اگر $X_۱ = X_۲ = \cdots = X_n$ باشد، آن‌گاه آن‌را با نماد $\mathcal{L}^n(X;Z)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲ فضای برداری تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{x \otimes y, x \in X, y \in Y\}$ در $\mathcal{L}(X^*, Y^*; \mathbb{F})$ را حاصل ضرب تانسوری جبری X و Y می‌نامیم و آن‌را با نماد $X \otimes Y$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲ فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار روی $\mathbb{F}$ و X^* و Y^* دوگانهای X و Y باشند. دراین‌صورت $x \otimes y$ را عضوی از $\mathcal{L}^۲(X^*, Y^*; \mathbb{F})$ با دستور $(x \otimes y)(f,g) = f(x)g(y)$ برای $x \in X$، $y \in Y$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۲ نرم تانسوری تصویری p روی $X \otimes Y$ با دستور

$$p(u) = \inf\{\sum_i \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_i x_i \otimes y_i\} \qquad (u \in X \otimes Y)$$

تعریف می‌شود که زیرینه روی همه نمایش‌های باپایان u گرفته شده است.

تعریف ۱۳.۲ کامل شده $(X\otimes Y,p)$ را ضرب تانسوری تصویری X و Y می‌نامیم و آن‌را با نمادهای $X\otimes_p Y$ یا $X\hat{\otimes}Y$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۴.۲ می‌توان $X\hat{\otimes}Y$ را زیر فضایی از $\mathcal{L}(X^*,Y^*;\mathbb{F})$ که دربردارنده همه عضوهای به‌صورت $u=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\otimes y_n$، با شرط $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\|y_n\|<\infty$ انگاشت.

اثبات. به گزاره ۶.۱۲ از [۱] رجوع شود. ■

مثال ۱۵.۲ فرض کنیم μ و ν دو اندازه σ—باپایان روی فضاهای اندازه M و N باشند. دراین‌صورت یکریختی خطی طولپا از $L^1(\mu)\hat{\otimes}L^1(\nu)$ به $L^1(\mu\times\nu)$ وجود دارد. از این‌رو نگاشت خطی $T:L^1(\mu)\otimes L^1(\nu)\longrightarrow L^1(\mu\times\nu)$ با دستور زیر وجود دارد.

$$T(a\otimes b)(s,t)=a(s)b(t)\quad (s\in M,t\in N,a\in L^1(\mu),b\in L^1(\nu)).$$

اثبات. به مثال ۶.۸ از [۱] رجوع شود. ■

۲—۲ جبرهای باناخ

تعریف ۱۶.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک فضای برداری روی میدان اسکالر $\mathbb{C}$ باشد. در این‌صورت $\mathfrak{A}$ را جبر یک گوییم، هرگاه عمل دوتایی روی $\mathfrak{A}$ با دستور $(x,y)\longmapsto xy$ به‌نام ضرب موجود باشد که برای هر $x,y,z\in\mathfrak{A}$ و $\alpha\in\mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $(x+y)z=xz+yz$ و $x(y+z)=xy+xz$،

(ب) $(xy)z=x(yz)$،

(ج) $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$.

اگر میدان اسکالر در تعریف $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد، $\mathfrak{A}$ را جبر مختلط یا حقیقی گوییم.

جبر $\mathfrak{A}$ را جبر یکدار گوییم هرگاه دارای عضو همانی نسبت به ضرب باشد. جبر $\mathfrak{A}$ را جبر جابجایی گوییم هرگاه برای هر $x,y\in\mathfrak{A}$ داشته باشیم $xy=yx$.

مثال ۱۷.۲ $C_b(X)$ مجموعه توابع خطی و کراندار $f:X\longrightarrow\mathbb{C}$ با عمل $(fg)(x)=f(x)g(x)$ یک جبر است.

تعریف ۱۸.۲ جبر $\mathfrak{A}$ را جبر نرم‌دار گوییم هرگاه $\mathfrak{A}$ یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. جبر نرم‌دار $\mathfrak{A}$ را یک جبر باناخ گوییم، هرگاه به عنوان یک فضای متریک کامل باشد.

مثال ۱۹.۲ (الف) فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد. $C_\circ(X)$ مجموعه توابع مختلط مقدار پیوسته که در بی‌نهایت به صفر میل می کنند، با نرم یکنواخت و ضرب نقطه‌ای $(f.g)(x) = f(x)g(x)$ برای هر $f, g \in C_\circ(X)$ و $x \in X$ یک جبر باناخ جابه‌جایی است .

(ب) $\mathbb{M}_n(C)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ مختلط با ضرب ماتریسی و نرم

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq ۱\} \quad (A \in \mathbb{M}_n(C))$$

یک جبر باناخ ناجابه‌جایی است.

(ج) $\ell^۱ = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=۱}^{\infty} |a_n| < \infty\}$ با جمع و ضرب نقطه‌ای و نرم $\|a\|_۱ = \sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ به‌گونه‌ای‌که $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$ یک جبر باناخ است.

اثبات. به مثال ۵.۵ از [۱۵] رجوع شود. ■

تعریف ۲۰.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت مجموعه $\mathfrak{A}_+$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{A}_+ = \{(x, a) | x \in \mathfrak{A}, a \in \mathbb{C}\}$$

اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب برداری و همچنین نرم در $\mathfrak{A}_+$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(الف) $(x, a) + (y, b) = (x + y, a + b)$.

(ب) $b(x, a) = (bx, ba)$.

(ج) $(x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$.

(د) $\|(x, a)\| = \|x\| + |a|$.

که در آن $x, y \in \mathfrak{A}$ و $a, b \in \mathbb{C}$. در این صورت $\mathfrak{A}_+$ همراه با اعمال و نرم فوق یک جبر نرم‌دار است، هم‌چنین عنصر $e = (\circ, ۱)$ همانی جبر $\mathfrak{A}_+$ است. زیرا

$$(x, a)(\circ, ۱) = (x\circ + ۱x, a) = (x, a) = (\circ, ۱)(x, a).$$

تعریف ۲۱.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. جبری که فضای خطی‌اش همان $\mathfrak{A}$ است و عمل ضربش، عکس عمل ضرب $\mathfrak{A}$ است را جبر مقابل $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. به سخن دیگر برای هر $a, b \in \mathfrak{A}$، داریم $a \circ b = ba$، و آن‌را با نماد $\mathfrak{A}^{op}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت فضای باناخ X را یک $\mathfrak{A}$− مدول چپ گوییم، هرگاه نگاشت $\mathfrak{A} \times X \longrightarrow X$: . با دستور $(a, x) = a.x$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $a, b \in \mathfrak{A}$، $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $a(x + y) = ax + ay$ و $(a + b)x = ax + bx$،

(ب) $(ab)x = a(bx)$،

(ج) $a(\alpha x) = (\alpha a)x = \alpha(ax)$.

به‌طور مشابه $\mathfrak{A}$−مدول راست تعریف می‌شود. همچنین X را یک $\mathfrak{A}$−مدول دوطرفه گوییم، هرگاه هم $\mathfrak{A}$−مدول چپ و هم $\mathfrak{A}$−مدول راست باشد، همچنین برای هر $a, b \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$، $(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b)$.

تعریف ۲۳.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر نرم‌دار با نرم $\| \|$ و X یک فضای نرم‌دار با نرم $\| \|'$ باشد. دراین صورت X را $\mathfrak{A}$− مدول چپ نرم‌دار گوییم، هرگاه X یک $\mathfrak{A}$− مدول چپ باشد و عدد مثبت K وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$، $\|ax\|' \leq K\|a\|\|x\|'$. اگر X فضای باناخ باشد آن‌گاه X را $\mathfrak{A}$−مدول چپ باناخ گوییم. به‌طور مشابه $\mathfrak{A}$−مدول راست نرم‌دار و $\mathfrak{A}$−مدول راست باناخ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۴.۲ فرض کنیم X یک $\mathfrak{A}$− مدول چپ نرم دار با فضای دوگان X^* باشد. در این‌صورت X^* با ضرب مدولی داده شده با دستور

$$(fa)(x) = f(ax) \quad (a \in \mathfrak{A}, f \in X^*, x \in X)$$

یک $\mathfrak{A}$−مدول راست باناخ است که$\mathfrak{A}$−مدول راست باناخ دوگان X^* نامیده می‌شود. برابری $\mathfrak{A}$−مدول راست باناخ بودن X^* ساده است، برای نمونه برای هر $x \in X$، داریم

$$\|(fa)(x)\| = \|f(ax)\| \leq \|f\|\|ax\| \leq \|f\|\|a\|\|x\|.$$

پس $\|fa\| \leq \|f\|\|a\|$. به همین روش، هر$\mathfrak{A}$−مدول راست نرم‌دار X، یک $\mathfrak{A}$−مدول‌چپ باناخ دوگان X^* و هر$\mathfrak{A}$−مدول دوطرفه نرم‌دارX، یک $\mathfrak{A}$−مدول دوطرفه باناخ X^* است.

تعریف ۲۵.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. اگر X و Y، $\mathfrak{A}$−مدول‌های چپ باشند، آن‌گاه مجموعه همریختی‌های $\mathfrak{A}$−مدولی خطی و کراندار از X به Y را با ${}_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. همینطور اگر X و Y دو $\mathfrak{A}$−مدول راست باشند آنگاه مجموعه همریختی‌های $\mathfrak{A}$− مدولی خطی و کراندار ازX به Y را با$\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. و اگر X وY، $\mathfrak{A}$−$\mathfrak{A}$−مدول دوطرفه باشند آنگاه آن‌را با${}_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم .

تبصره ۲۶.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$−مدول چپ باناخ باشد. آن‌گاه مجموعه ${}_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}(X,X)$ با جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر و ضرب $(\varphi,\psi)\mapsto\varphi\circ\psi$ برای $\varphi,\psi\in{}_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}(X,X)$ و نرم عملگری یک جبر باناخ است.

تعریف ۲۷.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$ باشد. در این‌صورت

(الف) همانی تقریبی چپ(راست) $\mathfrak{A}$، توری مانند (e_α) در $\mathfrak{A}$ است که به ازای هر $a\in\mathfrak{A}$، $\lim_\alpha e_\alpha\cdot a=a$ ($\lim_\alpha a\cdot e_\alpha=a$).

(ب) همانی تقریبی $\mathfrak{A}$، توری مانند (e_α) در $\mathfrak{A}$ است که همانی تقریبی چپ و راست باشد.

(ج) همانی تقریبی (e_α)، کران‌دار است هرگاه $\sup_\alpha\|e_\alpha\|<\infty$.

تعریف ۲۸.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$−مدول چپ باناخ باشد. اگر $X=\mathfrak{A}.X$، آن‌گاه $\mathfrak{A}$ را بنیادی می‌نامیم.

قضیه ۲۹.۲ (تجزیه‌ی کوهن) فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$−مدول چپ باناخ باشد. در این‌صورت اگر تور $(e_\alpha)_\alpha$ در $\mathfrak{A}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر $x\in X$ داشته باشیم $e_\alpha.x\longrightarrow x$ و $x.e_\alpha\longrightarrow x$، آن‌گاه $X=\mathfrak{A}.X$ و $X=X.\mathfrak{A}$. در حالتی‌که $(e_\alpha)_\alpha$ کران‌دار باشد $\mathfrak{A}.X$ و $X.\mathfrak{A}$ در X بسته هستند.

اثبات. به نتیجه ۱.۱۱ از [۱] رجوع شود. ■

تبصره ۳۰.۲ فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$−مدول چپ باناخ باشد. اگر یک همانی تقریبی کراندار در $\mathfrak{A}$ برای X وجود داشته باشد، آن‌گاه برپایه تجزیه کوهن، X بنیادی است.

۲–۳ پیش نیازهایی از آنالیز هارمونیک

تعریف ۳۱.۲ گروه G را همراه با یک توپولوژی روی مجموعه G به‌گونه‌ای که هر دو نگاشت

$$G \times G \longrightarrow G;\ (x,y) \mapsto xy,$$

$$G \longrightarrow G;\ x \mapsto x^{-1},$$

پیوسته باشند یک گروه توپولوژیک می‌نامیم. گروه توپولوژیک G را گسسته خوانیم هرگاه توپولوژی آن، توپولوژی گسسته باشد.

تعریف ۳۲.۲ فرض کنیم G گروه توپولوژیک و f تابعی روی G باشد و $y \in G$. دراین‌صورت انتقال چپ (راست) f توسط y برای هر $x \in G$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x) \ \ (\ R_y f(x) = f(xy)).$$

تعریف ۳۳.۲ فرض کنیم G گروهی فشرده‌موضعی باشد. μ را یک اندازه‌ی رادون روی G می‌نامیم، در صورتی که

(الف) به ازای هر مجموعه‌ی فشرده مانند K، $\mu(K) < \infty$،

(ب) برای هر مجموعه‌ی باز مانند O، $\mu(O) = \sup\{\mu(K) :$ فشرده $K, K \subseteq O\}$،

(ج) برای هر مجموعه‌ی بورل مانند $E \subseteq G$ داشته باشیم $\mu(E) = \inf\{\mu(O) :$ باز $O, E \subseteq O\}$.

اندازه‌ی رادون μ روی گروه فشرده‌موضعی G را اندازه‌ی هار چپ (راست) روی G می‌نامند، در صورتی که به ازای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از G و هر $x \in G$، $\mu(xE) = \mu(E)$ $\quad$ $(\mu(Ex) = \mu(E))$.

قضیه ۳۴.۲ هر گروه فشرده‌موضعی دارای یک اندازه‌ی هار چپ یکتا است. (یگانگی اندازه‌ی هار به این معنی است که اگر λ اندازه‌ی هار(چپ) و μ اندازه‌ی رادون پایای چپ دیگری باشد، آنگاه عدد ثابت $C > ۰$ وجود دارد که $\mu = C\lambda$).

اثبات. به قضیه ۱۰.۲ از [٦] رجوع شود. ■

تعریف ۳۵.۲ فرض کنیم λ یک اندازه‌ی هار چپ روی G باشد. در این‌صورت λ_x به صورت زیر برای هر مجموعه بورل E،

$$\lambda_x(E) := \lambda(Ex) \qquad (x \in G),$$

یک اندازه‌ی هار چپ است. ولی بنا به یکتایی اندازه‌ی هار چپ، عدد $\Delta(x) > ۰$ وجود دارد که

$$\lambda_x(E) := \Delta(x)\lambda(E).$$

تابع $\Delta = \Delta_G : G \to (۰, \infty)$ را تابع مدولار(پیمانه‌ای) G نامند. در این تعریف اگر ۱ $= \Delta$، آن‌گاه G را تک پیمانه‌ای یا تک مدولی می‌نامند.

گزاره ۳۶.۲ تابع مدولار$\Delta_G : G \to (۰, \infty)$ یک همریختی است. همچنین داریم

$$\int R_y f(x) d\lambda(x) = \Delta(y^{-۱}) \int_G f(x) d\lambda(x).$$

.

اثبات. به قضیه ۲۴.۲ از [۶] رجوع شود. ■

تعریف ۳۷.۲ فرض کنیم λ یک اندازه هار چپ باشد. جبر باناخ تمام توابع مختلط— مقدار بورل اندازه‌پذیر ϕ روی G که نسبت به λ انتگرال‌پذیر هستند، با نرم $\|\varphi\|_۱ = \int_G |\phi| d\lambda$ را جبر گروهی G نامیم و با $L^۱(G)$ نمایش می‌دهیم. ضرب در $L^۱(G)$ به‌نام پیچش که برای $\phi, \psi \in L^۱(G)$ به‌صورت $\phi * \psi(x) = \int_G \phi(xy^{-۱})\psi(y) d\lambda(y)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳۸.۲ فرض کنیم λ یک اندازه هار چپ باشد. جبر باناخ تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط—مقدار روی G و همه‌جا کراندار نسبت به λ که $\|f\| < \infty$، را با $L^\infty(G)$ نمایش می‌دهیم. نرم $\|.\|_\infty$ در $L^\infty(G)$ به صورت $\|f\|_\infty = \inf_M\{M|\lambda\{t||f(t) > M\}) = ۰\}$ تعریف می‌شود. هرگاه G گسسته باشد، $L^۱(G)$ را با $\ell^۱(G)$ و $L^\infty(G)$ را با $\ell^\infty(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۹.۲ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌موضعی باشد. فضای باناخ تمام اندازه‌های رادون مختلط روی G را با $M(G)$ نمایش می‌دهند که در آن برای هر $\mu \in M(G)$ داریم $\|\mu\| = |\mu|(G)$. از قضیه‌ی نمایش ریس داریم $C_۰(G)^* = M(G)$. پس هر عضو از $M(G)$ را می‌توان به عنوان تابعی خطی روی $C_۰(G)$ در نظر گرفت.

تعریف ۴۰.۲ نگاشت $M(G) \times M(G) \longrightarrow M(G)$ با دستور $(\mu,\nu) \longrightarrow \mu * \nu$ برای $\mu,\nu \in M(G)$ را پیچش μ و ν می‌نامیم. داریم

$$\langle f, \mu * \nu\rangle = \int_{G\times G} f d(\mu * \nu) = \int_G \int_G f(xy)\, d\mu(x) d\nu(y) \qquad (x,y \in G, f \in C_\circ(G)).$$

با این تعریف $(M(G),*)$، یک جبرباناخ با عنصر همانی می‌باشد که همانی آن، اندازه‌ی دیراک δ_e است.

می‌دانیم که اگر $f \in L^1(G)$ آن‌گاه $fd\lambda$ عضوی از $M(G)$ است. پس می‌توان $L^1(G)$ را زیرمجموعه‌ای از $M(G)$ گرفت. در حالت کلی $L^1(G)$ ایده‌آلی از $M(G)$ است که به ازای هر $f,g \in L^1(G)$ پیچش g و f به صورت زیر می‌باشد

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\lambda(y).$$

جبر باناخ $(M(G),*)$ را جبر اندازه و جبر باناخ $(L^1(G),*)$ را جبر گروهی گوییم. اگر G گسسته باشد، آن‌گاه $l^1(G) = M(G)$ و به ازای هر $f \in l^1(G)$، $f(x) = \sum_{a\in G} f(a)\delta_a(x)$. همچنین δ_a، اندازه‌ی دیراک در نقطه‌ی a است.

تعریف ۴۱.۲ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌موضعی و E زیرفضایی از $L^\infty(G)$، شامل توابع ثابت باشد. یک میانگین روی E، تابع $m \in E^*$ است که $\langle 1, m\rangle = \|m\| = 1$.

قضیه ۴۲.۲ فرض کنیم G یک گروه‌فشرده‌موضعی و E زیرفضایی از $L^\infty(G)$، شامل توابع ثابت و تحت مزدوج‌گیری مختلط بسته باشد. در این‌صورت برای تابع خطی $m : E \longrightarrow \mathbb{C}$ که $\langle 1, m\rangle = 1$، گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(الف) m یک میانگین روی E است.

(ب) m مثبت است. یعنی به ازای هر $\varphi \in E$ که $\varphi \geq \circ$، $\langle \varphi, m\rangle \geq \circ$.

اثبات. به قضیه ۲.۱.۱ از [۲۳] رجوع شود. ■

تعریف ۴۳.۲ فرض کنیم G یک گروه فشرده‌موضعی و E زیرفضایی از $L^\infty(G)$، شامل توابع ثابت و تحت مزدوج‌گیری مختلط بسته باشد. در این‌صورت

(الف) اگر به ازای هر $\varphi \in E$، $g \in G$ و $\delta_g * \varphi \in E$، آن‌گاه E را پایای‌چپ می‌نامیم.

(ب) اگر E پایای‌چپ باشد، آن‌گاه میانگین m روی E را پایای‌چپ می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $\varphi \in E$، $g \in G$ و $\langle \delta_g * \varphi, m\rangle = \langle \varphi, m\rangle$.

تعریف ۴۴.۲ گروه فشرده‌موضعی G را میانگین‌پذیر می‌نامند، در صورتی که یک میانگین‌پایای چپ روی $L^{\infty}(G)$ موجود باشد.

تعریف ۴۵.۲ مجموعه همه میانگین‌های پایای چپ روی $L^{\infty}(G)$ را بانماد $\mathrm{LIM}(L^{\infty}(G))$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴۶.۲ (الف) فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد. در این صورت G میانگین‌پذیر است. زیرا $L^{\infty}(G) \subset L^{1}(G)$ و اگر m_G را اندازه‌ی هار نرمال شده روی G بگیریم (یعنی $m_G(G) = 1$) و تعریف کنیم

$$\langle \varphi, m \rangle = \int_G \varphi(g) dm_G \qquad (\varphi \in L^{\infty}(G)).$$

در این صورت m یک میانگین پایای چپ است و در نتیجه G، میانگین‌پذیر خواهد بود.

(ب) گروه‌آزاد F_2 میانگین‌پذیر نیست.

اثبات. به قضیه ۶.۵ از [۱] رجوع شود. ■

قضیه ۴۷.۲ اگر G گروه فشرده موضعی و آبلی باشد، آن‌گاه گروه G میانگین‌پذیر است.

اثبات. به قضیه ۲.۱.۱ از [۲۳] رجوع شود. ■

تعریف ۴۸.۲ فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد. در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$P(G) := \{\varphi \in L^{1}(G) : \varphi \geq 0, \|\varphi\|_1 = 1\}.$$

میانگین $m \in L^{\infty}(G)^*$ را پایای چپ توپولوژیک می‌نامیم، هرگاه

$$\langle \varphi * f, m \rangle = \langle f, m \rangle \quad , (f \in L^{\infty}(G), \varphi \in P(G)).$$

تعریف ۴۹.۲ مجموعه همه میانگین های پایای چپ توپولوژیک روی $L^{\infty}(G)$ را با $\mathrm{TLIM}(L^{\infty}(G))$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۵۰.۲ هر میانگین پایای چپ توپولوژیک روی گروه فشرده موضعی، میانگین پایای چپ است. به‌سخن دیگر $\mathrm{TLIM}(L^{\infty}(G)) \subseteq \mathrm{LIM}(L^{\infty}(G))$.