بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

تشخیص‌پذیری برخی از گروه‌های خطی خاص تصویری به وسیله مرتبه عناصر

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی‌زاده

استاد مشاور:

دکتر ندا آهنجیده

توسط:

سید سعید خشت زر

آذر ۱۳۹۰

چکیده. فرض کنیم G یک گروه متناهی و $\omega(G)$ مجموعه‌ی مرتبه‌ی عناصر G باشد. $\mathrm{h}(\omega(\mathrm{G}))$ را تعداد کلاس‌های یکریختی از گروه‌های متناهی H نمایش می‌دهیم که $\omega(G) = \omega(H)$. به منظور بدست آوردن شناخت کلی برای تشخیص پذیری گروه‌های خطی خاص تصویری به وسیله‌ی مرتبه‌ی عناصر، این گروه‌ها در ابعاد پایین مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در مطالعه‌ی این پایان نامه نشان می‌دهیم که برای $\mathrm{G} = \mathrm{PSL}(۳, q)$ که $q = ۱۱, ۱۳, ۱۹, ۲۳, ۲۵, ۲۷$، $\mathrm{h}(\omega(\mathrm{G})) = ۱$. و برای $q = ۱۷, ۲۹$، $\mathrm{h}(\omega(\mathrm{G})) = ۲$. در حالت خاص نشان می‌دهیم که به وسیله‌ی مرتبه عناصر، گروه $\mathrm{PSL}(۵, ۴)$ شبه تشخیص‌پذیر است و گروه $\mathrm{PSL}(۷, ۴)$ تشخیص‌پذیر است.

کلمات کلیدی. شبه تشخیص‌پذیری – تشخیص‌پذیری – گراف اول.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه‌ی اعداد صحیح به پیمانه n	$\mathbb{Z}_n$
مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$	$M_n(R)$
گروه خطی عام	$\mathrm{GL_n(R)}$
گروه خطی خاص	$\mathrm{SL_n(R)}$
گروه خطی خاص تصویری	$\mathrm{PSL_n(R)}$
گروه متقارن از درجه ۳	$\mathbb{S}_۳$
علامت زیرگروه	$\leq$
دترمینان ماتریس A	detA
اشتراک	$\bigcap$
مرکزساز S در G	$C_G(S)$
اجتماع	$\bigcup$
شمول	$\subseteq$
علامت بینهایت	∞
علامت زیرگروه تولید شده	$<>$
گروه خودریختی	$\mathrm{Aut(G)}$
علامت زیرگروه نرمال	$\trianglelefteq$
گروه خارج‌قسمتی	G/N
اگر وتنها اگر	$\Leftrightarrow$
رادیکال حل‌پذیر	$O_\infty(G)$

یکریختی	$\cong$
گروه تقارن مجموعه Ω	$\mathbb{S}_\Omega$
گروه متقارن درجه n	$\mathbb{S}_n$
گروه متناوب درجه n	$\mathbb{A}_n$
جابه‌جا گر x و y	$[x,y]=x^{-۱}y^{-۱}xy$
زیر گروه جابه‌جاگر (مشتق)	G'
مدار شامل ω	ω^G
پایدارساز ω	G_ω
خودریختی‌های خارجی	$\mathrm{Out(G)}$
مجموعه‌ی تمام سیلو $p-$ زیر گروه‌های G	$\mathrm{Syl_p(G)}$
عضو iام سری مرکزی پایینی	$G^i=[G^{i-۱},G]$
زیر گروه فیتینگ	$F(G)$
مشتق $i-$ام	$G^{(i)}$
معادل	$\equiv$

پیشگفتار

در نظریه‌ی پیشرفته‌ی گروه‌های متناهی بسیاری از ریاضی‌دانان متمایل به مطالعه در مورد تشخیص‌پذیری گروه‌ها شدند به این صورت که ویژگی خاصی از یک گروه را مد نظر قرار می‌دهند و گروه‌هایی را که دارای چنین ویژگی هستند در حد یکریختی رده‌بندی می‌کنند. از چنین ویژگی‌هایی می‌توان به مرتبه عناصر گروه اشاره کرد. همچنین تشخیص‌پذیری و شبه تشخیص‌پذیری به وسیله ویژگی دیگری از گروه مثل گراف اول نیز قابل بررسی است. ثابت شده است که گروهی که به وسیله‌ی گراف اولش تشخیص‌پذیر به وسیله‌ی مرتبه‌ی عناصر نیز تشخیص‌پذیر است در حالی که عکس این موضوع همیشه برقرار نیست. هدف از مطالعه‌ی این پایان نامه بررسی تشخیص‌پذیری و شبه تشخیص‌پذیری برخی از گروه‌های ساده متناهی نوع لی می‌باشد. در فصل اول مقدمه‌ای بر گروه‌های متناهی ذکر کرده‌ایم که در واقع پیش‌نیازی برای اثبات قضایای اصلی می‌باشد در فصل دوم رده‌بندی گروه‌های ساده‌ی متناهی را آورده‌ایم در واقع در این فصل بیشتر بر مرتبه‌ی گروه‌های ساده‌ی نوع لی و پراکنده تأکید داریم. در فصل سوم تشخیص‌پذیری گروه ساده‌ی $\mathrm{PSL}(۳,q)$ برای q خاص را بررسی خواهیم کرد در واقع نشان خواهیم داد که گروه $\mathrm{PSL}(۳,q)$ برای $q = ۱۱,۱۳,۱۹,۲۳,۲۵,۲۷$ گروهی تشخیص‌پذیر و برای $q = ۱۷,۲۹$ گروهی $۲-$ تشخیص‌پذیر است و در پایان در فصل ۴، تشخیص‌پذیری گروه $\mathrm{PSL}(۷,۴)$ و شبه تشخیص‌پذیری $\mathrm{PSL}(۵,۴)$ را بررسی خواهیم کرد. لازم به ذکر است که بیشتر مطالب فصل ۳ و ۴ به ترتیب برگرفته از منابع [۷]، [۹]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴] و [۱۸] می‌باشد.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر گروه‌های متناهی

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز فصل‌های اصلی پایان‌نامه آورده شده است. اکثر مطالب این فصل برگرفته از منابع [۲۰] و [۲۱] می باشد. در این فصل مروری بر گروه جایگشتی، قضایای سیلو، گروه‌های پوچتوان و حل‌پذیر و گروه‌های فروبنیوس را خواهیم داشت.

۱.۱ گروه جایگشتی

از آنجایی که در بخش‌های بعدی از مفاهیمی در نظریه گروه‌های جایگشتی استفاده می‌کنیم پس در این بخش تعدادی از لم‌ها و قضایای مربوط به این مفاهیم را ارائه خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم Ω یک مجموعه است. در این صورت هر زیرگروه $\mathbb{S}_\Omega$ یک گروه جایگشتی نامیده می‌شود. اگر G گروه باشد، آن‌گاه هر همریختی $\rho : G \to \mathbb{S}_\Omega$ یک نمایش جایگشتی G نامیده می‌شود. در حالتی که ρ یک به یک باشد آن را نمایش باوفا می‌نامیم. اگر $|\Omega| = n$ عددی متناهی باشد، آن گاه n را درجه نمایش می‌نامیم. با استفاده از تعریف بالا دیده می‌شود اگر ρ نمایش جایگشتی باوفا باشد، آن‌گاه G با یک گروه جایگشتی روی Ω یکریخت است. اگر G یک گروه جایگشتی باشد یعنی $G \leq \mathbb{S}_\Omega$، آن‌گاه نمایش شمول $G \to \mathbb{S}_\Omega$ یک نمایش جایگشتی برای G است.

تعریف ۲.۱.۱ گوییم گروه G بر مجموعه Ω عمل می‌کند هرگاه نگاشت:

$$\Omega \times G \to \Omega$$

$$(\omega, g) \mapsto \omega^g \ , \ \forall\, \omega \in \Omega \ , \ \forall\, g \in G$$

وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

(الف) برای هر $\omega \in \Omega$، $\omega^1 = \omega$؛

(ب) برای هر $\omega \in \Omega$ و هر $g, h \in G$، $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$.

که ۱ عضو خنثی گروه است و $\omega^1 = \omega$ به این معناست که اثر عضو خنثی بر هر عضو Ω تغییری در آن عضو ایجاد نمی‌کند.

لم ۱.۱.۱ فرض کنیم G بر مجموعه Ω عمل می‌کند. در این صورت همریختی

$$\varphi : G \to \mathbb{S}_G$$

$$g \longmapsto \varphi_g$$

وجود دارد. یعنی φ یک نمایش جایگشتی برای G است که آن را نمایش حاصل از عمل می‌نامیم.

برهان. [۲۱]. □

تعریف ۳.۱.۱ هسته همریختی بالا هسته عمل G بر Ω نامیده می‌شود که آن را با N نمایش می دهیم:

$$N = Ker\varphi = \{g \in G \mid \omega^g = \omega, \forall\ \omega \in \Omega\}$$

اگر $N = ۱$ گروه بدیهی باشد، آن‌گاه عمل G بر Ω باوفا نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم گروه G روی مجموعه Ω عمل می کند. اگر $\Delta \subseteq \Omega$ و $H \leq G$ باشد، آن‌گاه Δ^H چنین تعریف می‌شود:

$$\Delta^H = \{\delta^h \mid \delta \in \Delta,\ h \in H\}$$

اگر $\Delta^H \subseteq \Delta$، آن‌گاه گوییم Δ تحت H پایاست. در این حالت H روی Δ عمل می‌کند. واضح است که Δ^H زیر مجموعه‌ای از Ω است. اگر $\omega \in \Omega$ باشد، آن‌گاه ω^G را مدار شامل ω می‌نامیم. در حالت $\omega^G = \Omega$ گوییم G روی Ω انتقالی عمل می‌کند.

لم ۲.۱.۱ فرض کنیم G روی مجموعه Ω عمل می‌کند. در این صورت:

(الف) G روی هر مدار انتقالی عمل می‌کند؛

(ب) اگر $\omega \in \Omega$ و $\delta \in \omega^G$، آن‌گاه $\delta^G = \omega^G$؛

(پ) فرض کنیم $\emptyset \neq \Delta \subseteq \Omega$ تحت G پایاست. در این صورت Δ مداری برای G است اگر و تنها اگر

به ازای $\delta_۱, \delta_۲ \in \Delta$ عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $\delta_۲ = \delta_۱^g$؛

(ت) مجموعه مدارهای G روی Ω افرازی برای Ω تشکیل می‌دهند.

برهان. (الف) فرض کنیم ω^G مداری برای G است. اگر $\omega^g \in \omega^G$ و $x \in G$، آن‌گاه $(\omega^g)^x = \omega^{gx} \in \omega^G$ و این نشان می‌دهد که G روی ω^G عمل می‌کند. چون $\omega \in \omega^G$ بنا به تعریف G روی ω^G انتقالی عمل می‌کند.

(ب) اگر $\delta \in \omega^G$، آن‌گاه $\delta = \omega^g$ که $g \in G$ و

$$\delta^G = \{\delta^x \mid x \in G\} = \{\omega^{gx} \mid x \in G\} = \omega^G.$$

(پ) اگر Δ مداری برای G باشد، آن‌گاه به ازای $\omega \in \Omega$ ای $\Delta = \omega^G$. بنابراین برای $\delta_۱, \delta_۲ \in \Delta$ می‌توان نوشت $\delta_۱ = \omega^{g_۱}$ و $\delta_۲ = \omega^{g_۲}$ که $g_۱, g_۲ \in G$. اگر قرار دهیم $g = g_۱^{-۱} g_۲$ آن‌گاه:

$$\delta_۱^g = (\omega^{g_۱})^g = \omega^{g_۱ g} = \omega^{g_۲} = \delta_۲.$$

برعکس فرض کنیم به ازای هر $\delta_۱, \delta_۲ \in \Delta$ عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $\delta_۲ = \delta_۱^g$. فرض کنیم $\omega \in \Delta$ و مجموعهٔ ω^G را در نظر بگیریم. چون Δ تحت G پایا فرض شده پس $\omega^G \subseteq \Delta$. از طرف دیگر اگر $\delta \in \Delta$، آن‌گاه بنا به فرض به ازای $g \in G$ ای، $\delta = \omega^G$. بنابراین $\delta \in \omega^G$ و این نشان می‌دهد که $\Delta \subseteq \omega^G$. پس $\Delta = \omega^G$ و حکم ثابت می‌شود.

(ت) چون مدار ω^G شامل ω است، پس $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega^G$. اگر $\omega_۱^G$ و $\omega_۲^G$ دو مدار باشند و $\omega_۱^G \bigcap \omega_۲^G \neq \emptyset$، آن‌گاه:

$$\exists\, g, h \in G \; s.t \; \omega_۱^g = \omega_۲^h \;\; \Rightarrow \;\; \omega_۱^{gh^{-۱}} = \omega_۲ \;\; \Rightarrow \;\; \omega_۲ \in \omega_۱^G$$

در نتیجه بنابر (ب) داریم $\omega_۱^G = \omega_۲^G$ و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

مثال ۱.۱.۱ **(الف)** $\mathbb{S}_n$ روی مجموعه $\Omega = \{۱,۲,۳,\cdots,n\}$ انتقالی عمل می‌کند.
(ب) گروه چهارتایی کلاین $V = \{(۱),(۱\ ۲),(۳\ ۴),(۱\ ۲)(۳\ ۴)\}$ روی مجموعه $\Omega = \{۱,۲,۳,۴\}$ عمل می‌کند. مدار شامل ۱ عبارت است از:

$$۱^V = \{۱^g \mid g \in V\} = \{۱,۲\}$$

و به طور مشابه مدار شامل ۳ مجموعه‌ی $\{۳,۴\}$ است. لذا با توجه به لم ۷.۱ قسمت (ب)، V روی Ω دارای دو مدار است از این رو انتقالی نیست.

لم ۳.۱.۱ فرض کنیم G روی Ω عمل می‌کند و $\omega \in \Omega$. در این صورت

$$G_\omega = \{g \in G \mid \omega^g = \omega\}$$

زیر گروهی ازG است که پایدارساز ω تحت G نامیده شده است.

برهان. [۲۱]. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید Ω یک مجموعه و G یک گروه باشد به طوری که G روی Ω عمل می‌کند در این صورت زیر مجموعه Δ از Ω یک بلوک نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $\Delta^g = \Delta$ یا $\Delta^g \bigcap \Delta = \emptyset$ ($\Delta^g = \{\delta^g \mid \delta \in \Delta\}$).
تذکر: اگر G روی Ω عمل کند بدیهی است که Ω و زیر مجموعه‌های تک عضوی Ω بلوک‌های بدیهی برای این عمل هستند.

تعریف ٦.۱.۱ فرض کنید G روی Ω به طور انتقالی عمل کند. گوییم G یک گروه جایگشتی اولیه است اگر و تنها اگر بلوک‌هایش بدیهی باشند. در غیر این صورت گوییم عمل غیر اولیه است و G را

گروه جایگشتی غیر اولیه گوییم.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم عمل G روی Δ غیر اولیه و Δ یک بلوک غیر اولیه است و قرار دهید $H = \{g \in G \mid \Delta^g = \Delta\}$. فرض کنیم R یک مجموعه مورب راست H در G است. در این صورت:

(الف) $\{\Delta^x,\ x \in R\}$ افرازی برای Ω است؛

(ب) اگر $|\Omega| < \infty$، آن‌گاه $|\Delta| \mid |\Omega|$؛

(ج) H روی Δ انتقالی عمل می‌کند.

برهان. [۲۰]. □

لم ۴.۱.۱ اگر G روی Ω عمل کند و β یک بلوک باشد، آن‌گاه β^g برای هر $g \in G$ نیز یک بلوک است.

برهان. [۲۰]. □

تعریف ۷.۱.۱ اگر G روی Ω عمل کند و β یک بلوک باشد آن‌گاه بنا به لم قبل β^g برای هر $g \in G$ نیز یک بلوک است. همچنین طبق قضیه ۱.۱.۱، $R \subseteq G$ وجود دارد به قسمی که $\{\Delta^x,\ x \in R\}$، افرازی از Ω باشد. در این صورت $\{\Delta^x,\ x \in R\}$، را یک دستگاه اولیه برای G روی Ω می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم G روی Ω عمل می‌کند و $k \in \mathbb{N}$ به طوری که $k < |\Omega|$. در این صورت گوییم G روی Ω، $k-$ انتقالی عمل می‌کند هرگاه به ازای هر دو $k-$ تایی $(x_1, \cdots, x_k) \in \Omega^k$ و $(y_1, \cdots, y_k) \in \Omega^k$، $x_i \neq x_j$ و $y_i \neq y_j$، $1 \leq i, j \leq k$، عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر i، $1 \leq i \leq k$، $y_i = x_i^g$.

لم ۵.۱.۱ هر گروه جایگشتی ۲− انتقالی اولیه است.

برهان. فرض کنیم G روی Ω به صورت ۲− انتقالی غیر اولیه عمل کند. در این صورت بلوک غیر اولیه Δ وجود دارد و بنابراین $\Omega \neq \Delta$ و $|\Delta| > 1$. فرض کنیم $a,b \in \Delta$ و $a \neq b$. همچنین بنا به فرض، $c \in \Omega$ وجود دارد، به طوری که $c \notin \Delta$. چون G ۲− انتقالی است، پس $g \in G$ وجود دارد به طوری که $(a,b)^g = (a,c)$ و در نتیجه $a^g = a$ و $b^g = c$. بنابراین $a \in \Delta \bigcap \Delta^g$ که از آن نتیجه می‌گیریم $\Delta \bigcap \Delta^g \neq \emptyset$. اکنون چون Δ یک بلوک فرض شده است خواهیم داشت $\Delta = \Delta^g$. اما $c = b^g \in \Delta^g = \Delta$ که این یک متناقض با $c \notin \Delta$ است. بنابراین G باید اولیه باشد. $\square$

تعریف ۹.۱.۱ (عمل بدون نقطه ثابت). گوییم گروه عملگر A بدون نقطه ثابت روی گروه G عمل می‌کند هرگاه $C_G(A) = 1$. به طور مشابه عنصر $a \in A$ بدون نقطه ثابت روی گروه G عمل می‌کند هرگاه $C_G(a) = 1$.

تعریف ۱۰.۱.۱ (۱) فرض کنیم $1 \neq \alpha \in \mathrm{Aut(G)}$. گوییم α یک خودریختی بدون نقطه ثابت است، هرگاه برای هر $1 \neq g \in G$، $g^\alpha \neq g$ باشد به عبارت دیگر $C_G(\alpha) = 1$.

(۲) فرض کنیم $H \leq \mathrm{Aut(G)}$. گوییم H بدون نقطه ثابت است، هرگاه هر $1 \neq \alpha \in H$ بدون نقطه ثابت روی G عمل کند.

۲.۱ قضایای سیلو

قضیه لاگرانژ بیان می‌دارد که مرتبه هر زیرگروه از گروه متناهی G، مرتبه G را عاد می‌کند. اما نشان داده شده است که همیشه عکس قضیه لاگرانژ برقرار نیست. ولی اگر p یک عدد اول باشد و $p^k \mid |G|$، آن‌گاه ثابت می‌شود که G دارای زیرگروه مرتبه p^k است. این خاصیت مهم گروه‌های متناهی برای اولین بار توسط ریاضی‌دان نروژی، سیلو، در مورد گروه‌های جایگشتی ثابت شد. اما بعدها این قضیه در مورد گروه‌های متناهی مجرد توسط فروبنیوس اثبات شد.

گر چه سیلو وجود زیرگروه‌های مرتبه p^k را که k بزرگترین عدد صحیح مثبتی است که p^k مرتبه G را عاد می‌کند، در G ثابت کرد، اما قضایای دیگر در مورد تعداد چنین زیرگروه‌ها و مزدوج بودن آن‌ها توسط سایر ریاضی‌دانان ثابت شد که به طور کلی از آن‌ها به قضایای اول، دوم و سوم سیلو نام برده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم p یک عدد اول است. گروه متناهی G یک $p-$ گروه نامیده می‌شود هرگاه مرتبه G توانی از p باشد.

لازم به توضیح است هر زیرگروه و هر گروه خارج قسمتی یک $p-$ گروه، $p-$ گروه است.

گزاره ۱.۲.۱ مرکز هر $p-$ گروه، نابدیهی است. به طور کلی اگر G یک $p-$ گروه و N زیر گروه نرمال و نابدیهی G باشد، آن‌گاه $N \bigcap Z(G)$ نابدیهی است.

برهان. [۲۱]. □

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی است و p یک مقسوم‌علیه اول G است. می‌توان نوشت $|G| = p^n m$ که m و n اعداد طبیعی‌اند به طوری که $(p,m) = ۱$. در این حالت هر زیرگروه G

از مرتبه p^n یک سیلو $p-$ زیرگروه G نامیده می‌شود. مجموعه تمام سیلو $p-$ زیرگروه‌های G را با $\mathrm{Syl_p}(G)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی است و $p|\ |G|$. فرض کنید P یک سیلو $p-$ زیرگروه G است. در این صورت به ازای هر زیرگروه H از G عنصر $x \in G$ وجود دارد به گونه‌ای که $H \bigcap P^x$ یک سیلو $p-$ زیرگروه H باشد.

برهان. [۲۱]. □

قضیه ۱.۲.۱ **قضیه اول سیلو.** فرض کنیم G یک گروه متناهی و $p|\ |G|$ یک عدد اول است. در این صورت G دارای سیلو $p-$ زیرگروه است.

برهان. [۲۱]. □

قضیه ۲.۲.۱ **قضیه دوم سیلو.** اگر G یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه هر دو سیلو $p-$ زیرگروه متناهی G در G مزدوج‌اند به علاوه هر $p-$ زیرگروه G مشمول در یک سیلو $p-$ زیرگروه است.

برهان. فرض کنیم P یک سیلو $p-$ زیرگروه G است و Q یک $p-$ زیرگروه G باشد. بنا به لم ۱.۲.۱، عنصر $x \in G$ وجود دارد به گونه‌ای که $Q \bigcap P^x$ یک سیلو $p-$ زیرگروه Q باشد. چون Q خود یک $p-$ گروه است، پس

$$Q \bigcap P^x = Q \Rightarrow Q \subseteq P^x$$

چون $|P| = |P^x|$، پس P^x یک سیلو $p-$ زیرگروه G است. از اینرو ثابت می‌شود هر $p-$ زیرگروه G مشمول در یک سیلو $p-$ زیرگروه G است. در حالت خاص اگر Q یک سیلو $p-$ زیرگروه G باشد،

آن‌گاه از برابری مرتبه‌های Q و P^x نتیجه می‌شود $Q = P^x$ که ثابت می‌کند هر دو سیلو $p-$ زیرگروه G در G مزدوج‌اند. □

لم ۲.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی است و p عددی اول است، به طوری که $p \mid |G|$. فرض کنیم P یک سیلو $p-$ زیرگروه G است. در این صورت $P \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر P تنها سیلو $p-$ زیرگروه G باشد.

برهان. فرض کنیم $x \in G$. در این صورت P^x نیز یک سیلو $p-$ زیرگروه G است. بنا به قضیه دوم سیلو تمام سیلو $p-$ زیرگروه‌های G مزدوج‌اند. بنابراین P منحصر به‌فرد است اگر و تنها اگر $P^x = P$ نتیجه می‌دهد $P \trianglelefteq G$ و برعکس. □

قضیه ۳.۲.۱ **قضیه سوم سیلو.** تعداد سیلو $p-$ زیرگروه‌های گروه متناهی G مقسوم‌علیه اولی از مرتبه G است و تعدادشان به پیمانه p همنهشت با یک است.

برهان. [۲۱]. □

۳.۱ سری زیر نرمال

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم G یک گروه است. یک سری زیر نرمال برای G عبارت است از زنجیری از زیر گروه‌های زیر:

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq G_۲ \leq \cdots \leq G_n = G,$$

به طوری که $G_{i-۱} \trianglelefteq G_i$ برای هر $۱ \leq i \leq n$، برقرار باشد.
در این حالت گروه خارج قسمتی $G_i/G_{i-۱}$، $۱ \leq i \leq n$ را عوامل سری زیر نرمال بالا می‌نامیم. چنان چه برای هر i داشته باشیم $G_i \trianglelefteq G$، آن‌گاه سری زیر نرمال بالا یک سری نرمال نامیده می‌شود به طوری که $G_{i-۱} \trianglelefteq G_i$ برای هر $۱ \leq i \leq n$، برقرار باشد.

مثال ۱.۳.۱ برای هر گروه G، سری $۱ = G_۰ \trianglelefteq G$ یک سری نرمال است. به عنوان مثال دیگر گروه متقارن $\mathbb{S}_۴$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$W = \{(۱), (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}.$$

می‌دانیم $W \trianglelefteq \mathbb{S}_۴$. سری زیر

$$۱ = G_۰ \leq \{(۱), (۱\ ۲)(۳\ ۴)\} = G_۱ \leq W = G_۲ \leq \mathbb{S}_۴ = G_۳$$

یک سری زیر نرمال برای $\mathbb{S}_۴$ است که سری نرمال نمی‌باشد.

تعریف ۲.۳.۱ **توسیع گروه.** فرض کنیم گروه‌های N و H داده شده‌اند. گروه G را یک توسیع N توسط H می‌نامیم هرگاهG دارای زیرگروه نرمال M یکریخت با N باشد به طوری که $G/M \cong H$.