بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان:

گشتاورهای طیفی گراف‌ها

استاد راهنما:

پروفسور سید علی‌رضا اشرفی

استاد مشاور:

دکتر غلامحسین فتح‌تبار

توسط :

فاطمه تقوایی آرانی

بهمن ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو: فاطمه تقوایی آرانی

شماره دانشجویی: ۸۹۱۱۵۲۰۰۰۱

رشته: ریاضی گرایش جبر   دانشکده: علوم ریاضی

عنوان پایان‌نامه: "گشتاورهای طیفی گراف‌ها"

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارائه می‌گردد. دفاع از پایان نامه در تاریخ ۹۱/۱۱/۰۹ مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و

با نمره به عدد: ۲۰ به حروف: بیست تمام و درجه عالی به تصویب رسید.

اعضاء هیأت داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما:	پروفسور سید علی‌رضا اشرفی	استاد	
۲. استاد مشاور:	دکتر غلامحسین فتح تبار	استادیار	
۳. متخصص و صاحب نظر داخل دانشگاه	دکتر رضا کهکشانی	استادیار	
۴. متخصص و صاحب نظر خارج دانشگاه:	دکتر مجتبی قربانی	استادیار	
۵. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر سید ابوالقاسم کاهانی	استادیار	

منصورنیا
مدیر تحصیلات تکمیلی

آدرس کاشان - بلوار قطب راوندی
کد پستی ۵۱۱۶۷ - ۸۷۳۱۷
تلفن ۵۵۵۲۹۳۵ - دورنگار ۵۵۵۲۹۳۵
http: www.kashanu.ac.ir

تقدیم

به روح پاک پدرم،

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی ایستادگی را تجربه نمایم؛

و به مادرم،

دریای بی‌کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر.

سپاس

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. شکر خداوند متعال را به جای آورده که توفیق نصیب من کرد تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از استاد گرامیم جناب آقای **پروفسور سید علی‌رضا اشرفی** که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده است، صمیمانه سپاسگزارم چرا که بدون راهنمایی‌های ایشان تأمین این پایان‌نامه بسیار مشکل می‌نمود. از استاد مشاورم جناب آقای دکتر غلامحسین فتح‌تبار که همواره اینجانب را مورد تفقد قرار می‌دهند تشکر می‌کنم. از جناب آقایان دکتر مجتبی قربانی و دکتر رضا کهکشانی که این پایان‌نامه را مطالعه و داوری فرمودند، کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر سید ابوالقاسم کاهانی نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت فرمودند، سپاسگزارم. در پایان از خانواده عزیزم که در تمام مراحل تحصیل و نیز تدوین این پایان‌نامه همواره آرامش روحی و فکری را برایم فراهم نموده‌اند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

فاطمه تقوایی آرانی

بهمن ۱۳۹۱

چکیده

مطالعه گشتاورهای طیفی یک گراف یکی از مباحث اصلی و کلاسیک در نظریه جبری گراف است. شروع مطالعات در زمینه گشتاور طیفی یک گراف، به مسائلی از سوِتکویچ و رولینسون در سال ۱۹۸۷ باز می‌گردد و کاربردهای متنوعی از این مطالعات را می‌توان در مقالاتی که اخیراً به چاپ رسیده است ملاحظه کرد. در این تحقیق به مطالعه ریاضی گشتاورهای طیفی می‌پردازیم. یکی از اهداف این پایان‌نامه، ارائه ماکسیمم و ماکسیمم دوم گراف‌ها از مجموعه همه گراف‌های شبه‌درخت از مرتبه n، براساس گشتاورهای طیفی آن‌ها است. همچنین در این تحقیق با استفاده از گشتاورهای طیفی گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته و گشتاورهای طیفی $I-$گراف‌ها از مرتبه $۲n$، این دو دسته از گراف‌ها را مرتب می‌کنیم. مرتب کردن گراف‌های نِسِر-جانسون و $q-$نِسِر-گراسمن براساس گشتاور طیفی آن‌ها نیز یکی دیگر از اهداف این پایان‌نامه است.

کلمات کلیدی:

گشتاور طیفی، درخت، گراف شبه‌درخت، گراف پترسن تعمیم‌یافته، $I-$گراف، گراف نسر، گراف جانسون، گراف گراسمن و گراف $q-$نسر.

رده‌بندی موضوعی AMS: ۱۵A۱۸، ۰۵C۵۰.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

فهرست نمادها

گراف نسر .... $K(n,k)$

گراف دوبخشی کامل با $r+s$ رأس .... $K_{r,s}$

گراف کامل با n رأس .... K_n

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b .... $lcm(a,b)$

اولین شاخص زاگرب گراف G .... $M_1(G)$

مجموعه همسایگی رأس v .... $N_G(v)$

مسیر از مرتبه n .... P_n

گراف $q-$نسر .... $qK(n,k)$

$k-$امین گشتاور طیفی G .... $S_k(G)$

گراف ستاره با n رأس .... S_n

گراف ستاره با اتصال یک برگ به یک برگ از آن .... S_n^*

طیف گراف G .... $Spec(G)$

تعداد مثلث‌های گراف G .... $t(G)$

$n-$امین چندجمله‌ای چبیشف نوع اول .... T_n

گرافی که از اتصال یک برگ به یک رأس از C_{n-1} به‌دست می‌آید .... U_n

مجموعه رئوس گراف G .... $V(G)$

تعداد رئوس گراف G .... $|V(G)|$

فضای برداری n بعدی روی میدان گالوا .... $V_n(q)$

چندجمله‌ای مشخصه گراف G .... $\chi(G;x)$

تعداد $F-$زیرگراف‌های G .... $\phi_G(F)$

مقدمه

مقادیر ویژه یک گراف که همان مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن است نقش مهمی در مطالعه ساختار یک گراف دارد. فرض کنید G یک گراف با n رأس است و λ_i، $1 \leq i \leq n$، مقادیر ویژه آن هستند. گشتاور طیفی G که به صورت $S_k(G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k(G)$، $k \geq 0$، تعریف می‌شود، یکی از مهمترین موارد کاربرد مقادیر ویژه یک گراف است. در سال ۱۹۸۷ سِوِتکویچ و رولینسون، همه درخت‌ها از مرتبه n را بررسی کرده‌اند و با استفاده از گشتاورهای طیفی، اولین و آخرین گراف از مجموعه همه درخت‌ها از مرتبه n را مشخص نموده‌اند.

هدف از این پایان‌نامه، محاسبه گشتاورهای طیفی چند گراف و مرتب کردن برخی از گراف‌ها براساس گشتاور طیفی است. این تحقیق بر اساس چهار فصل تدوین یافته است. فصل اول این پایان‌نامه شامل دو بخش است. در بخش اول مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شود را لحاظ کرده‌ایم و در بخش دوم به معرفی چندگراف منظم می‌پردازیم. در این فصل از مراجع [۲، ۴، ۵] استفاده می‌کنیم.

فصل دوم که به عنوان گشتاورهای طیفی گراف‌های شبه‌درخت نام‌گذاری شده است، شامل سه بخش است. در بخش اول، تعاریف اولیه در زمینه گشتاور طیفی گراف‌ها را بیان کرده و به معرفی چند گراف شبه‌درخت می‌پردازیم و در بخش دوم این فصل، ماکسیمم گراف‌ها از مجموعه گراف‌های شبه‌درخت را ارائه می‌نماییم. در بخش سوم، به معرفی ماکسیمم دوم گراف‌ها از مجموعه گراف‌های مذکور می‌پردازیم. در این فصل از مراجع [۹، ۲۱، ۲۲، ۲۷] استفاده می‌کنیم.

فصل سوم شامل سه بخش است. در بخش اول این فصل که حاصل کار نویسنده است، با روشی مشابه آن‌چه که در مرجع [۱۳] برای یافتن مقادیر ویژه گراف پترسن تعمیم‌یافته استفاده شده است، مقادیر ویژه گراف‌های $I(n, j, k)$ را به‌طور کامل بیان می‌کنیم. در بخش دوم مقادیر ویژه گراف پترسن تعمیم‌یافته را ارائه می‌نماییم تا مقدمه‌ای برای یافتن گشتاورهای طیفی این دو دسته از گراف‌ها را در فصل آخر فراهم کنیم. در این بخش از مراجع [۱۳، ۲۴] استفاده شده است. در بخش سوم که از مراجع [۱۲، ۱۹] استفاده شده است، مقادیر ویژه گراف $qK(n, k)$ را معرفی می‌نماییم.

فصل پایانی این تحقیق که حاصل کار نویسنده است، شامل سه بخش است. در بخش اول ابتدا فرمول‌هایی برای گشتاورهای طیفی گراف پترسن تعمیم یافته ارائه می‌نماییم و سپس به مرتب کردن این دسته از گراف‌ها بر اساس گشتاورهای طیفی می‌پردازیم. در بخش دوم، به مرتب کردن گراف‌های نسر–جانسون و گراف‌های $q-$نسر–گراسمن بر اساس گشتاور طیفی آن‌ها می‌پردازیم. در بخش پایانی این فصل برخی از گشتاورهای طیفی گراف‌های $I(n, j, k)$ را ارائه کرده و با استفاده از این گشتاورها، این دسته از گراف‌ها را مرتب می‌کنیم. در این فصل از مراجع [۳، ۱۲، ۲۵، ۲۶] استفاده می‌کنیم.

فصل ۱
مقدمات و پیش‌نیازها

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول این فصل مفاهیم مقدماتی را که در سراسر این تحقیق به کار رفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم و در بخش دوم به معرفی برخی از گراف‌های منظم می‌پردازیم. قضایایی که گاهی به آن‌ها استناد می‌شود، در این فصل آورده شده‌اند که بیشتر آن‌ها را اثبات کرده‌ایم و برای بقیه، مرجعی مناسب معرفی کرده‌ایم که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن، اثبات قضیه را مشاهده کند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

یک **گراف** G، عبارت است از سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ شامل یک مجموعه $V(G)$ از رئوس و یک مجموعه $E(G)$، مجزا از $V(G)$، از یال‌ها، به همراه تابع وقوع ψ_G که به هر یال G یک زوج نامرتب از رأس‌های G را نظیر می‌کند. اگر e یک یال و u و v دو رأس باشند به طوری‌که $\psi_G(e) = uv$، در این‌صورت گفته می‌شود که، e رأس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است و رأس‌های u و v دو سر یال e نامیده می‌شوند.

دو رأس u و v از گراف G، **مجاور** یا همسایه‌اند اگر uv یک یال G باشد و دو یال $e \neq f$ مجاورند اگر یکی از رئوس انتهایی آن‌ها مشترک باشد. یک یال با دو انتهای یکسان، **طوقه** و با دو انتهای مجزا، **پیوند** نامیده می‌شود. دو یا چند پیوند با جفت رئوس انتهایی یکسان را **یال‌های موازی**

می‌نامند. یک گراف را **متناهی** نامند هرگاه مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های آن متناهی باشند.

گراف بدون طوقه و یال‌های موازی، **ساده** نامیده می‌شود. **مرتبه** یک گراف را تعداد اعضای مجموعه رأس‌ها و **اندازه** گراف را تعداد اعضای مجموعه یال‌ها تعریف می‌کنند و با $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نمایش می‌دهند. اغلب از n و m به جای مرتبه و اندازه G استفاده می‌شود. گراف با مرتبه ۰ یا ۱، **بدیهی** و سایر گراف‌ها غیر بدیهی‌اند. یک نام‌گذاری رأس‌ها (یال‌ها) را برچسب‌گذاری رأس‌ها (یال‌ها) می‌نامند و معمولاً مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها را به صورت $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ و $E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ برچسب می‌گذارند.

گراف ساده‌ای که در آن تمام رأس‌ها دو به دو مجاور هستند را گراف **کامل** می‌نامند. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهند. یک گراف با مجموعه یال‌های تهی را گراف **تهی** می‌نامند.

تعریف ۱.۱. فرض کنید G و H دو گراف و $\varphi: V(G)\longrightarrow V(H)$ یک تابع است. φ را همریختی می‌نامند هرگاه مجاورت دو رأس u و v در G مجاورت $\varphi(u)$ و $\varphi(v)$ در H را نتیجه بدهد. تابع φ یک‌ریختی است هرگاه φ دوسویی بوده و φ و φ^{-1} همریختی باشند. در این حالت G و H را دو گراف یک‌ریخت می‌نامند و با $G\cong H$ نشان می‌دهند.

فرض کنید G یک گراف است. در این‌صورت گراف H را **زیرگراف** G می‌نامند ($H\leqslant G$)، اگر $V(H)\subseteq V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$ و ψ_H از محدود کردن ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد. یک $F-$زیرگراف G، زیرگرافی از G است که با گراف F یک‌ریخت است. تعداد همه $F-$زیرگراف‌های G با $\phi_G(F)$ نمایش داده می‌شود که برای راحتی می‌توان از نوشتن G صرف نظر کرد.

تعریف ۲.۱. یک **گشت** در گراف G، عبارت است از دنباله $W:=v_0e_1v_1\ldots v_{l-1}e_lv_l$ به طوری‌که جملات این دنباله یک در میان رئوس و یال‌های G هستند و v_i و v_{i-1} رئوس انتهایی e_i می‌باشند، $1\leq i\leq l$. عدد صحیح l را طول گشت نامیده و رئوس v_0 و v_l رئوس انتهایی و سایر رئوس را رئوس درونی گشت می‌نامند. گشت بدون یال تکراری را **گذر** می‌نامند.

یک **مسیر**، گراف ساده‌ای است که می‌توان رئوس آن را در یک دنباله خطی طوری مرتب کرد که دو رأس آن مجاورند هرگاه عناصر متوالی دنباله باشند، در غیر این‌صورت آن دو رأس نامجاورند. رئوس ابتدا و انتهای مسیر را رئوس انتهایی و سایر رئوس آن را رئوس درونی می‌نامند.

یک **دور** با $n \geq ۳$ رأس، گراف ساده‌ای است که می‌توان رئوس آن را در یک دنباله دوری طوری مرتب کرد که در آن دو رأس مجاورند هرگاه عناصر متوالی دنباله باشند، در غیر این‌صورت آن دو رأس نامجاورند. تعداد یال‌های یک مسیر یا دور، طول مسیر یا دور را مشخص می‌کند. یک دور یا مسیر به طول k را به ترتیب $k-$دور یا $k-$مسیر می‌نامند. زوجیت دور و مسیر بر اساس زوجیت k **تعیین** می‌شود. ۳-دور را اغلب مثلث و ۴-دور را چهارضلعی می‌نامند. مسیر و دور از مرتبه n را به ترتیب با P_n و C_n نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۱. گراف G **همبند** است اگر بین هر دو رأس آن مسیری موجود باشد. همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رئوس G است. به عبارت دیگر G همبند است اگر برای هر افراز از مجموعه رئوس G به دو مجموعه ناتهی X و Y، یک یال با یک انتها در X و انتهای دیگر در Y موجود باشد؛ در غیر این‌صورت G **ناهمبند** است.

قضیه ۴.۱. هر گشت بسته به طول فرد، شامل یک دور به طول فرد است.

اثبات. فرض کنید W یک گشت بسته فرد است. اگر طول W برابر ۱ باشد، آن‌گاه W یک طوقه است. اگر گراف مورد نظر ساده باشد، آن‌گاه طول W حداقل سه و لذا یک دور به طول سه خواهد بود. فرض کنید حکم برای گشت‌های بسته به طول کمتر از $k > ۳$ برقرار است. اگر W رأس تکراری نداشته باشد، آن‌گاه W یک دور به طول فرد است. در غیر این‌صورت فرض کنید $W = v_۰v_۱\dots v_{k-۱}v_۰$، و دو عدد j و i وجود داشته باشند به طوری‌که $۰ < i < j < k$ و $v_i = v_j = v$. در این‌صورت W را می‌توان به دو $(v, v)-$گشت افراز کرد. چون طول W فرد است، یکی از دو گشت فرد و دیگری زوج است که این گشت فرد بنابر فرض استقرا، شامل دور فرد است.

□

درجه رأس v در گراف G، $d_G(v)$، برابر **تعداد** یال‌های واقع بر v است. یک رأس با درجه صفر، رأس تنها و با درجه یک را رأس انتهایی می‌نامند. بیشترین درجه رأس‌های G را با $\Delta(G)$ و مجموعه رأس‌های مجاور با رأس v را با $N_G(v)$ نمایش می‌دهند. بنابراین اگر G یک گراف ساده باشد، آن‌گاه $d_G(v) = |N_G(v)|$. قضیه‌ای از اویلر بیان می‌کند که مجموع درجات رئوس یک گراف دو برابر تعداد یال‌های آن است.

اگر درجات تمام رأس‌های یک گراف برابر با k باشد، آن گراف k**-منظم** نامیده می‌شود. بنابراین در یک گراف $k-$منظم از مرتبه n و اندازه m، $m = \frac{nk}{2}$. **فاصله** بین دو رأس u و v در گراف G که به صورت $d_G(u,v)$ نشان می‌دهند، برابر با طول کوتاه‌ترین $(u,v)-$مسیر در G است.

تعریف ۵.۱. فرض کنید G یک گراف است و $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های آن هستند. در این‌صورت **ماتریس وقوع** G، ماتریسی $n \times m$ مثل $M(G) = [m_{ij}]$ است که m_{ij} برابر ۱ است اگر رأس v_i واقع بر یال e_j باشد و در غیر این‌صورت برابر با ۰ است. همچنین متناظر با رئوس G، ماتریسی $n \times n$ مانند $A(G) = [a_{ij}]$ وجود دارد که درایه سطر i ام و ستون j ام این ماتریس یک است هرگاه v_iv_j یالی از گراف باشد و در غیر این‌صورت صفر خواهد بود. این ماتریس را **ماتریس مجاورت** G می‌نامند که همواره یک ماتریس متقارن حقیقی است.

تعریف ۶.۱. فرض کنید G یک گراف و A ماتریس مجاورت آن است. در این‌صورت عدد λ را یک **مقدار ویژه** برای G می‌نامند، هرگاه بردار ناصفر X وجود داشته باشد به گونه‌ای که $AX = \lambda X$. بردار X را **بردار ویژه** نظیر مقدار ویژه λ می‌نامند. **طیف** گراف G، مجموعه‌ای از مقادیر ویژه $A(G)$ با مرتبه تکرار آن‌ها است. اگر مقادیر ویژه متمایز $A(G)$ به صورت $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{s-1}$ و مرتبه تکرار آن‌ها به صورت $m(\lambda_0)$، $m(\lambda_1)$، …، $m(\lambda_{s-1})$ باشند، آن‌گاه طیف گراف G به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{s-1} \\ m_0 & m_1 & \ldots & m_{s-1} \end{pmatrix}.$$

فرض کنید G یک گراف از مرتبه n است. در این‌صورت چندجمله‌ای مشخصه گراف G که با $\chi(G;x)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(G;x) = \det(xI - A(G)) = \prod_{i=۱}^{n} (x - \lambda_i)$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ و λ_i، $۱ \leq i \leq n$، مقادیر ویژه G هستند.

تعریف ۷.۱. دو ماتریس A و B را **متشابه** می‌نامند، اگر ماتریس وارون‌پذیر P وجود داشته باشد به طوری‌که $A = P^{-۱}BP$.

لم ۸.۱. مقادیر ویژه ماتریس‌های متشابه، یکسان هستند.

اثبات. اگر $B = PAP^{-۱}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\chi(B;x) &= \det(xI - B) = \det(xI - PAP^{-۱}) = \det(xPIP^{-۱} - PAP^{-۱}) \\
&= \det(P(xI - A)P^{-۱}) = \det(P)\det(xI - A)\det(P^{-۱}) \\
&= \det(xI - A) = \chi(A;x),
\end{aligned}$$

که این اثبات را کامل می‌کند.

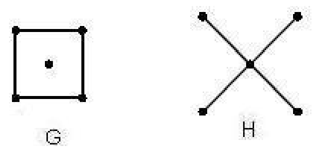
□

قضیه ۹.۱. اگر A ماتریس متقارن با درایه‌های حقیقی باشد، آن‌گاه همه مقادیر ویژه آن حقیقی هستند.

اثبات. فرض کنید v بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ است. در این‌صورت، $Av = \lambda v$. چون A حقیقی است، لذا $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. با ضرب طرفین این تساوی در v^t نتیجه می‌شود که $v^tA\bar{v} = \bar{\lambda}v^t\bar{v}$. بنابراین، $(Av)^t\bar{v} = \bar{\lambda}\|v\|^۲$. از این‌که λ مقدار ویژه است نتیجه می‌شود که $\lambda v^t\bar{v} = \bar{\lambda}\|v\|^۲$ و لذا $\lambda\|v\|^۲ = \bar{\lambda}\|v\|^۲$. اکنون با توجه به این‌که $v \neq ۰$، نتیجه می‌شود که $\lambda = \bar{\lambda}$ و این اثبات را کامل می‌کند.

□

نتیجه ۱۰.۱. همه مقادیر ویژه ماتریس مجاورت، حقیقی هستند.



شکل ۱.۱: نمودار دو گراف غیر یک‌ریخت هم‌طیف G و H.

اثبات. چون ماتریس مجاورت، متقارن حقیقی است، لذا بنابر قضیه قبل نتیجه برقرار است.

□

نتیجه ۱۱.۱. فرض کنید G یک گراف و λ_1، ...، λ_n مقادیر ویژه آن هستند. در این‌صورت برای هر عدد صحیح مثبت k، مقادیر ویژه A^k به صورت λ_1^k، ...، λ_n^k است.

اثبات. فرض کنید بردار ناصفر X، بردار ویژه نظیر λ است. در این‌صورت

$$A^kX = A^{k-1}AX = A^{k-1}(\lambda X) = \cdots = \lambda^k X.$$

در نتیجه X بردار ویژه نظیر λ^k است. از طرفی چون A^k یک ماتریس $n \times n$ است، لذا دارای n مقدار ویژه است که هر یک از آن‌ها به شکل λ^k هستند. بنابراین، تمام مقادیر ویژه A^k به صورت λ^k هستند. این اثبات را کامل می‌کند.

□

دو گراف را **هم‌طیف** می‌نامند، هرگاه دارای مقادیر ویژه یکسان با مرتبه تکرار یکسان باشند. اگر دو گراف G و H یک‌ریخت باشند، آن‌گاه مقادیر ویژه آن‌ها یکسان هستند. عکس این مطلب همیشه درست نیست. یعنی اگر دو گراف هم‌طیف باشند، آن‌گاه آن دو گراف یک‌ریخت نیستند. به عنوان مثال، در شکل ۱.۱ مقادیر ویژه دو گراف G و H با پنج رأس برابر ۲، ۲−، ۰، ۰ و ۰ است در حالی‌که دو گراف یک‌ریخت نیستند.

گزاره ۱۲.۱. فرض کنید G یک گراف $k-$منظم است. در این‌صورت،